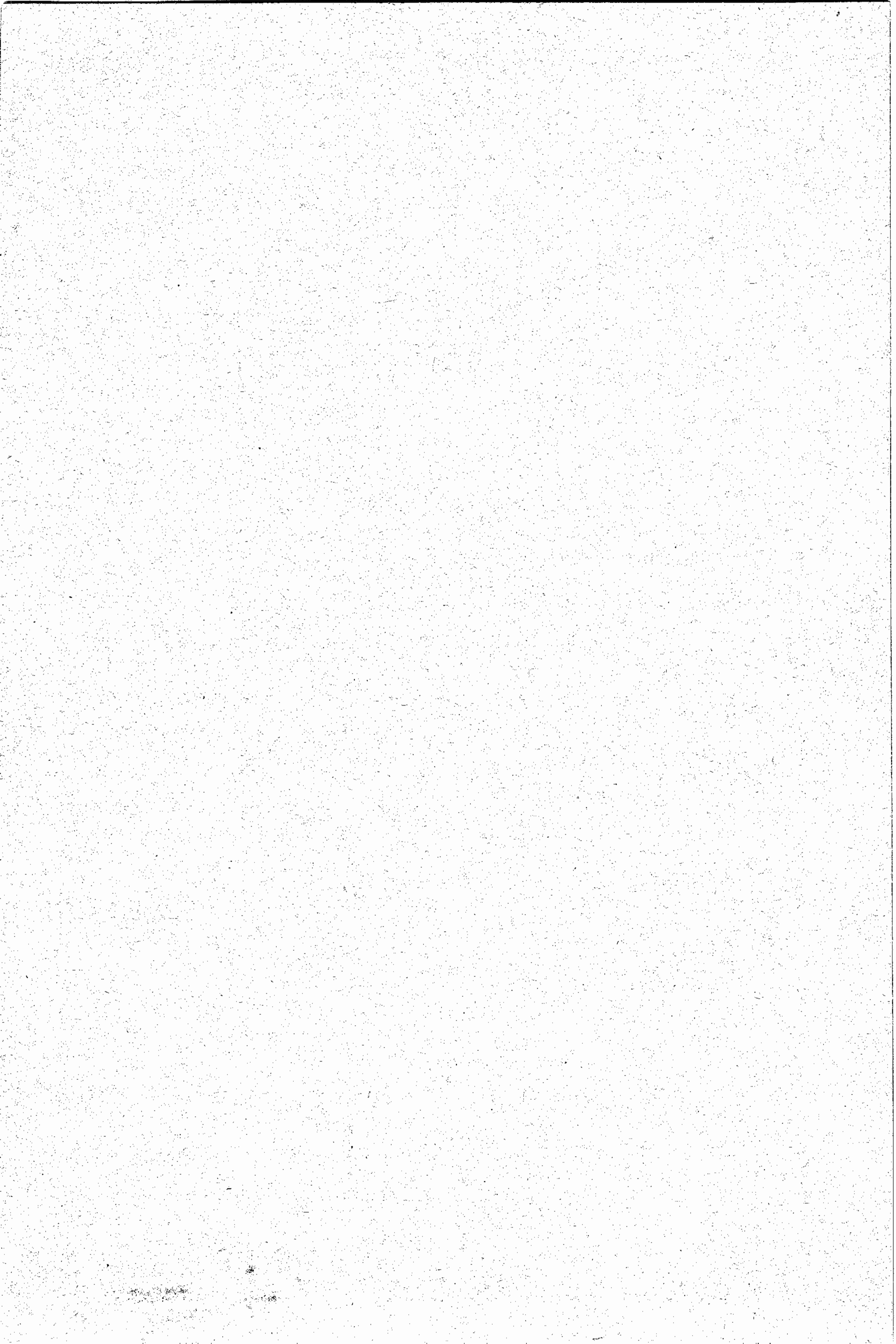
SOLOMON G. MICHLIN

# VARIATIONSMETHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

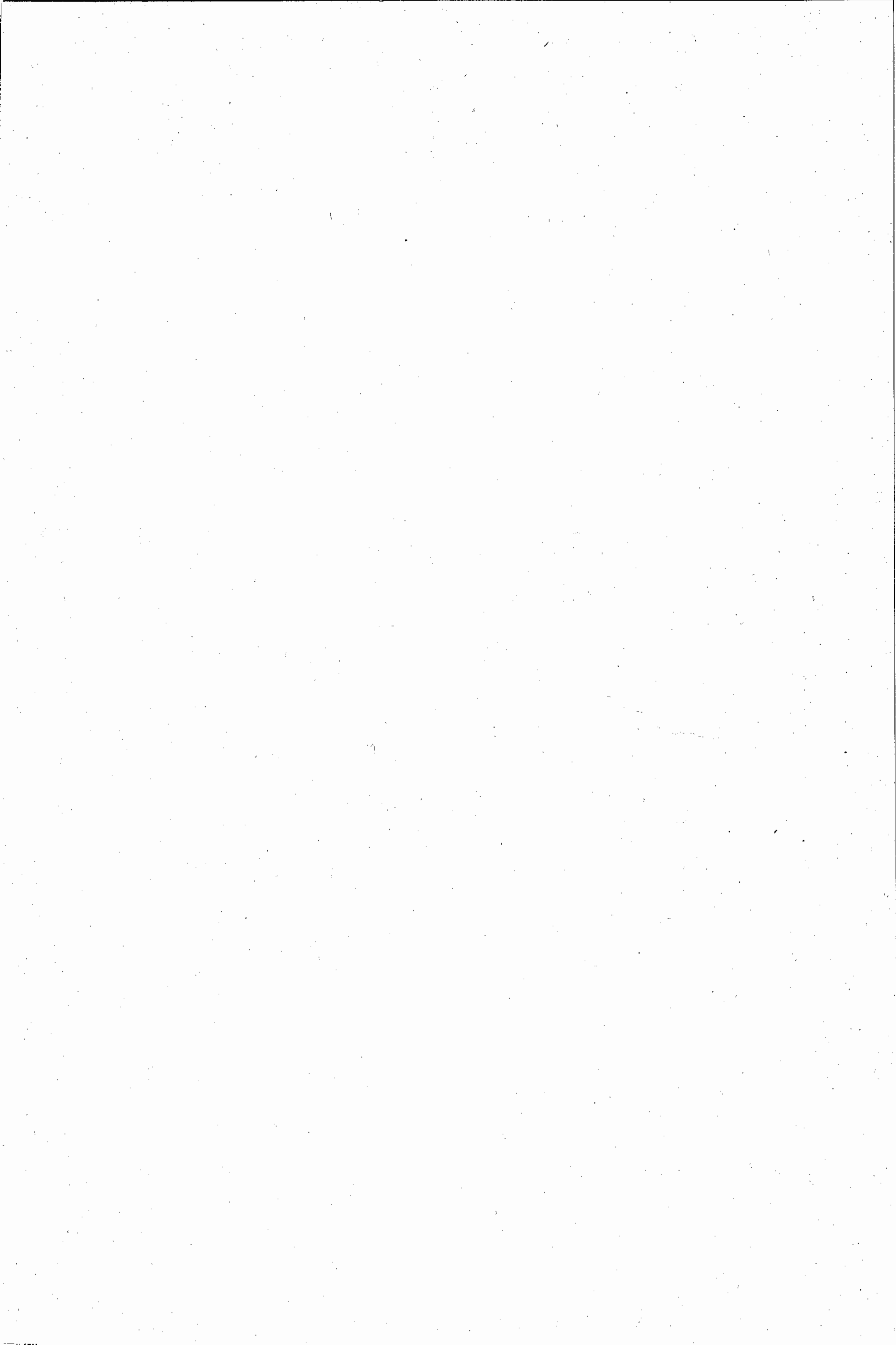
AKADEMIE-VERLAG · BERLIN



SOLOMON G. MICHLIN

---

# VARIATIONSMETHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK



SOLOMON G. MICHLIN

# VARIATIONSMETHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

In deutscher Sprache herausgegeben

von

DR. EUGEN HEYN

*Mit 21 Abbildungen und 7 Tabellen*




AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1962

Соломон Григорьевич Михлин
Вариационные методы в математической физике

Erschienen im Staatsverlag für phys.-math. Literatur
Moskau 1957

Übersetzt aus dem Russischen von
WINFRIED HEINRICH,
Berlin

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

Lizenznummer: 202 · 100/560/62
Gesamtherstellung: Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg
Bestellnummer: 5445 · ES 18 B 1 / 19 B 4

# VORWORT

Das Buch, das wir dem Leser vorlegen, ist das Ergebnis einer wesentlichen Umarbeitung des im Jahre 1950 unter dem Titel „Direkte Methoden der mathematischen Physik" erschienenen Buches des Verfassers. Die Überarbeitung wurde im wesentlichen in zwei Richtungen durchgeführt. Vor allem wurde die wichtigste der Variationsmethoden, die energetische, für die Grundaufgaben der mathematischen Physik von einem elementaren Standpunkt aus behandelt, ohne Verwendung der Theorie der Operatoren im HILBERT-Raum. Ein allgemeiner Gesichtspunkt, der sich auf Grund des schon gesammelten Materials ganz natürlich ergibt, wird nur in Kapitel VI gegeben. Der Verfasser hofft, daß diese Umgestaltung der Darstellung das Buch für einen breiteren Leserkreis zugänglich macht.

Eine weitere Änderung, die dem Verfasser als sehr wichtig erscheint, besteht in folgendem. In den letzten Jahren erschienen sowohl bei uns als auch im Ausland viele Arbeiten, in denen der Fehler der Näherungslösung untersucht wird. Das Vorhandensein dieser Arbeiten gestattet es, das Problem der Fehlerabschätzung der Näherungslösung, die von der energetischen Methode geliefert wird, mit der für den Praktiker nötigen Vollständigkeit zu behandeln.

Dieser Frage, die in dem Buch „Direkte Methoden" nur vermerkt wurde, ist in dem vorliegenden Buch ein besonderes Kapitel gewidmet.

Außer den erwähnten durchgreifenden Änderungen wurde noch eine ganze Reihe weiterer wichtiger, wenn auch nicht so bedeutender Änderungen vorgenommen:

1. Es wurde ein Kapitel über die Aufstellung der Grundaufgaben der mathematischen Physik und über die wichtigsten Eigenschaften der am häufigsten auftretenden Operatoren der mathematischen Physik eingefügt;
2. die Frage der natürlichen Randbedingungen wird ausführlich erörtert;
3. die Theorie der Eigenwerte wird besonders eingehend behandelt; ihr ist ein besonderes Kapitel gewidmet;
4. die Zahl der numerischen Beispiele ist gekürzt, dafür aber in der Mehrzahl der verbliebenen Beispiele die Rechnung bis zur Fehlerabschätzung durchgeführt;
5. die Begründung des GALERKINschen Verfahrens wird ohne Benutzung der Theorie unendlicher Systeme durchgeführt;
6. das wesentlichste Material der Kapitel II („Variationsprinzipien der mathematischen Physik") und III („Methoden zur Lösung von Variationsproblemen") des Buches „Direkte Methoden" sind im Kapitel IV des vorliegenden Buches zusammengefaßt;
7. um eine merkliche Vergrößerung des Umfanges zu vermeiden, sind einige Paragraphen des Buches „Direkte Methoden" fortgelassen worden.

Der Autor entschloß sich, den Titel des Buches zu ändern, da es fast ganz den Variationsmethoden gewidmet ist: der energetischen, der der kleinsten Quadrate, der Methode der orthogonalen Projektionen, dem TREFFTZschen Verfahren und der eng mit der energetischen zusammenhängenden GALERKINschen Methode. Den direkten Methoden, welche nicht zu den Variationsmethoden gehören, vor allem der Methode endlicher Differenzen, ist einiger Platz eingeräumt; bezüglich der Netzmethode, die in der monographischen Literatur gut beleuchtet wird, beschränkte sich der Verfasser auf die Aufzählung der wichtigsten Ergebnisse und auf Literaturhinweise; was die Geradenmethode angeht, so ist sie für die LAPLACEsche und für die biharmonische Gleichung dargestellt. In dieser Hinsicht ist die Geradenmethode, soweit dem Verfasser bekannt ist, nur in Zeitschriftenartikeln dargestellt; deshalb behielt der Verfasser das entsprechende Kapitel bei, obgleich es den übrigen Kapiteln etwas ferner steht.

Für das Verständnis des grundlegenden Materials des vorliegenden Buches (Kap. I—V) wird vom Leser die Vertrautheit mit den ersten beiden Bänden des „Lehrgang der höheren Mathematik" von W. I. SMIRNOW gefordert, mit Ausnahme von Kap. V, Bd. II („Grundlagen der Differentialgeometrie"). An einzelnen Stellen werden einige Kenntnisse aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der Theorie der Integralgleichungen verlangt. In diesen Fällen finden sich im Text die nötigen Literaturhinweise.

Zu besonderem Dank verpflichtet ist der Verfasser K. E. TSCHERNIN, der für das vorliegende Buch eine Reihe neuer Berechnungen vortrefflich ausgeführt hat, und G. P. AKILOW, welcher das ganze Buch im Manuskript las und viele wichtige Bemerkungen machte.

S. MICHLIN

# INHALTSVERZEICHNIS

## Kapitel V
## Eigenwertprobleme



## Kapitel VI
## Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse



## Kapitel VII
## Fehlerabschätzung der Näherungslösung

Kapitel VIII

Zahlenbeispiele



Kapitel IX

Das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN



Kapitel X

Die Methode der kleinsten Quadrate

## Kapitel XI
## Differenzenverfahren

# EINFÜHRUNG

## Historischer Überblick

Die Probleme der mathematischen Physik, insbesondere der Hydrodynamik, der Elastizitätstheorie usw. führen gewöhnlich auf partielle Differentialgleichungen, seltener auf gewöhnliche Differentialgleichungen, welche bei geeigneten Anfangs- oder Randbedingungen zu integrieren sind. Im Hinblick auf die Anwendungen ist die numerische, wenn vielleicht auch nur angenäherte, Berechnung der gesuchten Größen von besonderem Interesse. Diesem Ziel sind die sogenannten *direkten Methoden* wohl am besten angepaßt. Es ist schwer, eine Definition zu geben, welche diese Gruppe von Methoden genau umgrenzen würde. Nach der Definition von S. L. SOBOLEW *bezeichnet man als direkte Methoden solche Näherungsverfahren zur Lösung von Aufgaben aus der Theorie der Differential- und Integralgleichungen, welche diese Aufgaben auf Systeme endlicher algebraischer Gleichungen zurückführen.* Diese Definition erscheint uns von allen am allgemeinsten und vollständigsten; wir wollen sie auch für uns beibehalten, obgleich einige der Methoden, von denen weiter unten die Rede sein wird, und welche wir zu den direkten zählen, nur schwer unter die oben gegebene Definition einzuordnen sind. Eine solche Methode ist z. B. die von L. W. KANTOROWITSCH (vgl. § 15).

In Theorie und Praxis der Anwendung der direkten Methoden werden wir oft auf einen Sachverhalt von größter Bedeutung stoßen. Dieser besteht darin, daß es in vielen Fällen möglich ist, das Problem der Integration einer Differentialgleichung durch ein damit gleichbedeutendes Problem zu ersetzen, das im Aufsuchen einer Funktion besteht, die einem gewissen Integral einen kleinsten Wert erteilt. Aufgaben dieses Typs werden als *Variationsaufgaben* bezeichnet; der oben erwähnte Sachverhalt besteht also darin, daß man in vielen Fällen das Problem der Integration einer Differentialgleichung durch ein diesem äquivalentes Variationsproblem ersetzen kann. So ist es z. B. bei den gewöhnlichen Randbedingungen möglich, die Integration der Gleichungen der statischen Elastizitätstheorie auf die Bestimmung des Minimums der potentiellen Energie des elastischen Körpers zurückzuführen. Verfahren, die es erlauben, die Integration einer Differentialgleichung auf ein damit gleichbedeutendes Variationsproblem zurückzuführen, tragen allgemein die Bezeichnung *Variationsmethoden*. Die wichtigste der Variationsmethoden ist in der technischen Literatur unter der Bezeichnung *energetische Methode* bekannt. Diese Bezeichnung erscheint uns treffend, und wir werden sie beibehalten. Ausführlich ist in den Kapiteln III—VI von der energetischen Methode die Rede.

Es zeigt sich, daß viele direkte Verfahren nicht bequem unmittelbar auf eine Differentialgleichung anzuwenden sind, wohl aber auf das äquivalente Variationsproblem. Das bezieht sich vor allem auf das bekannte RITZsche Verfahren,

welches ein Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsproblemen ist. Mit dem Gesagten erklärt sich der enge Zusammenhang, der zwischen den direkten und den Variationsmethoden besteht.

Historisch zum ersten Male wurde eine Variationsmethode in Gestalt des sogenannten „DIRICHLETschen Prinzips" formuliert. Nach diesem Prinzip ist unter allen Funktionen, welche auf dem Rand eines gewissen Gebietes $\Omega$ vorgegebene Werte annehmen, diejenige Funktion, welche dem sogenannten „DIRICHLETschen Integral"

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{1}$$

den kleinsten Wert erteilt, in $\Omega$ harmonisch.[1])

Das DIRICHLETsche Prinzip wurde von RIEMANN in seinen Arbeiten über die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen ausgiebig verwendet. RIEMANN hielt es für offensichtlich, daß eine Funktion, die dem DIRICHLETschen Integral ein Minimum erteilt, existiert. Das rief eine kritische Bemerkung von WEIERSTRASS hervor, der an einem einfachen Beispiel zeigte, daß *das Integral nicht unbedingt einen kleinsten Wert anzunehmen braucht.*

Und zwar betrachtete WEIERSTRASS folgende Aufgabe[2]): Unter allen im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetigen und stetig differenzierbaren Funktionen, die an den Intervallenden den Bedingungen

$$y(-1) = -1, \quad y(+1) = +1 \tag{2}$$

genügen, ist die Funktion zu finden, welche das Integral

$$J(y) = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\, dx \tag{3}$$

zum Minimum macht. Der Wert des Integrals $J(y)$ hängt von der Wahl der Funktion $y(x)$ ab; offensichtlich ist $J(y) \geq 0$, so daß das Integral (3) nach unten beschränkt ist (SMIRNOW [1], Punkt 39) und daher eine wohldefinierte untere Grenze (SMIRNOW [1], Punkt 42) besitzt. Wir zeigen, daß diese Grenze gleich Null ist; hinreichend dafür ist der Nachweis, daß es eine den oben angeführten Bedingungen genügende Funktion $y(x)$ gibt, die dem Integral $J(y)$ einen Wert kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl erteilt. Wir geben ein $\varepsilon > 0$ vor und setzen

$$y_\varepsilon = \frac{\operatorname{arctg} \dfrac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \dfrac{1}{\varepsilon}}.$$

---

1) Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall des ebenen Problems.

2) Das WEIERSTRASSsche Beispiel wurde von uns in unwesentlichen Einzelheiten etwas vereinfacht.

Die Funktion $y_\varepsilon$ ist im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ offensichtlich stetig und stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen (2). Ferner gilt

$$J(y_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} x^2 y_\varepsilon'^2 \, dx < \int_{-1}^{1} (x^2 + \varepsilon^2) \, y_\varepsilon'^2 \, dx = \frac{\varepsilon^2}{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} .$$

Daraus ist ersichtlich, daß $J(y_\varepsilon)$ beliebig klein wird, wenn $\varepsilon$ hinreichend klein ist. Nach Definition ist dann die untere Grenze des Integrals $J(y)$ genau gleich Null. Allein es existiert keine den Bedingungen (2) genügende und im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige und stetig differenzierbare Funktion, die das Integral $J(y)$ zu Null machen würde. Nehmen wir einmal an, es wäre $J(y) = 0$. Da die Funktion unter dem Integral nicht negativ ist, muß sie identisch verschwinden. Dann ist $y' = 0$ und $y = \text{const}$, was den Bedingungen (2) widerspricht.

Es kann also vorkommen, daß das Integral seine untere Grenze nicht annimmt, das entsprechende Variationsproblem hat dann keine Lösung. Dieser Umstand stellt das DIRICHLETsche Prinzip in Zweifel.

Bekanntlich gab später HADAMARD ein Beispiel von anderer Art an, das zeigte, daß das DIRICHLETsche Prinzip aus dem einfachen Grunde nicht galt, weil die harmonische Funktion das DIRICHLETsche Integral unendlich werden ließ. Wir bringen dieses Beispiel.

Es ist unschwer zu sehen, daß die Reihe

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^{2^{2n}}}{2^n} \cos(2^{2n} \vartheta); \quad x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta \tag{4}$$

in dem Kreis $\varrho \leq 1$ gleichmäßig konvergiert; ihre Summe ist im Innern dieses Kreises harmonisch und stetig einschließlich des Randes. Das DIRICHLETsche Integral dieser Funktion jedoch, genommen über den Kreis $\varrho \leq r < 1$, ist gleich

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n}+1} \underset{r \to 1}{\longrightarrow} \infty .$$

Deshalb kann man die harmonische Funktion (4) nicht als Lösung einer Variationsaufgabe auf der Grundlage des DIRICHLETschen Prinzips erhalten.

Die Einwände von WEIERSTRASS führten dazu, daß das DIRICHLETsche Prinzip lange Zeit vernachlässigt wurde. Das Interesse an diesem Prinzip und an den Variationsmethoden im allgemeinen erwachte aufs neue zu Anfang des 20. Jahrhunderts im Zusammenhang mit den Arbeiten HILBERTS, und besonders nachdem W. RITZ [1] im Jahre 1909 sein Verfahren zur angenäherten Lösung von Minimalproblemen publizierte; dieses Interesse war bei den Vertretern der angewandten Wissenschaften besonders offenkundig, denn das RITZsche Verfahren gab ihnen ein geeignetes Mittel zur Lösung von Problemen, die bis dahin völlig unzugänglich waren, in die Hand. Viele Arbeiten erschienen, in denen unter Verwendung des RITZschen Verfahrens eine Näherungslösung dieser oder jener Aufgabe der mathematischen Physik konstruiert wurde. In den Fällen, wo die Möglichkeit bestand, eine solche Näherungslösung mit der exakten oder mit experimentellen Ergebnissen zu vergleichen, ergab sich gewöhnlich eine zufriedenstellende Über-

einstimmung. Besonders gute Resultate wurden dann erzielt, wenn man Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen hatte.

Ritz formulierte seine Methode wie folgt. Es sei die Variationsaufgabe für das Integral

$$J(w) = \int_a^b f(x, w, w', w'', \ldots, w^{(k)})\, dx \tag{5}$$

gestellt.

Diese Aufgabe besteht bekanntlich in folgendem. Man betrachtet eine gewisse Klasse von Funktionen, die meistens als zulässige Funktionen bezeichnet werden; in dieser Klasse ist diejenige Funktion zu finden, welche dem Integral (5) einen kleineren Wert erteilt als eine beliebige andere zulässige Funktion.

Es sei eine gewisse Folge von Funktionen

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{6}$$

gegeben, welche den folgenden zwei Forderungen genügen: 1. Für beliebige Zahlenkoeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehöre die Funktion

$$w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_n\psi_n \tag{7}$$

zur Klasse der zulässigen Funktionen; 2. für jede beliebige zulässige Funktion $w$ sei es möglich, eine ganze Zahl $n$ und Zahlenkoeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ derart zu wählen, daß die durch die Formel (7) bestimmte Funktion $w_n$ sich von der Funktion $w$ hinreichend wenig unterscheidet. Wir merken hier gleich an, daß die Forderung 2, gewöhnlich als *Vollständigkeitsbedingung* bezeichnet, noch einer genaueren Formulierung bedarf. Ritz führte die notwendige Präzisierung für die konkreten Aufgaben (siehe unten), auf welche er seine Methode anwendet, durch. Die Funktionen (6) nannte Ritz *Koordinatenfunktionen.*

Ersetzen wir im Integral (5) $w$ durch $w_n$, dann wird $J$ eine Funktion der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wir wählen diese Zahlen so, daß $J(w_n)$ seinen kleinsten Wert erhält; bekanntlich ist dafür notwendig, daß $a_1, a_2, \ldots, a_n$ den Gleichungen

$$\frac{\partial J(w_n)}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_n} = 0 \tag{8}$$

genügen. Wenn man die Gleichungen (8) auflöst und die erhaltenen Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in (7) einsetzt, erhalten wir eine Funktion $w_n$, welche Ritz als Näherungslösung des Variationsproblems ansieht.

Der Umstand, daß $w$ nur von einer Veränderlichen $x$ abhängt, spielt offensichtlich keine Rolle. Die Rechnung verläuft genauso, wenn $w$ eine Funktion einer beliebigen Zahl von unabhängigen Veränderlichen und $J(w)$ dementsprechend ein mehrfaches Integral ist.

Im allgemeinen Fall stößt die Konstruktion der Näherungslösung $w_n$ auf recht erhebliche Schwierigkeiten, und zwar wegen der Notwendigkeit, das System (8) zu lösen. Wenn jedoch die Funktion $f$ unter dem Integralzeichen in (5) homogen vom zweiten Grade bezüglich $w$ und seiner Ableitungen ist, dann werden die Gleichungen (8) linear und ihre Lösung stellt eine verhältnismäßig einfache Aufgabe dar. Das ist immer dann der Fall, wenn sich das Variationsproblem auf eine beliebige *lineare* Aufgabe der mathematischen Physik bezieht.

Im Zusammenhang mit dem RITZschen Verfahren erhebt sich die folgende Frage: Inwieweit kann $w_n$ als Näherung für die wahre Lösung des Variationsproblems betrachtet werden? Diese Frage nach der Begründung der Methode kann kaum in allgemeiner Sicht gelöst werden. Weiter unten, in den Kapiteln III—VI, wird eine Begründung des RITZschen Verfahrens für die hinreichend weite Klasse der linearen Aufgaben der mathematischen Physik und der Elastizitätstheorie gegeben.

RITZ selbst verstand die Notwendigkeit einer Begründung für sein Verfahren sehr wohl. In der erwähnten Arbeit [1] formuliert RITZ sein Verfahren kurz in allgemeiner Hinsicht und untersucht dann ausführlich dessen Konvergenz für drei Aufgaben: 1. die Biegung einer am Rande fest eingespannten elastischen Platte unter der Wirkung einer normal gerichteten Belastung; 2. das DIRICHLETsche Problem für die LAPLACE-Gleichung; 3. das Randwertproblem für die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Am Schluß der Arbeit wird das Verfahren auf das Problem der Eigenschwingungen einer Saite angewandt. Hier verweilt der Verfasser nicht bei der Frage nach der Berechtigung der Anwendung seines Verfahrens, sondern sagt nur, daß die nach diesem Verfahren gewonnenen Näherungswerte für die Eigenfrequenzen der Saite sehr nahe bei den wohlbekannten exakten Werten liegen. Wir bemerken gleich, daß das RITZsche Verfahren sich in den Anwendungen auf Probleme aus der Schwingungslehre als eine weitgehende Verallgemeinerung des sogenannten „RAYLEIGH-Verfahrens“ (vgl. RAYLEIGH [1]) erweist. Das hinsichtlich der Berechnungen schwierigere Problem der Eigenschwingungen einer quadratischen Platte wird von RITZ in seiner Arbeit [2] behandelt.

Ausführlich bringen wir eines der von RITZ untersuchten Probleme, nämlich das Plattenproblem. An einzelnen Stellen werden wir unwesentliche Änderungen an den Überlegungen oder Bezeichnungen von RITZ vornehmen. Außerdem kommt dann und wann eine Präzisierung der von ihm gemachten Annahmen hinzu. Auch werden wir einige an sich nicht auf der Hand liegende Einzelheiten des Beweises übergehen, um die Möglichkeit zu haben, die Grundidee ganz klar herauszuarbeiten.

Die Platte möge im Gleichgewichtszustand das Gebiet $\Omega$ der $xy$-Ebene einnehmen, $S$ sei der Rand dieses Gebietes. Die Platte sei am Rand fest eingespannt und der Wirkung einer Normalbelastung der Intensität $q(x, y)$ unterworfen. Die Normalausbiegung der Platte, die wir mit $w(x, y)$ bezeichnen, genügt im Innern des Gebietes $\Omega$ der bekannten Differentialgleichung von SOPHIE GERMAIN

$$\Delta^2 w = f(x, y); \quad f(x, y) = \frac{1}{D} q(x, y) \tag{9}$$

und auf dem Rand $S$ den Randbedingungen

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0. \tag{10}$$

Hier bedeutet $\nu$ die Richtung der Normalen des Randes und $D$ die Biegefestigkeit der Platte. Es ist bekannt[1], daß die Aufgabe, die Gleichung (9) mit den Rand-

[1] Genauer siehe hinten, § 27.

bedingungen (10) zu integrieren, auf das folgende Variationsproblem zurückgeführt werden kann: Unter den Funktionen, die den Randbedingungen (10) genügen[1]), ist diejenige zu finden, welche das Integral

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f w \right] d\Omega \tag{11}$$

zum Minimum macht. Das Integral (11) unterscheidet sich nur durch einen konstanten Faktor von der potentiellen Energie der gebogenen Platte. Um das eben gestellte Variationsproblem zu lösen, nehmen wir an, daß $f(x, y)$ im Innern und auf dem Rand des Plattengebietes stetig und stetig differenzierbar ist.

Es seien $(x, y)$ und $(\xi, \eta)$ zwei Punkte dieses Gebietes, und $r$ die Entfernung zwischen ihnen.

Wir setzen in (11) $w = w_1 + w_2$, wobei

$$w_1 = -\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{12}$$

ist. Durch eine einfache identische Umformung läßt sich zeigen, daß für eine beliebige zulässige Funktion $w$ die Identität

$$J(w) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w_2)^2\, dx\, dy \tag{13}$$

gilt, wo $J_0$ eine gewisse Konstante ist. Da das Integral in (13) offensichtlich nicht negativ ist, so ist

$$J(w) \geq J_0. \tag{14}$$

Demnach ist das Integral $J(w)$ nach unten beschränkt, wenn die Funktion $w(x, y)$ zur Klasse der zulässigen Funktionen gehört, und daher hat dieses Integral eine wohldefinierte untere Grenze. Unser Variationsproblem besteht in der Bestimmung einer solchen zulässigen Funktion, welche dem Integral $J(w)$ einen Wert erteilt, der genau gleich seiner unteren Grenze ist.

Um eine Näherungslösung des Problems zu bilden, wählen wir eine Folge von Koordinatenfunktionen

$$\psi_1(x, y),\ \psi_2(x, y),\ \ldots,\ \psi_n(x, y),\ \ldots, \tag{15}$$

die folgenden Forderungen unterworfen seien: 1. Die Funktionen $\psi_n(x,y)$ und ihre Ableitungen der Form[2])

$$\frac{\partial^{k+l} \psi_n}{\partial x^k\, \partial y^l}, \quad k \leq 3, \quad l \leq 3$$

seien stetig im Innern und auf dem Rand des Gebietes $\Omega$; 2. die Koordinatenfunktionen mögen den Randbedingungen (10) genügen; 3. sei $\zeta$ eine willkürliche

[1]) Das sind die zulässigen Funktionen unseres Variationsproblems.

[2]) Diese Ableitungen nennt Ritz *wesentliche*.

Funktion, die zusammen mit ihren wesentlichen Ableitungen im Innern und auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ stetig ist, und die außerhalb eines gewissen Rechtecks $\varrho$ identisch verschwindet; dieses Rechteck möge einschließlich seines Randes im Innern von $\Omega$ liegen. Dann sei es möglich, eine ganze Zahl $m$ und Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ derart zu wählen, daß die Ungleichung

$$\left|\zeta - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \psi_i\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{k+l} \psi_i}{\partial x^k \partial y^l}\right| < \varepsilon, \quad k \leq 3, \quad l \leq 3 \tag{16}$$

gilt, wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl ist (*Vollständigkeitsbedingung*).

Wir suchen eine Näherungslösung in der Form

$$w_n = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \cdots + a_n \psi_n,$$

wo die Gliederzahl $n$ willkürlich, die Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jedoch aus der Bedingung bestimmt werden, daß die Größe

$$J_n = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\Delta w_n)^2 - f w_n\right] dx\, dy$$

ein Minimum annimmt. In dem hier betrachteten Fall haben die Gleichungen (8) die Form

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k = B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

wo

$$A_{ik} = \iint\limits_{\Omega} \Delta \psi_i \, \Delta \psi_k \, dx\, dy, \quad B_i = \iint\limits_{\Omega} f \psi_i \, dx\, dy \tag{18}$$

ist. Unter Bezugnahme auf die Theorie der quadratischen Formen zeigt Ritz, daß das System (17) eine Lösung besitzt, und zwar genau eine. Wenn wir diese Lösung in den Ausdruck für $w_n$ einsetzen, erhalten wir nach Ritz eine Näherungslösung des Problems.

Es seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ irgendwelche geeigneten konstanten Zahlen. Wir setzen

$$\zeta_n = b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2 + \cdots + b_n \psi_n.$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (17) mit $b_i$ und summieren anschließend über alle $i$. Unter Verwendung der Formel (18) kann man der erhaltenen Gleichung die Form

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n x \zeta_n - f \zeta_n)\, dx\, dy = 0 \tag{19}$$

geben. Die Lösung der Gleichungen (17) erteilt, in das Integral $J_n$ eingesetzt, diesem seinen kleinsten Wert, den wir mit $J_n^{(0)}$ bezeichnen wollen. Man kann ohne Mühe zeigen, daß

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n)^2\, dx\, dy$$

gilt. Mit wachsendem $n$ nimmt die Größe $J_n^{(0)}$ ab oder doch wenigstens nicht zu[1]); gleichzeitig ist diese Größe nach unten beschränkt, da sie nicht kleiner als die genaue untere Grenze des Integrals (11) ist. Nach einem bekannten Satz über monotone Veränderliche strebt die Größe $J_n^{(0)}$ gegen einen gewissen Grenzwert. Auf Grund des Kriteriums von CAUCHY über die Existenz eines Grenzwertes (SMIRNOW [1], Punkt 42) kann man für eine vorgegebene positive Größe $\eta$, wie klein sie auch sei, eine solche Zahl $n$ finden, daß für $n > N$ und für beliebiges $m$ die Ungleichung

$$0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} < \frac{1}{2}\eta \tag{20}$$

erfüllt ist. Wir setzen $(w_{m+n} - w_n)/\sqrt{\eta} = \varphi(x, y)$. Wenn wir die Identität (19) mit $m + n$ an Stelle von $n$ benutzen und eine identische Umformung vornehmen, dann erhält die Ungleichung (20) die Form

$$\iint_\Omega (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy < 1. \tag{21}$$

Auf die Funktion $\varphi(x, y)$ wenden wir die bekannte Formel[2])

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_S \left(\varphi\frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - \ln r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) dS + \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \Delta\varphi\cdot\ln r\, d\xi\, d\eta$$

an. Wie man unschwer sieht, ist $\varphi(x, y)$ eine Linearkombination der Koordinatenfunktionen und erfüllt daher die Bedingungen (10). Infolgedessen verschwindet in der letzten Formel das Randintegral, und wir erhalten

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \Delta\varphi\cdot\ln r\, d\xi\, d\eta. \tag{22}$$

Auf das Integral (22) wenden wir die Ungleichung von BUNJAKOWSKI[3]) an, in unserem Falle folgt

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2\pi}\left\{\iint_\Omega (\Delta\varphi)^2\, d\xi\, d\eta\right\}^{1/2}\left\{\iint_\Omega \ln^2 r\, d\xi\, d\eta\right\}^{1/2}.$$

Das erste Integral ist kleiner als Eins wegen der Ungleichung (21), das zweite hingegen übersteigt, wie leicht zu zeigen ist (wir halten uns damit nicht auf) eine gewisse konstante Zahl nicht. Aber dann übersteigt auch $|\varphi(x, y)|$ eine gewisse Konstante nicht; wir bezeichnen diese mit dem Buchstaben $K$ und erhalten

$$|\varphi(x, y)| \leq K.$$

Jetzt ist

$$|w_{m+n}(x, y) - w_n(x, y)| \leq K\sqrt{\eta}, \quad n > N;$$

---

[1]) Siehe dazu ausführlich § 14.

[2]) Siehe z. B. SMIRNOW [2], S. 520, Formel (11).

[3]) Über die Ungleichung von BUNJAKOWSKI siehe § 3. Anm. d. Red.: In der deutschen Literatur ist die Bezeichnung „SCHWARZsche Ungleichung" üblich.

nach dem CAUCHYschen Kriterium (SMIRNOW [1], Punkt 42) konvergiert die Näherungslösung $w_n$ gleichmäßig gegen eine gewisse Grenzfunktion im abgeschlossenen Gebiet[1]) $\Omega + S$. Diese Grenzfunktion, die wir mit $w(x, y)$ bezeichnen wollen, ist in $\Omega + S$ stetig als Grenzwert der gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen $w_n$ (SMIRNOW [1], Punkt 145) und auf dem Rand $S$ gleich Null.

RITZ bemerkt, daß es nicht möglich sei, die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen von $w_n$ zu bestätigen; nichtsdestoweniger zeigt er, daß die Grenzfunktion $w(x,y)$ im Innern des Gebietes $\Omega$ Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich hat und der Gleichung von SOPHIE GERMAIN genügt. Wir haben schon gesehen, daß $w(x, y)$ die erste der Randbedingungen (10) erfüllt; in der zitierten Arbeit versucht RITZ zu beweisen, daß die Funktion $w(x, y)$ auch die zweite der Randbedingungen (10) erfüllt, jedoch ist seine Schlußweise ungenau. Anschließende Überlegungen von R. COURANT, K. FRIEDRICHS und S. L. SOBOLEW führten zu der Feststellung, daß es bei allgemeiner Behandlung des Gleichgewichtsproblems für die Platte unmöglich ist, zu fordern, daß die Bedingung

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0$$

im gewöhnlichen Sinne erfüllt ist; in Wirklichkeit ist diese Bedingung nur in einem gewissen verallgemeinerten Sinne[2]) erfüllt.

Wir wollen noch kurz über die von RITZ gegebene Lösung des DIRICHLETschen Problems sprechen. Er betrachtete die POISSONsche Gleichung

$$\Delta w = f(x, y), \tag{23}$$

die in einem endlichen Gebiet $\Omega$ der $xy$-Ebene mit der Bedingung zu integrieren ist, daß auf dem Rand $S$ dieses Gebietes die Beziehung

$$w|_S = 0 \tag{24}$$

erfüllt ist. Indem er wiederum sein Verfahren anwendet, konstruiert RITZ eine Folge von Näherungslösungen $w_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Aber diesmal kann man im allgemeinen Falle nicht behaupten, daß diese Folge gleichmäßig konvergiert. Es gelingt lediglich, die Existenz einer Funktion $w_n$ zu beweisen, die die Eigenschaft hat, daß die Integrale

$$\int_\alpha^x w_m(\xi, y)\, d\xi, \quad \int_\beta^y w_m(x, \eta)\, d\eta$$

gleichmäßig gegen die Integrale

$$\int_\alpha^x w(\xi, y)\, d\xi, \quad \int_\beta^y w(x, \eta)\, d\eta$$

konvergieren. Weiter wird bewiesen, daß die Funktion $w(x, y)$ der Gleichung (23) genügt. Was die Randbedingung (24) angeht, so unterläuft RITZ hier eine Ungenauigkeit, analog der oben erwähnten.

---

[1]) Als abgeschlossenes Gebiet bezeichnet man eine Punktmenge, welche aus den Punkten eines Gebietes und den Punkten seiner Begrenzung besteht.

[2]) Siehe R. COURANT und D. HILBERT [2] und S. L. SOBOLEW [2].

In den Arbeiten von FRIEDRICHS, RELLICH und COURANT wurde die energetische Methode und das Problem ihrer Begründung weiterentwickelt. Diese Verfasser untersuchten Variationsprobleme, die Gleichungen allgemeineren Typs entsprechen; die Untersuchung der Konvergenz der Näherungslösung nach RITZ ersetzen sie durch die Untersuchung des allgemeineren Problems der Konvergenz einer *Minimalfolge*[1]). Ferner tritt in den Arbeiten der genannten Autoren die Lösung des Eigenwertproblems für den LAPLACE-Operator und einige andere, ihm verwandte, auf, und zwar in strenger, genügend vollständiger Behandlung. Viele Ergebnisse der genannten Gelehrten sind in dem Buch von R. COURANT und D. HILBERT [1, 2] dargestellt.

Eine bedeutende Rolle bei der Begründung der Variationsmethoden spielten die bekannten ,,Einbettungssätze“ von S. L. SOBOLEW. Diese Sätze und ihre Anwendung auf die Probleme der mathematischen Physik wurden von S. L. SOBOLEW in seiner Monographie [2] geliefert.

In Arbeiten des Verfassers des vorliegenden Buches wurde eine Darstellung der Lösung von Variationsproblemen, auf welche die üblichen Aufgaben der mathematischen Physik führen, in Form einer Reihe gegeben, und der Zusammenhang des RITZschen Verfahrens mit dieser Darstellung aufgezeigt; es wurde eine Begründung der Variationsmethode für einige neue Klassen von Funktionen gegeben, insbesondere für Gleichungen, deren elliptischer Charakter auf dem Rand des Gebietes gestört ist; es wurden Bedingungen für die Konvergenz der höheren Ableitungen im RITZschen Verfahren untersucht. Die Ergebnisse des Verfassers sind in dem Buch ,,Direkte Methoden der mathematischen Physik“, in der Monographie [11] und in einer Reihe von Veröffentlichungen, die im Literaturverzeichnis am Schluß des Buches genannt werden, enthalten.

Zugleich mit der energetischen wurde die eng mit ihr zusammenhängende ,,GALERKINsche Methode“ entwickelt, oder genauer, die ,,Methode von BUBNOW-GALERKIN“.

Im Jahre 1913 erschien eine Rezension von I. G. BUBNOW über die Arbeiten von S. P. TIMOSHENKO, in denen das RITZsche Verfahren auf die Untersuchung der Stabilität von Platten und Balken angewandt wurde. I. G. BUBNOW bemerkt in dieser Rezension, daß man die Gleichungen, auf die das RITZsche Verfahren führt, erhalten kann, ohne den Ausdruck für die potentielle Energie des Systems zur Hilfe zu nehmen, und ohne ein Variationsproblem lösen zu müssen. BUBNOW bemerkt, daß TIMOSCHENKO einen Ausdruck der Form

$$W = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \cdots \tag{25}$$

sucht, wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gegebene Funktionen und $a_1, a_2, \ldots$ noch zu bestimmende Koeffizienten sind, und schreibt: ,,... Eine sehr einfache Lösung kann man auch auf dem üblichen Weg erhalten, d. h. ohne sich auf die Betrachtung der Energie des Systems zu stützen, wenn nur die Konvergenz der Reihe für $W$ hinreichend gut ist. Durch einfache Substitution der Darstellung für $W$ im allgemeinen Differentialausdruck für das Gleichgewicht, anschließende Multiplikation der gewonnenen Beziehung mit $\varphi_k\,dx\,dy$ und Integration über das ganze Körpergebiet erhalten wir nämlich eine Gleichung, die die Koeffizienten $a_k$ mit allen andern ver-

[1]) Siehe § 13.

knüpft, wenn nur die Funktionen $\varphi$ so gewählt werden, daß

$$\iint \varphi_n \varphi_k \, dx \, dy = 0 \quad \text{für} \quad n \neq k$$

ist. Diese Gleichung gilt für beinahe alle Probleme der betrachteten Arbeit, da der Autor den Ausdruck $W$ gewöhnlich in Form einer trigonometrischen Reihe wählt, wo diese Bedingung erfüllt ist; wenn aber aus irgendeinem Grunde eine Entwicklung nach ganzen rationalen Funktionen wünschenswert ist, kann man jene durch Kugelfunktionen ersetzen. Wenn wir von den gewonnenen Gleichungen nur so viele hinschreiben, wie wir Glieder in der Reihe beibehalten wollen und die Determinante aus den Faktoren bei den Koeffizienten gleich Null setzen, dann führen wir damit die Aufgabe, die kritische Last zu bestimmen, auf die Berechnung der kleinsten Wurzel einer ganzen rationalen Funktion zurück, deren höchste Potenz gleich der Zahl der beibehaltenen Glieder ist.“ Weiter schreibt I. G. BUBNOW: „Wir bemerken, daß die Ergebnisse, die man so erhält, nicht die Lösung der Differentialgleichung für das Gleichgewicht erfordern... und mit den von Prof. TIMOSHENKO gefundenen identisch sind.“

Wenn man die zitierten Ausführungen BUBNOWS in die Sprache der Formeln überträgt, dann ergibt sich folgendes. Die Lösung des Stabilitätsproblems führt gewöhnlich auf die Integration einer Differentialgleichung der Form

$$Lw - \lambda M w = 0, \tag{26}$$

wo $w$ die Variable ist, $L$ und $M$ gewisse Differentialoperatoren sind und $\lambda$ ein unbekannter Parameter ist. Die Veränderliche $w$ genügt außer der Differentialgleichung (26) noch gewissen homogenen Randbedingungen. Wenn es sich z. B. um die Stabilität einer am Rand fest eingespannten Platte handelt, so muß die Veränderliche $w$ noch den Bedingungen (10) genügen. Bei willkürlicher Wahl von $\lambda$ hat die gestellte Aufgabe nur die triviale Lösung $w = 0$; es kommt darauf an, solche Werte $\lambda$ zu finden, für die die Gleichung (26) eine nicht identisch verschwindende Lösung hat; das kleinste dieser $\lambda$ bestimmt dann die kritische Last, bei der die Platte ihre Stabilität verliert. Wie wir später sehen werden (§ 31), ist dieses kleinste $\lambda$ bei den bekannten Bedingungen gleich dem Minimum des Ausdrucks

$$\frac{\iint\limits_{\Omega} w \cdot Lw \, dx \, dy}{\iint\limits_{\Omega} w \cdot Mw \, dx \, dy}; \tag{27}$$

mit Hilfe der Randbedingungen kann man den Ausdruck (27) gewöhnlich in einer etwas anderen Form darstellen, die auch W. RITZ und S. P. TIMOSHENKO in ihren Arbeiten benutzen. Das Minimum des Ausdrucks (27) kann man nach dem RITZschen Verfahren bestimmen, was auf ein Gleichungssystem der Form

$$\sum_{k=1}^{n} (A_{ik} - \lambda B_{ik}) a_k = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{28}$$

führt, wo $a_k$ die Koeffizienten des Ausdrucks (25) sind, wenn man $n$ Glieder nimmt; die $A_{ik}$ und $B_{ik}$ sind gewisse Zahlen, die in bestimmter Weise von den

Koordinatenfunktionen $\varphi_k$ abhängen. Damit die Näherungslösung (25) nicht identisch verschwindet, ist notwendig und hinreichend, daß die dem System (28) genügenden Zahlen $a_k$ nicht sämtlich gleich Null sind; dafür wiederum ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante des Systems (28) verschwindet:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda B_{11}, & A_{12}-\lambda B_{12}, & \ldots, & A_{1n}-\lambda B_{1n} \\ A_{21}-\lambda B_{21}, & A_{22}-\lambda B_{22}, & \ldots, & A_{2n}-\lambda B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1}-\lambda B_{n1}, & A_{n2}-\lambda B_{n2}, & \ldots, & A_{nn}-\lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Offensichtlich ist (29) eine algebraische Gleichung $n$-ten Grades in $\lambda$; die kleinste Wurzel dieser Gleichung liefert einen Näherungswert für das Minimum des Ausdrucks (27). Im wesentlichen wandte auch TIMOSHENKO das hier beschriebene Verfahren in der Arbeit an, die von BUBNOW rezensiert wurde. Letzterer bemerkte jedoch, daß *man das System* (28) *auf anderem, einfacherem Weg erhalten kann*: Es genügt, in die Gleichung (26) an Stelle von $w$ seinen Näherungswert (25) einzusetzen, in welchem man $n$ Glieder beibehält, den erhaltenen Ausdruck mit $\varphi_k$ zu multiplizieren, über das von der Platte eingenommene Gebiet zu integrieren (bzw. über die Länge des Stabes, wenn das Stabilitätsproblem für den Stab zu lösen ist, usw.) und das Resultat gleich Null zu setzen. Als Bedingung für die Anwendbarkeit seines Verfahrens stellt I. G. BUBNOW die Forderung nach der Orthogonalität der Koordinatenfunktionen, was von der Natur der Sache her keineswegs notwendig ist.

Die Feststellung I. G. BUBNOWS war der Ausgangspunkt einer neuen direkten Methode, deren Entwicklung und ausgedehnte Anwendung eng mit dem Namen B. G. GALERKIN zusammenhängt. In einer im Jahre 1915 erschienenen Arbeit [1] löst B. G. GALERKIN eine Reihe von Gleichgewichts- und Stabilitätsproblemen für Stäbe und Platten. Das von ihm angewandte Verfahren fällt formal mit dem zusammen, das I. G. BUBNOW bei der oben erwähnten Rezension der Gleichungen von TIMOSHENKO formulierte; das wesentlich neue war jedoch, daß GALERKIN seine Methode nicht mit irgendwelchen Variationsproblemen verknüpfte, so daß er sie auf beliebige Differentialgleichungen (und nicht nur auf Differentialgleichungen) anwenden konnte, und daß er nicht die Orthogonalität der Koordinatenfunktionen forderte.

Wie schon erwähnt wurde, veröffentlichte GALERKIN seine Arbeit im Jahre 1915. Seitdem erschien eine große Zahl von Arbeiten, in denen das Verfahren von BUBNOW—GALERKIN in weitem Maße bei der praktischen Lösung der verschiedensten Anwendungsprobleme benutzt wurde. Ferner erschienen Arbeiten, in denen dieses Verfahren, und nicht ohne Erfolg, bei der Lösung nichtlinearer Probleme angewandt wurde. Jedoch die Rechtfertigung der Methode erwies sich als eine recht schwierige Angelegenheit. Erst 25 Jahre nach der Veröffentlichung des Artikels von GALERKIN, im Jahre 1940, begründete G. W. REPMAN [1] das Verfahren von BUBNOW—GALERKIN bei der Anwendung auf Integralgleichungen vom FREDHOLMschen Typ; im selben Jahr gewann G. I. PETROW [1] ein analoges Ergebnis für eine spezielle gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bald darauf verallgemeinerte M. W. KELDYSCH [1] die Ergebnisse von G. I. PETROW auf den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen von gerader Ordnung und

bewies auch die Konvergenz des BUBNOW—GALERKINschen Verfahrens bei den einfachsten Randwertproblemen für die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ. Vom Verfasser [4, 8] wurde ein genügend allgemeines hinreichendes Kriterium für die Konvergenz des BUBNOW—GALERKINschen Verfahrens gefunden und Anwendungen dieses Kriteriums auf eine Reihe von Problemen gegeben; insbesondere wurde klargestellt, daß alle oben angeführten Ergebnisse unter das erwähnte Kriterium fallen. Erwähnung verdienen auch die Arbeiten von I. N. POLSKI [1, 2], in denen die von G. I. PETROW [1] gegebene Verallgemeinerung des BUBNOW—GALERKINschen Verfahrens untersucht wird. Schließlich begründete M. A. KRASNOSELSKI [1, 3] das BUBNOW—GALERKINsche Verfahren für eine gewisse Klasse nichtlinearer Gleichungen. Das Verfahren von M. A. KRASNOSELSKI wurde von I. I. WOROWITSCH in seiner Arbeit [1] über die Schalentheorie untersucht. Dem Verfahren von BUBNOW—GALERKIN ist Kap. IX gewidmet.

Von den anderen direkten Methoden verdienen die Methode der kleinsten Quadrate und besonders die Netzmethode hervorgehoben zu werden. Die Methode der kleinsten Quadrate wurde von M. PICONE [1] zur Lösung des DIRICHLETschen Problems verwandt; andere Untersuchungen darüber finden sich in den Arbeiten von N. M. KRYLOW, M. F. KRAWTSCHUK und anderer.[1]) Allgemeine Bedingungen für die Konvergenz der Methode der kleinsten Quadrate und eine Reihe von Anwendungen davon wurden in Arbeiten des Verfassers [3, 6] gegeben. Eine ausführliche Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate findet sich in Kap. X.

Große Bedeutung hat die Netzmethode. Über sie gibt es eine umfangreiche Literatur; wir werden uns hier kurz damit beschäftigen. Eine Darstellung der Netzmethode kann man in den Büchern von L. W. KANTOROWITSCH und W. I. KRYLOW [1], D. I. PANOW [1] und anderen finden.

Eine sehr wichtige Rolle spielt die Frage der Fehlerabschätzung der Näherungslösung, die man nach dieser oder jener direkten Methode gewonnen hat. In diesem Zusammenhang spielt die in Abhandlungen von S. ZAREMBA [1, 2] und H. WEYL [2] ausgearbeitete sogenannte Methode der orthogonalen Projektionen[2]) eine besondere Rolle. Diese Methode gehört zu den Variationsmethoden und gestattet es, Näherungslösungen von Randwertaufgaben zu bilden. Dabei zeigt sich eine wichtige Besonderheit: Kennt man zwei Näherungslösungen eines Problems, von denen die eine nach der energetischen Methode gebildet ist, die andere aber nach dem Verfahren der orthogonalen Projektion, dann kann man den Fehler der beiden Näherungslösungen abschätzen. Es gibt auch andere Methoden, die für die Fehlerabschätzung dieselbe Rolle spielen, wie es hier für das Verfahren der orthogonalen Projektionen erwähnt wurde; das gilt z. B. für das Verfahren von TREFFTZ [1], das seine Weiterentwicklung in Arbeiten von M. S. BIRMAN [3, 5, 6] fand. Wir erwähnen noch die auf dasselbe Ziel gerichtete Darstellung von FRIEDRICHS; eine genügend ausführliche Darstellung findet der Leser in dem Buch von R. COURANT und D. HILBERT [1].

In den Kapiteln I—V werden, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, nur reelle Funktionen einer oder mehrerer reeller Veränderlicher betrachtet.

---

[1]) Näheres darüber siehe bei M. F. KRAWTSCHUK [1].

[2]) Siehe auch M. I. WISCHIK [1]—[3].

KAPITEL I

# ÜBER DIE OPERATOREN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

## § 1. Aufstellung der Grundaufgaben

Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik zerfallen in zwei große Klassen. Die Gleichungen der ersten Klasse beschreiben Prozesse, in denen die den Forscher interessierenden unbekannten Größen sich im Laufe der Zeit merklich ändern, so daß diese Unbekannten Funktionen der Koordinaten und der Zeit sind. Das einfachste und wichtigste Beispiel dieser Klasse ist die Wellengleichung (SMIRNOW [2], Punkt 171), wovon die Gleichung der Saitenschwingung einen Spezialfall darstellt. Ein anderes Beispiel für die Gleichungen dieser Klasse stellt die Wärmeleitungsgleichung dar (SMIRNOW [2], Punkt 203). Mit diesen Gleichungen werden wir uns im vorliegenden Buch nicht befassen. Die Gleichungen der zweiten Klasse beschreiben stationäre Vorgänge, bei denen die den Forscher interessierenden Größen sich im Laufe der Zeit nicht ändern, oder doch wenigstens nur vernachlässigbar wenig. Die am häufigsten vorkommenden derartigen Gleichungen gehören zum sogenannten elliptischen Typ.[1]) Wir betrachten eins der wichtigsten stationären Probleme der mathematischen Physik.

Ein gewisser Körper sei ungleichmäßig erwärmt, so daß seine Temperatur, die wir mit $U$ bezeichnen, eine Funktion der Koordinaten eines veränderlichen Punktes des Körpers ist. Wenn sich im Innern des Körpers keine Wärmequelle befindet, dann genügt diese Funktion der LAPLACE-Gleichung in drei unabhängigen Veränderlichen (SMIRNOW [2], Punkt 112)

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Wenn wir die Temperaturverteilung im Innern des Körpers kennen lernen wollen, dann muß man diese Gleichung integrieren, d. h. man muß eine Funktion finden, die dieser Gleichung genügt. Es ist jedoch unschwer zu sehen, daß eine mehr als abzählbare Menge von Funktionen der LAPLACE-Gleichung genügt; indessen ist es physikalisch klar, daß für einen gegebenen Körper, der sich in einem gegebenen Zustand befindet, die Temperaturverteilung vollständig bestimmt sein muß. Das bedeutet, daß wir bei der Lösung unserer Aufgabe nicht nur von der LAPLACE-Gleichung ausgehen können: Es müssen noch ergänzende Bedingungen hinzukommen. Zu diesen Bedingungen kann man z. B. auf folgende Weise gelangen: Wir haben die Möglichkeit, die Temperatur in einem beliebigen Punkt der Oberfläche des gegebenen Körpers unmittelbar zu messen. Wir nehmen an, daß wir die Temperatur in vielen Punkten gemessen haben, die hinreichend dicht auf der Oberfläche des Körpers verteilt sind. Man kann dann praktisch annehmen, daß

---

1) Vgl. z. B. I. G. PETROWSKI [2].

uns die Temperatur in jedem beliebigen Punkt der Körperoberfläche bekannt ist, und das kann uns als Zusatzbedingung bei der Integration der LAPLACE-Gleichung dienen. Wir bezeichnen mit dem Buchstaben $\Omega$ das Raumgebiet, daß von dem erwärmten Körper eingenommen wird, mit dem Buchstaben $S$ seine Oberfläche. Ferner möge $P$ einen willkürlichen Punkt auf der Fläche $S$ bezeichnen und $f(P)$ die uns bekannte Temperatur des Körpers im Punkte $P$ seiner Oberfläche. Unsere Zusatzbedingung kann man wie folgt schreiben:

$$U = f(P) \quad \text{auf} \quad S,$$

oder etwas kürzer

$$U|_S = f(P). \tag{2}$$

Das Problem der Temperaturverteilung kann man jetzt wie folgt mathematisch formulieren: *Es ist eine Funktion $U(x, y, z)$ zu bestimmen, welche der* LAPLACE-*Gleichung im Innern eines Gebietes $\Omega$ genügt und auf seinem Rand $S$ vorgegebene Werte annimmt*; in der mathematischen Physik ist diese Aufgabe unter dem Namen DIRICHLET*sches Problem* bekannt. Die Bedingung, daß die gesuchte Funktion auf $S$ vorgegebene Werte annimmt, wird *Grenz-* oder *Randbedingung* genannt, da sie sich auf das Verhalten der gesuchten Funktion auf der Begrenzung des Gebietes bezieht.

Die Randbedingungen können auch von anderer Art als beim DIRICHLETschen Problem sein. So wollen wir einmal annehmen, daß uns die Temperatur $U_0$ des den Körper umgebenden Mediums bekannt sei, und es möge durch die Oberfläche $S$ des Körpers Wärme in dieses Medium abfließen. Nach dem von NEWTON angegebenen Wärmeleitungsgesetz ist der Wärmefluß durch die Oberfläche der Temperaturdifferenz zwischen dem äußeren Medium und der Körperoberfläche proportional. Dieses Gesetz führt uns zu einer Randbedingung der Form

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} + h(U - U_0) = 0 \text{ auf } S,$$

wo $\nu$ die Außennormale zur Fläche $S$, $h$ ein gewisser Koeffizient ist. Mit $hU_0 = \varphi(P)$ kann man die neue Randbedingung in der Form

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \nu} + hU\right]_S = \varphi(P) \tag{3}$$

schreiben. Die Aufgabe, die LAPLACE-Gleichung mit den Randbedingungen (3) zu integrieren, wird *gemischtes Problem* genannt.

Wenn man auf der linken Seite der Bedingung (3) formal $h = 0$ setzt, dann erhält man eine neue Randbedingung der Form

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_S = \varphi(P); \tag{4}$$

die Aufgabe, die LAPLACE-Gleichung mit dieser Randbedingung zu integrieren, wird gewöhnlich als NEUMANN*sches Problem* bezeichnet. Wir kamen hier aus sehr formalen Überlegungen zu diesem Problem, und das so gewonnene NEUMANNsche Problem kann in der Theorie der Wärmeleitung kaum große Bedeutung haben; aber in vielen anderen Fällen spielt dieses Problem eine wichtige Rolle. So führt z. B. das Torsionsproblem für einen elastischen Stab auf die Bestimmung einer

Funktion $\varphi(x, y)$ zweier Veränderlicher, welche der „zweidimensionalen" LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

im Grundflächengebiet des Stabes und der Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y)$$

auf dem Rand dieses Gebietes genügt. Auf das NEUMANNsche Problem führt auch das Problem der Biegung eines elastischen Stabes durch Querkräfte, das Problem der Umströmung eines festen Körpers durch eine ideale Flüssigkeit und vieles andere.

Wir haben also klargestellt, daß es bezüglich der LAPLACE-Gleichung zweckmäßig ist, drei Aufgaben zu stellen und zu lösen, welche sich nur in den Randbedingungen unterscheiden, die die Gleichung ergänzen; das sind das DIRICHLETsche, das NEUMANNsche und das gemischte Problem. Manchmal bezeichnet man sie auch als das erste, zweite und dritte Randwertproblem.

Die LAPLACE-Gleichung ist das einfachste und wichtigste Beispiel aus der Klasse der elliptischen Gleichungen. Oft treten in der mathematischen Physik auch andere Gleichungen dieser Klasse auf. Wenn z. B. im Innern eines ungleichmäßig erwärmten Körpers Wärmequellen der Intensität $f(x, y, z)$ verteilt sind, dann genügt die Temperatur $U(x, y, z)$ dieses Körpers nicht mehr der LAPLACE-Gleichung, wohl aber der sogenannten *POISSONschen Gleichung*

$$\Delta U = -\frac{1}{k} f(x, y, z), \tag{5}$$

wo $k$ der Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit im Innern ist. Wenn der Körper inhomogen ist, dann ist $k$ nicht konstant, sondern eine Funktion der Koordinaten, die Gleichung (5) geht dann in folgende Form über:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial U}{\partial z}\right) = - f(x, y, z); \tag{6}$$

die Koeffizienten dieser Gleichung sind veränderlich. Zu Gleichung (5) oder (6) kann man Randbedingungen eines der Typen (2), (3) oder (4) hinzufügen. Man kann für die genannten Gleichungen auch andere Randbedingungen aufstellen, aber diese haben keine so große Bedeutung, daher werden wir sie nicht betrachten; wir weisen nur auf folgenden in der Praxis vorkommenden Fall hin, wo die Grenzen des Gebietes in mehrere Teile zerfallen, und auf jedem dieser Teile eine der Bedingungen der Form (2), (3) oder (4) gegeben ist. Die Aufgabe, eine Differentialgleichung bei diesen oder jenen Randbedingungen zu integrieren, wird *Randwertaufgabe* genannt.

In Anwendungsproblemen hat man oft eine Differentialgleichung von elliptischem Typ in zwei oder drei unabhängigen Veränderlichen zu intregrieren, die gewöhnlich als kartesische Koordinaten eines veränderlichen Raumpunktes auftreten. Wie wir sehen werden, hängen sowohl die Formulierung der Grundaufgaben,

als auch die im vorliegenden Buch entwickelten Methoden zu deren Lösung nur unwesentlich von der Dimension des betrachteten Raumes ab. Deshalb werden wir, um die Darstellung zu vereinfachen, von einem Raum der Dimension $m$ sprechen, und dabei zulassen, daß $m$ gleich zwei oder drei wird; in vielen Fällen hängt die gesuchte Funktion sogar nur von einer unabhängigen Veränderlichen ab, dann ist $m = 1$. Wir bemerken noch, daß vom theoretischen Standpunkt aus die Zahl $m$ der Dimensionen des Raumes ganz beliebig sein kann.

Die Gleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typ reichen selbst dafür nicht aus, um wichtige stationäre Vorgänge zu beschreiben. So führt die Theorie der Biegung einer dünnen Platte auf die Gleichung *vierter* Ordnung

$$\Delta(\Delta w) = \Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = f(x, y);$$

bei der Integration ist die gesuchte Funktion $w(x, y)$ noch irgendeiner Randbedingung zu unterwerfen, je nach der Art der Befestigung der Platte am Rande. Diese Bedingungen werden in § 27 ausführlich betrachtet. In einer Reihe von Fällen muß man Systeme von partiellen Differentialgleichungen behandeln. So haben wir es in der Elastizitätstheorie mit einem System von drei Gleichungen zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen zu tun; drei Gleichungen zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten, aber mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen, bestimmen die Verschiebung eines Punktes einer elastischen Schale. Die Zahl solcher Beispiele läßt sich leicht vermehren.

Wir werden uns hier nicht näher mit der Analyse der Randbedingungen befassen, die zu partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung oder zu Systemen solcher Gleichungen gehören, das wäre schwierig und außerdem von geringem praktischem Nutzen. Im folgenden werden von Fall zu Fall die einfachsten Randbedingungen formuliert, die sich zwanglos aus den gestellten Problemen ergeben.

## § 2. Einige Hilfsbegriffe und -formeln

Das *Gebiet*. Wie wir dem Stoff des § 1 entnehmen konnten, ist der Gegenstand der mathematischen Physik das Aufsuchen unbekannter Funktionen, die einer gegebenen (im allgemeinen partiellen), Differentialgleichung genügen sowie ergänzenden Randbedingungen. Diese Funktionen müssen in einem gewissen Gebiet bestimmt werden; dieses Gebiet ist eben, wenn die gesuchte Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen abhängt, und es ist räumlich, wenn die Zahl der unabhängigen Veränderlichen drei beträgt; das Gebiet artet in ein Intervall einer Geraden aus, wenn eine Funktion von nur einer unabhängigen Veränderlichen gesucht wird[1]; in diesem Fall rechnet man die Enden des Intervalls nicht mit zu dem Gebiet. Wenn also etwa das Torsionsproblem für einen prismatischen oder im allgemeinsten Fall für einen zylindrischen Stab zu lösen ist, dann muß die gesuchte „Torsionsfunktion" für ein ebenes Gebiet bestimmt werden, das aus dem normalen Querschnitt des Stabes besteht; dieses Gebiet kann ein Kreis sein, ein

[1]) Hinge die gesuchte Funktion von vier oder mehr unabhängigen Veränderlichen ab, so wäre das Gebiet, in dem diese Funktion zu bestimmen ist, ein entsprechend *mehrdimensionaler* Raum.

Rechteck, ein Kreisring usw., je nach der Form des Stabes. Beim Problem der Plattenbiegung stellt die gesuchte Funktion die Ausbiegung der Platte dar; das Gebiet, in welchem sie bestimmt werden muß, ist der von der Platte herausgeschnittene Teil ihrer Mittelebene. Wenn die Temperaturverteilung in einem ungleichmäßig erwärmten Körper untersucht wird, dann ergibt sich als Gebiet, in welchem die gesuchte Funktion — die Temperatur des Körpers — bestimmt werden muß, dasjenige Raumgebiet, welches von dem erwärmten Körper eingenommen wird.

Nach der allgemeinen Definition ist ein Gebiet eine Punktmenge im Raum, die durch zwei Eigenschaften charakterisiert wird: 1. Wenn ein Punkt $P$ zum Gebiet gehört, dann gehören alle Punkte, die hinreichend nahe bei $P$ liegen, ebenfalls zu dem Gebiet; 2. zwei beliebige Punkte des Gebietes können durch ein ganz im Innern des Gebietes verlaufendes Polygon verbunden werden. Die erste Eigenschaft drückt man aus, indem man sagt, das Gebiet bestehe nur aus *inneren* Punkten, die zweite, indem man sagt, das Gebiet sei *zusammenhängend.*

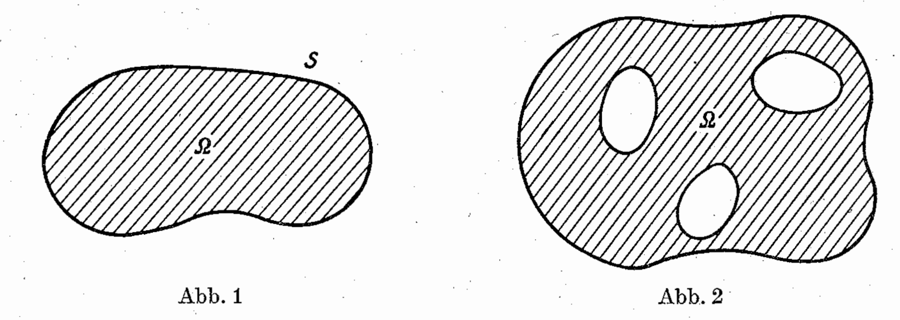



Abb. 1 Abb. 2

Der *Rand* eines Gebietes ist definiert als die Punktmenge mit der Eigenschaft, daß in beliebiger Nähe jedes ihrer Punkte sowohl ein Punkt liegt, der zum Gebiet gehört, als auch einer, der nicht dazu gehört. Aus der Eigenschaft 1 für Gebiete folgt, daß Randpunkte nicht zum Gebiet gehören. Das Gebiet, in welchem die gesuchte Funktion bestimmt werden muß, werden wir im allgemeinen mit dem Buchstaben $\Omega$ bezeichnen, den Rand dieses Gebietes mit dem Buchstaben $S$. Der Rand eines ebenen Gebietes kann eine geschlossene Kurve sein (Abb. 1) oder die Vereinigung mehrerer geschlossener Kurven (Abb. 2), entsprechend kann der Rand eines räumlichen Gebietes aus einer oder mehreren geschlossenen Flächen bestehen.[1]) Für die Ziele des vorliegenden Buches sind die Fälle von Bedeutung, wo die Kurven oder Flächen, die den Rand des Gebietes bilden, entweder glatt sind, d. h. bei Bewegung entlang einer solchen Kurve (oder Fläche) ändert sich ihre Tangente (bzw. ihre Tangentialebene) stetig, oder wenigstens stückweise glatt sind, d. h. aus einer endlichen Zahl glatter Stücke bestehen. Als Beispiel einer geschlossenen glatten Kurve kann der Kreis oder die Ellipse dienen, als Beispiel für eine stückweise glatte Kurve die Kontur eines Vielecks oder eines Halbkreises.

Im einfachsten Falle, wenn die gesuchte Funktion nur von einer Veränderlichen abhängt und das Gebiet in ein Intervall ausartet, besteht der Rand des Gebietes

---

[1]) Wir lassen Fälle, wo der Rand eine kompliziertere Struktur hat, beiseite.

nur aus einer Menge von zwei Punkten, nämlich den Enden des Intervalls. Die Punkte des Gebietes oder ihres Randes werden wir meistens mit den Buchstaben $P$ oder $Q$ bezeichnen.

Wie wir schon sagten, zählt man die Randpunkte nicht mit zum Gebiet. Die Punktmenge, die man erhält, wenn man zu einem Gebiet seinen Rand hinzunimmt, heißt *abgeschlossenes Gebiet*. Man bezeichnet sie gewöhnlich mit demselben Buchstaben, wie das gegebene Gebiet, aber mit einem darübergesetzten Strich, so daß z. B. $\bar{\Omega} = \Omega + S$ ist. Manchmal bezeichnet man ein Gebiet als *offenes Gebiet*, um den Gegensatz zum abgeschlossenen Gebiet auszudrücken. Im folgenden werden wir nur endliche Gebiete betrachten, d. h. solche Gebiete, deren jedes man in eine hinreichend große Kugel einschließen kann. Als Beispiel eines endlichen Gebietes kann das Innere einer Kugel, eines Würfels oder eines Torus dienen, als Beispiel eines unendlichen Gebietes das Äußere der genannten Flächen.

Die *Formel für partielle Integration* bei mehrfachen Integralen erhält man als einfache Folgerung aus der Formel von Ostrogradski (Smirnow [2], Punkt 63). Für Doppelintegrale geht sie in die Greensche Formel (vgl. Smirnow [2], Punkt 69) über. Die Formel von Ostrogradski hat folgendes Aussehen:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) d\Omega = \int_S (\varphi \cos(\nu, x) + \psi \cos(\nu, y) + \omega \cos(\nu, z)\, dS;$$

das Gebiet $\Omega$ wird als dreidimensional vorausgesetzt. Dabei ist $dS$ das Flächenelement der Randfläche $S$ (bzw. das Bogenelement der Randkurve $S$, wenn das Gebiet eben ist), $\nu$ bezeichnet die Außennormale zu $S$. Wenn man $\varphi, \psi, \omega$ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{w}$ auffaßt, kann man der Formel von Ostrogradski die Form

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathfrak{w}\, d\Omega = \int_S w_\nu dS$$

geben, die wir als Vektorform der Formel von Ostrogradski bezeichnen wollen; $w_\nu$ bedeutet die Projektion des Vektors $\mathfrak{w}$ auf die Richtung der äußeren Normale zu $S$. Wir setzen jetzt $\psi = \omega = 0$, $\varphi = uv$. Wenn wir unter dem Integralzeichen differenzieren und einen der Summanden auf die rechte Seite bringen, erhalten wir die Formel für die partielle Integration

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\nu, x)\, dS.$$

Wenn das Gebiet $\Omega$ nicht notwendig dreidimensional, sondern ganz allgemein $m$-dimensional ist, wo $m$ kleiner oder größer als drei sein darf, und wenn die kartesischen Koordinaten mit $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bzeichnet werden, dann kann man die Formel für die partielle Integration im allgemeinen Falle wie folgt schreiben:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\nu, x_i)\, dS. \tag{1}$$

Die Formel für die partielle Integration verwenden wir zur Herleitung der sogenannten GREENschen *Formeln,* die in der mathematischen Physik eine große Rolle spielen. Es seien $u(P)$ und $v(P)$ Funktionen, die zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen im abgeschlossenen Gebiet $\Omega$ stetig, sonst aber willkürlich sind. Es seien ferner $A_{ik}(P)$, $i, k, = 1, 2, \ldots, m$, gegebene Funktionen, die einschließlich ihrer Ableitungen im selben abgeschlossenen Gebiet stetig sind; mit dem Buchstaben $m$ bezeichnen wir wie gewöhnlich die Dimensionszahl des Raumes. Wir nehmen noch an, daß

$$A_{ik}(P) = A_{ki}(P)$$

für beliebige Werte von $i$ und $k$ gilt. Wir betrachten den Differentialausdruck[1])

$$Lu = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)u,$$

wo $C(P)$ eine im abgeschlossenen Gebiet stetige Funktion bedeutet. Wir werden das kurz in der Form

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu. \tag{2}$$

schreiben. Wir bilden das Integral

$$\int_\Omega v \cdot Lu\, d\Omega = -\sum_{i,k=1}^{m}\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Omega + \int_\Omega Cuv\, d\Omega. \tag{3}$$

In Formel (1) ersetzen wir $u$ durch $v$ und $v$ durch $A_{ik}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Wir erhalten dann eine Formel, die wir die *erste* GREENsche *Formel* nennen:

$$\int_\Omega v \cdot Lu\, d\Omega = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega + \int_\Omega Cuv\, d\Omega$$
$$-\int_S v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_i)\, dS. \tag{4}$$

Wenn wir $v(P) \equiv u(P)$ setzen, erhalten wir die *zweite* GREENsche *Formel*

$$\int_\Omega u \cdot Lu\, d\Omega = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\Omega - \int_S u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_i)\, dS. \tag{5}$$

---

[1]) Warum wir in dem Ausdruck $Lu$ das Minuszeichen gesetzt haben, wird in § 24 erklärt.

In der ersten GREENschen Formel vertauschen wir die Buchstaben $u$ und $v$ und subtrahieren das erhaltene Ergebnis von (4):

$$\int_\Omega (vLu - uLv)\,d\Omega = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\} d\Omega$$

$$- \int_S \left\{ v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) - u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) \right\} dS.$$

Wir zeigen, daß das Volumenintegral rechts gleich Null ist. In der zweiten Summe unter dem Integralzeichen schreiben wir $i$ statt $k$ und $k$ statt $i$, was offensichtlich erlaubt ist. Dann hat der Integrand die Gestalt

$$\sum_{i,k=1}^m (A_{ik} - A_{ki}) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} \equiv 0,$$

da $A_{ki} \equiv A_{ik}$ ist. Setzt man jetzt der Kürze halber

$$\sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) = Nu, \tag{6}$$

dann erhält man die *dritte* GREEN*sche Formel*

$$\int_\Omega (vLu - uLv)\,d\Omega = \int_S (uNv - vNu)\,dS. \tag{7}$$

Wir betrachten einen Spezialfall. Es sei

$$A_{ii} = 1; \quad A_{ik} = 0, \quad i \neq k; \quad C = 0.$$

Dann ist $Lu = -\Delta u$ ($\Delta$ ist der LAPLACE-Operator) und $Nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$. Wir erhalten so die GREEN*schen Formeln für den* LAPLACE-*Operator*:

$$-\int_\Omega v\,\Delta u\,d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS, \tag{8}$$

$$-\int_\Omega u\,\Delta u\,d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS, \tag{9}$$

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\Omega = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS. \tag{10}$$

Ähnliche Formeln, die man gewöhnlich ebenfalls als GREENsche Formeln bezeichnet, kann man auch für Differentialoperatoren höherer als zweiter Ordnung aufstellen. Wir werden solche Formeln weiter unten ableiten, soweit das notwendig ist.

## § 3. Das Skalarprodukt von Funktionen

Im gegebenen Gebiet haben wir nicht nur die gesuchte Funktion zu betrachten, sondern auch andere Funktionen, z. B. das freie Glied einer Gleichung, welches bei Elastizitätsproblemen gewöhnlich durch die Art der Belastung bestimmt ist, der der Körper unterworfen ist, die „Koordinatenfunktionen", aus denen wir die Näherungslösung unserer Probleme aufbauen, die Näherungslösung selbst, und viele andere mehr. Für diese Funktionen können wir gewisse einfache Operationen einführen, von denen wir die Operation der *skalaren Multiplikation* zweier Funktionen besonders hervorheben. Wir werden vorläufig voraussetzen, daß die betrachteten Funktionen im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega} = \Omega + S$ stetig sind.

**Definition.** *Als Skalarprodukt zweier Funktionen bezüglich eines gegebenen Gebietes bezeichnen wir das über dieses Gebiet erstreckte Integral über das Produkt dieser Funktionen. Die Operation der Bildung des Skalarproduktes bezeichnet man als skalare Multiplikation der betreffenden Funktionen.*

So ist beispielsweise das Skalarprodukt zweier Funktionen $u(P)$ und $v(P)$ bezüglich des Gebietes $\Omega$ gleich dem Integral

$$\iint_\Omega u(P)\, v(P)\, dx\, dy,$$

wenn $\Omega$ ein ebenes Gebiet, gleich

$$\iiint_\Omega u(P)\, v(P)\, dx\, dy\, dz,$$

wenn $\Omega$ ein räumliches Gebiet ist. Der Kürze wegen werden wir, wie schon im vorigen Paragraphen, die Integration über ein Gebiet $\Omega$ nur durch ein Integralzeichen andeuten, und das Flächen- oder Volumenelement (je nach der Dimension des Gebietes) durch das Symbol $d\Omega$ bezeichnen. Das Skalarprodukt der Funktionen $u(P)$ und $v(P)$ bezeichnet man gewöhnlich durch das Symbol $(u, v)$, so daß

$$(u, v) = \int_\Omega u(P)\, v(P)\, d\Omega \tag{1}$$

gilt.

**Beispiele. 1.** Das Gebiet $\Omega$ sei das Quadrat $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$; $u(P) = x^2 + y^2$, $v(P) = x + y$. Dann ist

$$(u, v) = (x^2 + y^2,\ x + y) = \int_0^1\!\!\int_0^1 (x^2 + y^2)(x + y)\, dx\, dy = \frac{5}{6}.$$

**2.** Das Gebiet $\Omega$ sei die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 < 1$; $u(P) = x^2$, $v(P) = 1$. Dann ist

$$(u, v) = (x^2, 1) = \iiint_\Omega x^2\, dx\, dy\, dz.$$

Zur Berechnung des Integrals führen wir sphärische Koordinaten ein

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi,\quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi,\quad z = r\cos\vartheta,$$

$$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi;$$

man erhält dann

$$(u, v) = \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

**3.** Das Gebiet $\Omega$ sei das Intervall $-1 < x < 1$; $u(P) = x$, $v(P) = 3x^2 - 1$. Hier ist

$$(u, v) = (x, 3x^2 - 1) = \int_{-1}^{1} x(3x^2 - 1)\, dx = 0.$$

Wenn bei einem gegebenen Problem nur ein Gebiet in Frage kommt, so daß es keine Verwechslungen geben kann, dann pflegt man die Wörter „bezüglich des gegebenen Gebietes" in der Definition des Skalarproduktes wegzulassen und spricht schlechthin von dem Skalarprodukt zweier Funktionen.

Wir vermerken noch einige einfache, aber sehr wichtige Eigenschaften des Skalarproduktes, auf die wir uns im folgenden oft berufen werden.

A. *Das Skalarprodukt ändert sich nicht bei Vertauschung der Faktoren, so daß*

$$(u, v) = (v, u) \tag{2}$$

*gilt.*

Diese Eigenschaft folgt sofort aus Formel (1).

B. *Wenn die Faktoren sich aus mehreren Summanden zusammensetzen, kann man das Skalarprodukt nach der gewöhnlichen Multiplikationsregel für mehrgliedrige Ausdrücke berechnen, wobei konstante Faktoren vor das Symbol für die skalare Multiplikation gezogen werden können.*

Wenn also $a_1, a_2, b_1, b_2$ konstante Zahlen sind, dann ist

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, b_1 v_1 + b_2 v_2) = a_1 b_1 (u_1, v_1) + a_1 b_2 (u_1, v_2) + a_2 b_1 (u_2, v_1) + a_2 b_2 (u_2, v_2). \tag{3}$$

Der Beweis ist sehr einfach. Nach der Definition des Skalarproduktes ist nämlich

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, b_1 v_1 + b_2 v_2) = \int_\Omega [a_1 u_1(P) + a_2 u_2(P)]\,[b_1 v_1(P) + b_2 v_2(P)]\, d\Omega.$$

Wir lösen die Klammern unter dem Integral auf und integrieren gliedweise. Das ergibt

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, b_1 v_1 + b_2 v_2) = a_1 b_1 \int_\Omega u_1(P)\, v_1(P)\, d\Omega + a_1 b_2 \int_\Omega u_1(P)\, v_2(P)\, d\Omega + a_2 b_1 \int_\Omega u_2(P)\, v_1(P)\, d\Omega + a_2 b_2 \int_\Omega u_2(P)\, v_2(P)\, d\Omega.$$

Wegen Formel (1) fällt die rechte Seite der letzten Gleichung mit der rechten Seite von Formel (3) zusammen, welche damit bewiesen ist.

C. *Das Skalarprodukt einer beliebigen Funktion mit sich selbst ist nicht negativ.* In der Tat ist

$$(u, u) = \int_\Omega u^2(P)\, d\Omega \geq 0. \tag{4}$$

D. *Das Skalarprodukt einer Funktion mit sich selbst verschwindet dann nnd nur dann, wenn die Funktion identisch gleich Null ist.* Diese Eigenschaft des Skalarproduktes ergibt sich unmittelbar aus der Beziehung (4).

Das Skalarprodukt von Funktionen ist dem aus der Vektorrechnung wohlbekannten Skalarprodukt von Vektoren sehr ähnlich, welches die Eigenschaften A bis D offensichtlich besitzt.

Diese Analogie legt es nahe, noch einen weiteren Begriff, analog der Länge eines Vektors, einzuführen. Wir erinnern daran, daß die Länge eines Vektors $\mathfrak{A}$ mit Hilfe des Skalarproduktes nach der Formel

$$|\mathfrak{A}| = \sqrt{(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})}$$

ausgedrückt werden kann. Wir bezeichnen als *Norm* einer Funktion die Quadratwurzel aus dem Skalarprodukt dieser Funktion mit sich selbst. Die Norm einer Funktion $u(P)$ bezeichnet man gewöhnlich mit dem Symbol $\|u\|$, so daß

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{5}$$

oder, nach Formel (4),

$$\|u\| = \sqrt{\int_\Omega u^2(P)\, d\Omega} \tag{6}$$

gilt.

Wir geben die einfachsten Eigenschaften der Norm an; sie ergeben sich leicht aus der Definition der Norm und den Eigenschaften A bis D des Skalarproduktes.

a) *Die Norm einer Funktion ist dann und nur dann gleich Null, wenn die Funktion identisch verschwindet.* Diese Eigenschaft der Norm ist eine einfache Abwandlung der Eigenschaft D des Skalarproduktes.

b) Es gilt

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|; \qquad a = \text{const.} \tag{7}$$

Denn nach Formel (3) ist

$$(au, au) = a^2(u, u).$$

Zieht man die Wurzel, so erhält man (7).

Bevor wir die nächste Eigenschaft der Norm formulieren, erinnern wir daran, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren durch die Formel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot \cos\alpha$ definiert wird, wo $\alpha$ der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Da $|\cos\alpha| \leq 1$ ist, so besteht zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und ihrer Länge die Ungleichung

$$|(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})| \leq |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|.$$

Eine analoge Ungleichung gilt auch für Funktionen, nämlich

c) $$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \tag{8}$$

Zum Beweis wählen wir eine willkürliche reelle Zahl $\lambda$ und bilden die Funktion $u(P) + \lambda \cdot v(P)$. Nach der Eigenschaft D des skalaren Produktes ist

$$(u + \lambda v, u + \lambda v) \geq 0.$$

Wenn man die Klammern nach Formel (3) auflöst, kommt man zu folgender Ungleichung:

$$(u, u) + 2\lambda(u, v) + \lambda^2(v, v) \geq 0; \tag{9}$$

dabei haben wir die Eigenschaft A benutzt, nach der $(u, v) = (v, u)$ ist.

Die linke Seite der Ungleichung (9) ist eine quadratische Gleichung bezüglich $\lambda$, dessen sämtliche Werte nicht negativ sind. Daraus folgt, daß seine Diskriminante kleiner oder gleich Null ist:

$$(u, v)^2 - (u, u)(v, v) \leq 0$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)}\,\sqrt{(v, v)}.$$

Die letzte Ungleichung fällt wegen der Definition der Norm mit der Ungleichung (8) zusammen. Wenn man an die Definition des Skalarproduktes und der Norm zurückdenkt, dann kann man die Ungleichung (8) in der gebräuchlicheren Fassung

$$\left(\int_\Omega u(P)\, v(P)\, d\Omega\right)^2 \leq \int_\Omega u^2(P)\, d\Omega \int_\Omega v^2(P)\, d\Omega \tag{$8_1$}$$

schreiben. Die Ungleichung ($8_1$) wurde zuerst von Bunjakowski aufgestellt und trägt seinen Namen. Noch früher war eine analoge Ungleichung für Summen (ob es sich dabei um endliche oder unendliche Summen handelte, ist gleichgültig) von Cauchy aufgestellt worden. Die Cauchysche Ungleichung hat die Form

$$(\sum a_k b_k)^2 \leq \sum a_k^2 \sum b_k^2. \tag{$8_2$}$$

Die Ungleichung (8) werden wir *Cauchy-Bunjakowskische Ungleichung* nennen.

**Beispiel.** Es sei $\Omega$ das Intervall $0 < x < 1$, $u = x$, $v = x^2$. Dann ist

$$(u, v) = \int_0^1 x^3\, dx = 0{,}25;$$

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 x^2\, dx} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\|v\| = \sqrt{\int_0^1 x^4\, dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

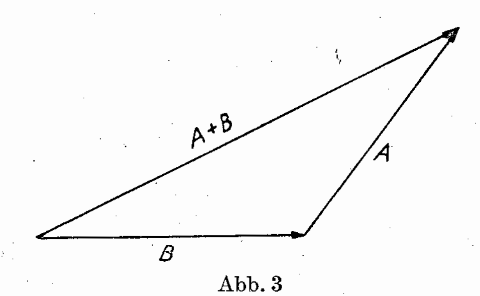


Abb. 3

und offensichtlich

$$0{,}25 < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}258\ldots.$$

Wir kommen nun zur vierten Grundeigenschaft der Norm und bemerken, daß sie ebenfalls ein einfaches Analogon in der Vektorrechnung hat. Es seien zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben. Zusammen mit ihrer Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ bilden sie ein Dreieck (Abb. 3) und daher ist $|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}|$. Die analoge Eigenschaft besitzt auch die Norm:

d) *Die Norm einer Summe von Funktionen übersteigt nicht die Summe der Normen der einzelnen Summanden:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{10}$$

Zum Beweis betrachten wir die Größe

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v).$$

Auflösung der Klammern ergibt

$$\|u + v\|^2 = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2.$$

Nach der CAUCHY-BUNJAKOWSKIschen Ungleichung ist $(u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Setzt man das in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

was gleichbedeutend mit der Beziehung (10) ist.

Die Ungleichung (10) heißt *Dreiecksungleichung*.

**Beispiel.** Es sei wie vorher $\Omega$ das Intervall $0 < x < 1$, $u = x$, $v = x^2$. Wie wir gesehen haben, ist $\|u\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\|v\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ferner ist

$$\|u + v\| = \sqrt{\int_0^1 (x + x^2)^2\, dx} = \frac{1}{30}\sqrt{930} = 1{,}0165\ldots$$

und offensichtlich auch

$$\|u + v\| < \|u\| + \|v\| = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 1{,}0246\ldots.$$

In vielen Fällen haben die zu behandelnden Funktionen Vektorcharakter. So spielt in Problemen der Elastizitätstheorie der Vektor der Verschiebungen eine wichtige Rolle, bei hydrodynamischen Problemen der Geschwindigkeitsvektor eines sich bewegenden Teilchens. In beiden Fällen hat man es mit Vektoren zu tun, die von den Koordinaten eines veränderlichen Punktes abhängen, oder kürzer mit Vektorfunktionen eines Punktes. Es seien $\mathfrak{u}(P)$ und $\mathfrak{v}(P)$ zwei solche Vektorfunktionen, die im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ stetig sind; ihre Komponenten bezüglich der Koordinatenachsen bezeichnen wir mit $u_x, u_y, u_z$ und $v_x, v_y, v_z$. Als Skalarprodukt der Vektorfunktionen $\mathfrak{u}(P)$ und $\mathfrak{v}(P)$ bezeichnet man das Integral

$$(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \int_\Omega \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}\, d\Omega, \tag{11}$$

wo $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}$ das „gewöhnliche" Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ist:

$$\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z,$$

so daß ausführlicher

$$(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, d\Omega \tag{11_1}$$

gilt.

Die Norm einer Vektorfunktion wird in Übereinstimmung mit Formel (5) durch die Gleichung

$$\|\mathfrak{u}\|^2 = (\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\Omega \tag{12}$$

definiert, der man auch die Gestalt

$$\|\mathfrak{u}\|^2 = \int_{\Omega} |\mathfrak{u}|^2\, d\Omega \tag{12_1}$$

geben kann.

Das Skalarprodukt und die Norm von Vektorfunktionen besitzen die oben aufgezählten Eigenschaften A bis D und a) bis d). Den Beweis überlassen wir dem Leser.

Im vorhergehenden haben wir angenommen, daß die betrachteten Funktionen im abgeschlossenen Gebiet stetig sind. Jedoch oft hat man auch unstetige Funktionen zu betrachten; von besonderem Interesse ist die Klasse der Funktionen, die im Innern eines Gebietes stetig, aber auf seinem Rand unstetig sind, z. B. bei Annäherung an einen gewissen Punkt des Randes unendlich werden. Wir werden annehmen, daß die uns interessierenden Funktionen im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ stetig sind mit Ausnahme gewisser Punkte, Linien und Flächen; dabei werden wir Unstetigkeiten nur so voraussetzen, daß das Integral[1]) über das Quadrat der betrachteten Funktionen existiert. Wenn $u(P)$ und $v(P)$ zwei solche Funktionen sind, daß die Integrale

$$\int_{\Omega} u^2(P)\, d\Omega, \qquad \int_{\Omega} v^2(P)\, d\Omega$$

existieren, dann existiert, wie man zeigen kann, auch das Integral

$$\int_{\Omega} u(P)\, v(P)\, d\Omega.$$

Für Funktionen der von uns hervorgehobenen Klasse behalten wir die Definition des Skalarproduktes und der Norm entsprechend den Formeln (1) und (5) bei. Die Eigenschaften A bis D des Skalarproduktes und die Eigenschaften a) bis d) der Norm bleiben dabei offensichtlich erhalten.

## § 4. Die Begriffe des Operators und des Funktionals

Die Gleichungen der mathematischen Physik, die in § 1 betrachtet wurden, haben wir so geschrieben, daß auf der rechten Seite der Gleichung eine bekannte Funktion (als Spezialfall die Null) stand, während die linke Seite einen Ausdruck

[1]) Verstanden als uneigentliches Integral im Riemannschen Sinne (siehe Smirnow [1], Punkt 116 und [2], Punkt 82). Der Leser, der mit den Grundlagen der Theorie des Lebesgueschen Integrals vertraut ist, mag annehmen, daß es sich um Funktionen handelt, die in dem gegebenen Gebiet quadratisch integrabel im Lebesgueschen Sinne sind.

enthielt, der sich aus der gesuchten Funktion nach Ausführung gewisser Operationen — Addition, Multiplikation, Differentiation usw. — ergab, wobei das Ergebnis dieser auf die gesuchte Funktion angewandten Operationen wieder eine gewisse Funktion ist. Für die Lösung der Aufgaben der mathematischen Physik ist die Untersuchung der Eigenschaften der erwähnten Ausdrücke besonders wichtig; dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Operationen nicht nur auf die gesuchte Funktion des gegebenen Problems zu beschränken, sondern die Ergebnisse der besagten Operationen auch für mehr oder weniger willkürliche Funktionen zu betrachten. Das Gesagte führt zu dem für alles folgende grundlegenden Begriff des Operators, welchen wir wie folgt definieren:

Wir wollen sagen, daß *auf einer Menge von Funktionen ein Operator definiert sei, wenn eine Vorschrift gegeben ist, auf Grund welcher jeder Funktion der gegebenen Menge eine und nur eine Funktion zugeordnet ist.*

Wie man sieht, stimmt die Definition des Operators im wesentlichen mit der Definition der Funktion überein (siehe Smirnow [1], Punkt 5).

Wir werden manchmal sagen, ein Operator *wirke* auf die Funktionen der Menge, auf der er definiert ist. Diese Menge heißt *Definitionsbereich* des Operators; die Funktionen, welche der Operator den Funktionen seines Definitionsbereiches zuordnet, heißen *Werte* des Operators; die Gesamtheit aller Werte des Operators heißt sein *Wertebereich*. Die Funktionen, die zum Definitionsbereich oder zum Wertebereich eines gewissen Operators gehören, werden oft *Elemente* des entsprechenden Bereiches genannt.

Einen Operator bezeichnet man im allgemeinen mit einem Buchstaben, zu dem man häufig die Bezeichnung der Funktionen hinzufügt, auf welche der Operator wirkt. So bedeutet z. B. das Symbol $Au$, daß der Operator $A$ auf die Funktion $u = u(P)$ seines Definitionsbereiches wirkt.

Der Definitionsbereich eines Operators $A$ soll mit $D_A$, sein Wertebereich mit $R_A$, bezeichnet werden.

Ein für das folgende wichtiges Beispiel stellt der Laplace-*Operator*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

dar, wo $x, y, z$ die kartesischen Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raum sind; im allgemeinen Fall, im $m$-dimensionalen Raum mit den kartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ hat der Laplace-Operator die Gestalt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}.$$

Definitionsbereich des Laplace-Operators ist die Gesamtheit der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen. In einer Reihe von Fällen ist es jedoch zweckmäßig, den Laplace-Operator mit einem engeren Definitionsbereich zu betrachten. Wenn wir etwa eine Lösung für die Poissonsche Gleichung

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

suchen, welche der Randbedingung

$$u|_S = 0$$

genügt, dann ist es zweckmäßig, den Operator $\Delta$ von Anfang an nicht für alle möglichen Funktionen zu betrachten, sondern nur für diejenigen, welche auf dem Rand des Gebietes verschwinden. In anderen Fällen verfährt man entsprechend: Wenn die gesuchte Funktion der Randbedingung des NEUMANNschen Problems,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0,$$

genügen soll, so wird man als Definitionsbereich des LAPLACE-Operators diejenigen Funktionen nehmen, deren Normalableitung auf dem Rand des Gebietes verschwindet.

Im folgenden werden wir Operatoren, die auf verschiedenen Funktionenmengen definiert sind, als verschieden betrachten, selbst wenn dabei die Operationen, denen die Funktionen unterworfen werden, dieselben sein sollten. So werden wir die folgenden beiden Operatoren als verschieden ansehen: einmal den LAPLACE-Operator, definiert auf allen zweimal differenzierbaren Funktionen, und zum andern den LAPLACE-Operator, definiert auf allen denjenigen zweimal differenzierbaren Funktionen, die außerdem auf dem Rand des Gebietes verschwinden.

Der LAPLACE-Operator gehört zu den *Differentialoperatoren*; das sind solche Operatoren, die die Operation des Differenzierens enthalten. In der mathematischen Physik spielen auch *Integraloperatoren* eine Rolle, die also die Operation des Integrierens enthalten; seltener kommen *Integrodifferentialoperatoren* vor. Einer der einfachsten Integraloperatoren ist der FREDHOLM*sche Operator*

$$Ku = \int_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q,$$

wo $K(P, Q)$ eine gegebene Funktion der beiden Punkte $P$ und $Q$ ist, welche gewissen Regularitätsforderungen genügt; man kann z. B. fordern, daß die Funktion $K(P, Q)$, der sogenannte *Kern* des Integraloperators, im abgeschlossenen Gebiet $\Omega$ stetig von den Punkten $P$ und $Q$ abhängt.

Mit den genannten drei Klassen ist die Gesamtheit aller möglichen Operatoren natürlich keineswegs erschöpft.

Ein Operator, welcher jede Funktion sich selbst zuordnet, heißt der *identische Operator*. Wir werden ihn mit dem Buchstaben $E$ bezeichnen, so daß $Eu \equiv u(P)$ für jede beliebige Funktion $u(P)$ ist. Ein Operator, der jeder Funktion die identisch verschwindende Funktion zuordnet, heißt *Nulloperator* oder *annullierender Operator*.

Die Summe $A + B$ und das Produkt $AB$ bezeichnen Operatoren, die durch die Formeln

$$(A + B)\, u = Au + Bu, \quad ABu = A(Bu)$$

definiert werden. Als Definitionsbereich der Operatoren $A + B$ und $AB$ nimmt man die Menge der Funktionen, für welche die rechten Seiten der letzten Gleichungen Sinn haben. Es ist offensichtlich $A + B = B + A$, aber im allgemeinen $AB \neq BA$. Wenn $AB = BA$ ist, dann heißen die Operatoren $A$ und $B$ *vertauschbar*. Wenn die Operatoren $A$ und $B$ die Eigenschaft haben, daß für beliebige

Funktionen $u \in D_A$[1]) und $v \in D_B$ die Identitäten

$$BAu \equiv u, \quad ABv \equiv v$$

gelten, dann heißt jeder der Operatoren $A$ und $B$ *invers* in bezug auf den anderen. Man schreibt in diesem Falle $B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$.

Bei den linearen Aufgaben der mathematischen Physik, mit welchen wir uns jetzt ausschließlich beschäftigen werden, spielt der Begriff des *linearen Operators* eine besonders wichtige Rolle. Um ihn zu definieren, führen wir als Vorbereitung den Begriff der *linearen Funktionenmenge* ein:

*Eine Menge von Funktionen wird linear genannt, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt: Wenn die Funktionen $u$ und $v$ zu der gegebenen Menge gehören, dann gehören auch die Funktionen $u + v$ und $a \cdot u$ dazu, wo $a$ eine beliebige Konstante ist.* Eine lineare Menge nennen wir *Lineal*[2]).

Einfache Beispiele linearer Funktionenmengen[3]) sind: 1. die Menge aller Funktionen, 2. die Menge aller stetigen Funktionen, 3. die Menge aller Polynome, 4. die Menge aller Polynome, deren Grad nicht höher als ein gegebener ist, 5. die Menge aller Funktionen, die auf dem Rand eines Gebietes gleich Null sind. Die Zahl dieser Beispiele läßt sich leicht vermehren.

Wir bringen noch ein weniger einfaches Beispiel: Als linear erweist sich die Menge aller in einem gegebenen Gebiet $\Omega$ definierten Funktionen, für die die Integrale über die Quadrate der Funktionen existieren. Es mögen nämlich $u(P)$ und $v(P)$ die Eigenschaft haben, daß die Integrale

$$\int_\Omega u^2(P)\, d\Omega, \quad \int_\Omega v^2(P)\, d\Omega$$

existieren. Wenn $a$ eine Konstante ist, dann kommt dieselbe Eigenschaft auch der Funktion $a \cdot u(P)$ zu, da

$$\int_\Omega (au)^2\, d\Omega = a^2 \int_\Omega u^2\, d\Omega$$

gilt. Ferner folgt aus der Ungleichung[4])

$$(u + v)^2 \leq 2(u^2 + v^2),$$

daß $\int_\Omega (u + v)^2\, d\Omega$ existiert, wobei

$$\int_\Omega (u + v)^2\, d\Omega \leq 2 \int_\Omega u^2\, d\Omega + 2 \int_\Omega v^2\, d\Omega$$

ist.

---

[1]) Das Symbol $\in$ ersetzt die Worte „ist enthalten in". Die Formel $u \in D_A$ bedeutet demnach, daß die Funktion $u$ in dem Definitionsbereich des Operators $A$ enthalten ist (zu ihm dazugehört).

[2]) In der deutschen Literatur ist an Stelle von *Lineal* der Begriff *lineare Mannigfaltigkeit* gebräuchlich. Der Kürze wegen soll jedoch die in der sowjetischen Literatur übliche Bezeichnung Lineal verwendet werden (Anm. d. Red.).

[3]) In jedem der unten aufgezählten Beispiele handelt es sich um Funktionen, die in ein und demselben Gebiet definiert sind.

[4]) Es ist nämlich $(u + v)^2 \leq (u + v)^2 + (u - v)^2 \leq 2(u^2 + v^2)$.

Wir bringen einige Beispiele für nichtlineare Mengen. Eine solche ist z. B. die Menge aller Funktionen, die der Ungleichung

$$|u(P)| < C \tag{1}$$

genügen, wo $C$ eine positive Konstante ist. Wenn nämlich die Funktion $u(P)$ im Punkt $P_0$ von Null verschieden ist, dann erfüllt die Funktion $a \cdot u(P)$ bei $a = \frac{2C}{u(P_0)}$ die Bedingung (1) schon nicht, da dort $|au(P_0)| = 2C > C$ ist. Als weiteres Beispiel kann die Menge aller Funktionen dienen, die in einem festen Punkt eines Gebietes ungleich Null sind.

Wir erwähnen zwei offenkundige Eigenschaften einer linearen Menge: 1. Eine beliebige lineare Funktionenmenge enthält die identisch verschwindende Funktion; 2. wenn eine lineare Menge die Funktionen $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$ enthält und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige Konstanten sind, dann enthält diese Menge auch die Funktion

$$a_1 u_1(P) + a_2 u_2(P) + \cdots + a_n u_n(P).$$

Wir geben jetzt die Definition eines linearen Operators. *Ein Operator $A$ heißt linear, wenn sein Definitionsbereich eine lineare Menge ist und wenn die Gleichung*

$$A(a_1 u_2 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n) = a_1 A u_1 + a_2 A u_2 + \cdots + a_n A u_n \tag{2}$$

*für eine beliebige natürliche Zahl $n$, für beliebige Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und für beliebige Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ aus dem Definitionsbereich des Operators $A$ gilt.*

Es ist leicht zu sehen, daß jeder der Differentialoperatoren, der in den Gleichungen des § 1 links steht, linear ist, wenn er auf einer linearen Menge gegeben ist; so ist der LAPLACE-Operator linear bei Anwendung auf Funktionen, die stetige erste und zweite Ableitungen im Innern eines Gebietes besitzen, und die auf dem Rand des Gebietes verschwinden. Linear sind auch der identische und der Nulloperator.

Wenn wir in der Gleichung (2) $n = 1$ und $a_1 = 0$ setzen, dann erhalten wir $AO = 0$. Also ordnet jeder lineare Operator der identisch verschwindenden Funktion wieder die identisch verschwindende Funktion zu.

Es kann vorkommen, daß ein Operator jeder Funktion seines Definitionsbereiches eine Funktion zuordnet, die identisch konstant ist. Derartige Operatoren heißen *Funktionale*. Nach Definition ordnet also ein Funktional jeder Funktion eine gewisse Konstante zu. Eins der einfachsten Beispiele eines Funktionals stellt das Skalarprodukt dar: Wenn die Funktion $v(P)$ festgehalten wird, dann ist das Skalarprodukt $(u, v)$ ein Funktional über $u(P)$. Umgekehrt ist $(u, v)$ ein Funktional über $v(P)$, wenn $u(P)$ festgehalten wird. Ein anderes einfaches Beispiel eines Funktionals bildet die Norm einer Funktion.

In Übereinstimmung mit der allgemeinen Definition eines linearen Operators heißt ein Funktional $l$ *linear*, wenn sein Definitionsbereich ein Lineal ist, und wenn

$$l(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n) = a_1 l u_1 + a_2 l u_2 + \cdots + a_n l u_n$$

gilt, wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Konstanten und $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Funktionen aus dem Definitionsbereich des Funktionals $l$ sind. Hält man die Funktionen $v$ fest, dann ist das Skalarprodukt $(u, v)$ ein lineares Funktional bezüglich $u$.

Eine bedeutende Rolle werden im folgenden Funktionale der Form

$$F(u) = (Au, u) + lu + C \tag{3}$$

spielen, wo $A$ ein linearer Operator, $l$ ein lineares Funktional und $C$ eine Konstante ist. Solche Funktionale bezeichnet man als *quadratisch.*

## § 5. Symmetrische Operatoren

Wir unterwerfen jetzt die Operatoren, die wir im folgenden untersuchen werden, einer wesentlichen Beschränkung. Und zwar werden wir, wenn wir über Differentialoperatoren sprechen, fordern, daß die zu ihrem Definitionsbereich gehörenden Funktionen *im abgeschlossenen Gebiet stetig sind, und daß die Werte des Operators eine endliche Norm haben.* Für Integraloperatoren läßt sich die erste Forderung abschwächen, und wir werden nur annehmen, daß sowohl die Funktionen, die zum Definitionsbereich, als auch die, die zum Wertebereich gehören, eine endliche Norm haben. Durch diese Forderungen wird die Klasse der Funktionen eingeengt, auf welche der gegebene Operator wirken kann. Sei z. B. $\Omega$ das Intervall $0 < x < 1$ der $x$-Achse, und sei $A$ der Operator der zweimaligen Differentiation

$$Au = \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Die Funktion $u_1 = \frac{1}{x}$ liegt nicht im Definitionsbereich unseres Operators, da sie bei $x = 0$ unstetig ist. Die Funktion $u_2 = x \cdot \ln x$ ist bei $x = 0$ stetig, doch liegt sie ebenfalls nicht im Definitionsbereich unseres Operators, da sein Wert $Au_2 = \frac{d^2 u_2}{dx^2} = \frac{1}{x}$ eine unendliche Norm hat. Die Funktion $u_3 = x^2 \ln x$ gehört zum Definitionsbereich des Operators der zweifachen Differentiation. Die Funktion ist nämlich stetig, außerdem ist der Wert des Operators für die Funktion $u_3$ durch die Funktion $\frac{d^2 u_3}{dx^2} = 2 \ln x + 3$ gegeben, die zwar auch bei $x = 0$ unstetig ist, aber die endliche Norm

$$\left\| \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right\| = \left\{ \int_0^1 (2 \ln x + 3)^2 \right\}^{1/2} = \sqrt{5}$$

hat.

*Ein linearer Operator $A$ heißt symmetrisch, wenn für zwei beliebige Funktionen $u$ und $v$ aus seinem Definitionsbereich die Identität*

$$(Au, v) = (u, Av)$$

*gilt.* Ein ganz einfaches Beispiel für einen symmetrischen Operator ist der Fredholmsche Operator

$$Ku = \int_\Omega K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q,$$

wenn sein Kern der *Symmetriebedingung*

$$K(P, Q) = K(Q, P)$$

genügt. Denn mit der Bezeichnung $Ku = w$ hat man

$$(Ku, v) = (w, v) = \int_\Omega v(P)\, w(P)\, d\Omega_P = \int_\Omega v(P)\, d\Omega_P \int_\Omega K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q$$

oder, wenn man die Reihenfolge der Integrationen vertauscht,

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(Q)\, d\Omega_Q \int_\Omega K(P, Q)\, v(P)\, d\Omega_P.$$

Wir ersetzen $P$ durch $Q$ und umgekehrt. Das liefert

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(P)\, d\Omega_P \int_\Omega K(Q, P)\, v(Q)\, d\Omega_Q$$

oder, wenn man die Symmetriebedingung für den Kern benutzt,

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(P)\, d\Omega_P \int_\Omega K(P, Q)\, v(Q)\, d\Omega_Q = (u, Kv).$$

Für uns sind jedoch *symmetrische Differentialoperatoren* von größerem Interesse; wir sehen uns einige Beispiele solcher Operatoren an.

Es sei $\Omega$ das Intervall $0 < x < 1$ und $A$ der Operator der zweimaligen Differentiation, mit einem Minuszeichen genommen: $Au = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$; den Definitionsbereich $D_A$ dieses Operators mögen alle Funktionen bilden, die im abgeschlossenen Intervall stetig sind und in diesem Intervall eine stetige erste und zweite Ableitung haben. Der Operator $A$ ist unsymmetrisch. Es ist nämlich

$$(Au, v) - (u, Av) = -\int_0^1 \left(v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2}\right) dx.$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)$$

gilt; daher ist

$$(Au, v) - (u, Av) = -(vu' - uv')\big|_0^1.$$

Im allgemeinen ist die rechte Seite der letzten Gleichung von Null verschieden[1]) und demnach $(Au, v) \neq (u, Av)$.

Wir betrachten ein anderes Beispiel. Möge $B$ wieder den mit negativem Zeichen genommenen Operator der zweimaligen Differentiation bedeuten, aber mit einem

[1]) Wenn z. B. $u = x$, $v = x^2$ ist, dann ist $(vu' - uv')\big|_0^1 = -x^2\big|_0^1 = -1$.

engeren Definitionsbereich. Wir nehmen an, daß dieser Bereich nur solche Funktionen enthält, welche bei $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden, aber sonst denselben Bedingungen unterworfen sind, wie im vorigen Beispiel. Wenn die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ zum Definitionsbereich des Operators $B$ gehören, dann ist

$$u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$$

und

$$(Bu, v) - (u, Bv) = -\int_0^1 \left(v \frac{d^2 u}{dx^2} - u \frac{d^2 v}{dx^2}\right) dx = -(vu' - uv')\big|_0^1 = 0.$$

Daraus folgt die Symmetrie des Operators $B$.

Möge $C$ den mit negativem Vorzeichen genommenen Operator der zweimaligen Differentiation bezeichnen, dessen Definitionsbereich aus den Funktionen besteht, die am Rande den Bedingungen ($\alpha$ und $\beta$ sind gegebene Zahlen)

$$u'(0) + \alpha u(0) = 0, \quad u'(1) + \beta u'(1) = 0$$

genügen. Wir beweisen die Symmetrie dieses Operators. Wie zuvor ist

$$(Cu, v) - (u, Cv) = -\int_0^1 \left(v \frac{d^2 u}{dx^2} - u \frac{d^2 v}{dx^2}\right) dx = -(vu' - uv')\big|_0^1$$

oder ausführlicher

$$(Cu, v) - (u, Cv) = [u(1)\, v'(1) - v(1)\, u'(1)] - [u(0)\, v'(0) - v(0)\, u'(0)]. \quad (2)$$

Wir zeigen, daß jede der Klammern rechts gleich Null ist. Die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gehören beide zum Definitionsbereich des Operators $C$ und erfüllen deshalb bei $x = 1$ die Randbedingung

$$u'(1) + \beta u(1) = 0, \quad v'(1) + \beta v(1) = 0.$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit $v(1)$, die zweite mit $u(1)$. Subtraktion ergibt

$$u(1)\, v'(1) - v(1)\, u'(1) = 0.$$

Analog zeigt man, daß die zweite Klammer in (2) gleich Null ist. Dann ist $(Cu, v) = (u, Cv)$, und die Symmetrie des Operators ist bewiesen.

Es ist offensichtlich, daß der identische Operator und der Nulloperator symmetrisch sind.

Wie man unschwer sieht, ist die Summe symmetrischer Operatoren wieder ein symmetrischer Operator; was das Produkt symmetrischer Operatoren angeht, so ist es symmetrisch, wenn die zu multiplizierenden Operatoren vertauschbar sind. Denn wenn $A$ und $B$ symmetrische Operatoren sind, erhält man durch zweimalige Anwendung der Formel (1)

$$(ABu, v) = (Bu, Av) = (u, BAv).$$

Wenn $A$ und $B$ vertauschbare Operatoren sind, dann ist $AB = BA$. Setzt man das in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$(A\,Bu, v) = (u, A\,Bv),$$

woraus die Symmetrie des Produktes $AB$ folgt.

Wir zeigen schließlich, daß ein zu einem symmetrischen inverser Operator ebenfalls symmetrisch ist. Der symmetrische Operator $A$ habe den inversen Operator $A^{-1}$. Wenn $u \in D_A$ und $v \in D_A$, dann ist nach Formel (1)

$$(Au, v) = (u, Av).$$

Es seien $f$ und $g$ beliebige Elemente aus dem Definitionsbereich $D_{A^{-1}}$ des inversen Operators. Wir setzen $u = A^{-1}f$, $v = A^{-1}g$, dann ist $Au = f$, $Av = g$. Das in die letzte Gleichung eingesetzt, ergibt

$$(f, A^{-1}g) = (A^{-1}f, g),$$

was die Symmetrie des Operators $A^{-1}$ sichert.

Wir erläutern die letzte Feststellung an einem Beispiel. Wir bilden einen Operator, der zu dem Operator $B$ dieses Paragraphen invers ist. Anders ausgedrückt, wir suchen eine Funktion aus dem Definitionsbereich $D_B$ des Operators $B$, die der Gleichung $Bu = f(x)$ genügt, wo $f(x)$ eine willkürliche, sagen wir stetige Funktion ist.

Gemäß der Definition des Operators $B$ können wir die Gleichung $Bu = f(x)$ in der Form

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \tag{3}$$

schreiben; aber $u \in D_B$ bedeutet außerdem, daß

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{4}$$

gelten muß. Der Operator $B^{-1}f$ bedeutet also: Die Gleichung (3) ist mit den Randbedingungen (4) zu integrieren. Zweimalige Integration von (3) ergibt

$$u(x) = -\int_0^x ds \int_0^s f(t)\,dt + C_1x + C_2.$$

Die Bedingung $u(0) = 0$ ergibt sofort $C_2 = 0$, folglich ist

$$u(x) = -\int_0^x ds \int_0^s f(t)\,dt + C_1x.$$

Wenn wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen, erhalten wir die DIRICHLETsche Formel (SMIRNOW [2], Punkt 79)

$$u(x) = -\int_0^x f(t)\,dt \int_t^x ds + C_1x = -\int_0^x (x-t)f(t)\,dt + C_1x.$$

Aus der zweiten Randbedingung $u(1) = 0$ bekommen wir

$$C_1 = \int_0^1 (1 - t) f(t)\, dt.$$

Wir bringen das in die Form

$$C_1 = \int_0^x (1 - t) f(t)\, dt + \int_x^1 (1 - t) f(t)\, dt.$$

Indem wir dies in den Ausdruck für $u(x)$ einsetzen und die Integrale mit gleichen Grenzen zusammenfassen, finden wir

$$u(x) = B^{-1} f = \int_0^x t(1 - x) f(t)\, dt + \int_x^1 x(1 - t) f(t)\, dt.$$

Wir führen den Kern $K(x, t)$ ein, der durch die Formel

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1 - t),\ x \leq t, \\ t(1 - x),\ x \geq t \end{cases}$$

definiert ist. Dieser Kern ist offensichtlich symmetrisch. Mit seiner Hilfe kann man den Operator $B^{-1}$ in der Form

$$B^{-1} f = \int_0^1 K(x, t)\, f(t)\, dt$$

darstellen. Also ist $B^{-1}$ ein Integraloperator mit symmetrischem Kern und deshalb selber symmetrisch, wie es wegen des oben bewiesenen allgemeinen Satzes auch sein muß.

Das eben untersuchte Beispiel ist auch noch in der Hinsicht interessant, daß es auf die Bedeutung der Integraloperatoren in der mathematischen Physik hinweist: Sie können als zu Differentialoperatoren inverse auftreten, anders ausgedrückt, sie treten im Ergebnis der Lösung der Differentialgleichungen der mathematischen Physik auf.

## § 6. Positive und positiv-definite Operatoren

*Ein symmetrischer Operator $A$ wird positiv genannt, wenn für eine beliebige nicht identisch verschwindende Funktion $u(P)$ seines Definitionsbereiches die Ungleichung*

$$(Au, u) > 0 \tag{0}$$

*gilt.*

Wenn $u(P) \equiv 0$ ist, dann ist offensichtlich $(Au, u) = 0$, deshalb kann man die eben gegebene Definition wie folgt abändern: Ein symmetrischer Operator heißt positiv, wenn für eine beliebige Funktion $u(P)$ seines Definitionsbereiches die Ungleichung

$$(Au, u) \geq 0$$

gilt, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn $u(P) \equiv 0$ ist.

Als Beispiel betrachten wir den symmetrischen Operator $B$ des vorigen Paragraphen:

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

wobei die Funktion $u(x)$ die Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

erfüllt; das Gebiet $\Omega$ ist das Intervall $0 < x < 1$. Wir bilden das Skalarprodukt

$$(Bu, u) = -\int_0^1 u \frac{d^2u}{dx^2}\, dx.$$

Partielle Integration ergibt

$$(Bu, u) = +\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - [uu']|_0^1.$$

Infolge der Randbedingungen (1) verschwinden die ausintegrierten Glieder, so daß

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0$$

ist. Wir nehmen jetzt an, daß $(Bu, u) = 0$ ist. Das bedeutet, daß

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0$$

ist. Der Integrand ist nicht negativ, und aus dem Verschwinden des Integrals folgt, daß $\frac{du}{dx} = 0$ und folglich $u(x) = \text{const}$ ist. Die Randbedingungen (1) besagen dann, daß $u \equiv 0$ ist. Aus all dem Gesagten folgt, daß der Operator $B$ positiv ist.

Wir betrachten noch den Operator $Cu$, der ebenfalls schon im vorhergehenden Paragraphen vorkam. Wir erinnern daran, daß die Funktionen aus dem Definitionsbereich des Operators $C$ den Randbedingungen

$$u'(0) + \alpha u(0) = 0, \quad u'(1) + \beta u'(1) = 0 \tag{2}$$

genügen. Wir haben

$$(Cu, u) = -\int_0^1 u \frac{d^2u}{dx^2}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - [uu']|_0^1$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - u(1)\, u'(1) + u(0)\, u'(0).$$

Wir drücken $u'(0)$ und $u'(1)$ mit Hilfe der Randbedingungen (2) aus und erhalten

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \beta u^2(1) - \alpha u^2(0).$$

Bei willkürlichen Werten $\alpha$ und $\beta$ ist es schwierig zu entscheiden, ob der Operator $C$ positiv ist; jedoch ist es leicht, einfache hinreichende Bedingungen dafür zu geben: Der Operator $C$ ist positiv, wenn $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$ ist, wobei mindestens eine der Konstanten $\alpha$ oder $\beta$ von Null verschieden sei. Wenn zum Beispiel $\beta \geq 0$ und $\alpha = -\gamma$, wo $\gamma > 0$ ist, dann ist

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \beta u^2(1) + \gamma u^2(0) \geq 0.$$

Wenn $(Cu, u) = 0$ ist, dann ist leicht zu sehen, daß $u(0) = 0$ und $\frac{du}{dx} \equiv 0$ sein muß. Aus der letzten Gleichung folgt, daß $u(x) \equiv \text{const}$ ist; da aber $u(0) = 0$ ist, so ist offensichtlich $u(x) \equiv 0$.

Wenn beide Konstanten $\alpha$ und $\beta$ gleich Null sind, dann ist der Operator nicht positiv. Denn in diesem Falle nehmen die Bedingungen (2) die Form

$$u'(0) = u'(1) = 0 \tag{3}$$

an; außerdem ist

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Die Funktion $u \equiv 1$ erfüllt die Randbedingungen (3) und liegt deshalb im Definitionsbereich des Operators $C$; dabei ist $(Cu, u) = 0$.

Wir betrachten ein komplizierteres Beispiel. Möge $\Delta$ den LAPLACE-Operator bezeichnen, und mögen die seinen Definitionsbereich bildenden Funktionen der Randbedingung

$$u|_S = 0 \tag{4}$$

genügen, wo $S$ der Rand des Gebietes $\Omega$ ist, in welchem die Funktionen $u$ definiert sind. Wir zeigen, daß der Operator $-\Delta$ bei diesem Definitionsbereich positiv ist. Es gilt

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u \Delta u \, d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS;$$

hierbei haben wir die Formel (9) des § 2 benutzt. Nach Bedingung (4) verschwindet das Oberflächenintegral, und wir erhalten

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geq 0. \tag{5}$$

Dabei ist, wenn $(-\Delta u, u) = 0$ ist, notwendigerweise $\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv 0$, da die Funktion unter dem letzten Integral nicht negativ ist. Dann aber ist $u = \text{const}$, und, wegen der Randbedingung (4), $u \equiv 0$.

Wir wollen jetzt versuchen, die physikalische Bedeutung des Begriffes „positiver Operator" zu klären. Dazu betrachten wir eine am Rand eingespannte Membran, die sich unter der Wirkung einer statischen senkrechten Belastung durchbiegt. Die Membran möge im unbelasteten Zustand das Gebiet $\Omega$ der $xy$-Ebene einnehmen und $u(x, y)$ möge die Durchbiegung der Membran bezeichnen. Mit $T$ bezeichnen wir die Spannung der Membran und mit $q$ die Querbelastung, bezogen auf die Flächeneinheit. Bekanntlich[1]) genügt die Durchbiegung der Membran der Differentialgleichung

$$-\Delta u = \frac{q}{T}; \tag{6}$$

der Umstand, daß der Rand der Membran eingespannt ist, wird durch die Randbedingung (4) ausgedrückt, worin $S$ jetzt den Rand der Membran bedeutet. Auf der anderen Seite unterscheidet sich in unserem Fall der Ausdruck

$$(-\Delta u, u) = \int\limits_{\Omega}\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

nur durch einen konstanten Faktor von der potentiellen Deformationsenergie der verbogenen Membran.[2]) Jetzt wird klar, daß beim Problem der statischen Ausbiegung einer Membran die Positivität des Operators $-\Delta$ die physikalisch selbstverständliche Tatsache ausdrückt, daß die potentielle Energie bei der Deformation einer irgendwie ausgebogenen Membran positiv ist, anders ausgedrückt, daß es unmöglich ist, eine Membran zu verbiegen, ohne dazu Energie aufzuwenden.

Zahlreiche Beispiele (mehrere davon werden in diesem Buch behandelt) lehren folgendes. Ein physikalisches System möge unter der Einwirkung einer äußeren Ursache, charakterisiert durch eine Funktion $f(P)$, eine Verschiebung $u(P)$ erfahren; die beiden Funktionen seien durch die Gleichung

$$Au = f$$

verknüpft, wo $A$ ein positiver Operator ist. Dann ist, wie sich wiederholt gezeigt hat, *die Größe $(Au, u)$ proportional der Größe der Energie, welche man aufwenden muß, um dem System die Verschiebung $u(P)$ zu erteilen.* Wenn das so ist, dann drückt die Positivität des Operators die Tatsache aus, daß es unmöglich ist, dem System irgendeine Verschiebung zu erteilen, ohne dafür Energie aufzuwenden.

Wenn der Operator $A$ positiv ist, dann werden wir, indem wir die besagte

---

[1]) Die Gleichung (6) kann man leicht aus der Gleichung für die Membranschwingungen (SMIRNOW [2], Punkt 176) erhalten, wenn man annimmt, daß die Durchbiegung nicht von der Zeit abhängt. Betreffs der Ableitung der Membranschwingungsgleichung siehe W. I. LEWIN und J. I. GROSBERG [1] oder A. N. TYCHONOFF und A. A. SAMARSKI [1]. Die Gleichung für statische Ausbiegung einer Membran wird auch bei S. P. TIMOSCHENKO [2] abgeleitet.

[2]) Siehe etwa R. COURANT und D. HILBERT [1], Kap. IV, § 10, S. 238.

physikalische Bedeutung der Größe $(Au, u)$ im Auge haben, diese Größe weiterhin als *Energie der Funktion* $u \in D_A$ bezeichnen.

*Ein symmetrischer Operator A heißt positiv-definit, wenn für beliebige Funktionen* $u \in D_A$ *die Ungleichung*

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \tag{7}$$

*gilt, wo* $\gamma$ *eine positive Konstante ist.*

**Beispiel.** Wir betrachten den Operator

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

wo die Funktion $u(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ definiert ist und den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ genügt. Oben haben wir gesehen, daß der Operator $B$ positiv ist; wir zeigen, daß er auch positiv-definit ist.

Da $u(0) = 0$ ist, so gilt

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt.$$

Auf das Integral wenden wir die Ungleichung von Bunjakowski (Formel $(8_1)$, § 3) an. Das gibt

$$u^2(x) \leq \int_0^x 1^2 \cdot dt \int_0^x u'^2(t)\, dt = x \int_0^x u'^2(t)\, dt.$$

Da $x$ zwischen Null und Eins liegt, verschärfen wir die letzte Ungleichung, wenn wir die obere Grenze des Integrals gleich Eins setzen, also ist

$$u^2(x) \leq x \int_0^1 u'^2(t)\, dt.$$

Wir integrieren diese Ungleichung zwischen den Grenzen Null und Eins und finden

$$\int_0^1 u^2(x)\, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2(t)\, dt. \tag{8}$$

Nun war nach Definition der Norm

$$\int_0^1 u^2(x)\, dx = \|u\|^2$$

und für den von uns betrachteten Operator $B$

$$\int_0^1 u'^2(t)\, dt = (Bu, u).$$

Die Ungleichung (8) ergibt jetzt

$$(Bu, u) \geq 2\|u\|^2.$$

Also ist der Operator $B$ positiv-definit, man kann für diesen Operator $\gamma = \sqrt{2}$ nehmen. Im folgenden wird gezeigt, daß in vielen wichtigen Fällen die Operatoren der mathematischen Physik die Eigenschaft haben, positiv-definit zu sein.

Wir betrachten noch ein anderes Beispiel. Es sei der Operator $L$ durch die Formel

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{du}{dx}\right), \quad 0 < x < 1$$

gegeben. Die Funktionen $u(x) \in D_L$ unterwerfen wir nur der Randbedingung $u(1) = 0$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß der Operator $L$ positiv ist. In der Tat ist

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \left[u \frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{dv}{dx}\right) - v \frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{du}{dx}\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x^3\left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}\right)\right] dx = \left[x^3\left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0,$$

da für $x = 0$ der Faktor $x^3$ verschwindet, bei $x = 1$ aber die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$. Dann ist $(Lu, v) = (u, Lv)$, d. h. der Operator $L$ ist symmetrisch. Weiter ist

$$(Lu, u) = -\int_0^1 u \frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{du}{dx}\right) dx.$$

Wir integrieren partiell und finden bei Beachtung der Bedingung $u(1) = 0$, daß

$$(Lu, u) = \int_0^1 x^3 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0$$

ist. Wenn $(Lu, u) = 0$ ist, dann ist $\frac{du}{dx} \equiv 0$, $u = \text{const}$, und da $u(1) = 0$ ist, erhält man $u \equiv 0$. Also ist der Operator $L$ positiv.

Wir zeigen jetzt, daß dieser Operator nicht positiv-definit ist. Die Ungleichung (7) schreiben wir in der Form

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2.$$

Daraus ist ersichtlich, daß für einen positiv-definiten Operator der zuletzt hingeschriebene Quotient nicht kleiner gemacht werden kann als eine feste positive Konstante $\gamma^2$. Wenn wir zeigen können, daß man für den Operator $L$ den ana-

logen Quotienten beliebig klein machen kann, dann haben wir gleichzeitig bewiesen, daß der Operator $L$ nicht positiv-definit ist.

Es sei jetzt $\delta$ eine Zahl zwischen Null und Eins. Wir setzen

$$u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta, \\ 0, & \delta < x \leq 1. \end{cases}$$

Die Funktion $u_\delta(x)$ ist bei $x = 1$ gleich Null und mit ihren ersten beiden Ableitungen in $0 \leq x \leq 1$ stetig. Dann aber gehört $u_\delta$ zum Definitionsbereich des Operators $L$. Wir bilden den Quotienten

$$\frac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\|u_\delta\|^2} = \frac{\int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{du_\delta}{dx}\right)^2 dx}{\int\limits_0^1 u_\delta^2 \, dx} = \frac{9 \int\limits_0^\delta x^3 (\delta - x)^4 \, dx}{\int\limits_0^\delta (\delta - x)^6 \, dx},$$

wobei wir benutzt haben, daß $u_\delta \equiv 0$ für $x > \delta$ ist und rechnen die Integrale aus. Man findet

$$\frac{(Lu_\delta \, u_\delta)}{\|u_\delta\|^2} = \frac{9}{40} \, \delta,$$

was für hinreichend kleines $\delta$ beliebig klein gemacht werden kann.

Wir geben jetzt eine physikalische Deutung des Begriffs „positiv-definiter Operator“. Die Größe der Verschiebung, die ein physikalisches System erleidet, werden wir mittels ihrer Norm bewerten, indem wir die Verschiebung als „groß“ ansehen, wenn ihre Norm groß ist, als „klein“, wenn ihre Norm klein ist. Bei einer solchen Bewertung ziehen wir also sogar verhältnismäßig große „örtliche“ Verschiebungen nicht in Betracht, wenn sie nur geringen Einfluß auf die Norm haben. Die Ungleichung (7) sagt aus, daß man einem System, für das der entsprechende Operator positiv-definit ist, eine große Verschiebung nur erteilen kann, wenn man eine hinreichend große Energie aufwendet. Wenn der Operator nur positiv, aber nicht positiv-definit ist, dann kann man dem System beliebig große Verschiebungen unter Aufwendung beliebig geringer Energie erteilen.

KAPITEL II

# KONVERGENZ BEZÜGLICH DER ENERGIE

## § 7. Abschätzung der Näherung und Arten der Konvergenz. Konvergenz im Mittel

Die direkten Methoden liefern bekanntlich eine *angenäherte* Lösung der Aufgaben, auf die sie angewandt werden. Das macht es erforderlich, den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn man die exakte Lösung durch die Näherungslösung ersetzt. Es werde zum Beispiel die Funktion $u(P)$, die exakte Lösung, durch eine gewisse andere Funktion $u'(P)$, die angenäherte Lösung desselben Problems, ersetzt. Der Fehler ist gleich $|u(P) - u'(P)|$. Jetzt ergibt sich die Frage nach einer Abschätzung dieses Fehlers. Wenn es sich nicht um Funktionen, sondern um Zahlen handelt, wäre die Frage einfach zu lösen. Denn wenn das Problem in der Bestimmung einer Zahl $a$ bestände, wir aber den Näherungswert $b$ dafür erhalten hätten, dann genügt es, die Größe $|b - a|$ abzuschätzen, und wir werden das Näherungsverfahren als bestes ansehen, welches bei demselben Arbeitsaufwand den kleinsten Wert $|b - a|$ liefert. Die Differenz $|u(P) - u'(P)|$ hat jedoch in verschiedenen Punkten verschiedene Werte, weshalb sie zur Abschätzung der Annäherung ungeeignet ist. In solchen Fällen wählt man als Maß für den Fehler gewöhnlich eine Zahl, die in bestimmter Weise mit der Funktion $|u(P) - u'(P)|$ zusammenhängt. Am einfachsten ist es, die Zahl $\varrho = \max|u(P) - u'(P)|$ als Maß für den Fehler zu nehmen. Wenn die Größe klein ist, dann ist die Differenz der Werte der Funktionen $u(P)$ und $u'(P)$ in jedem beliebigen Punkt des betrachteten Gebietes klein (sie übertrifft die kleine Größe $\varrho$ nicht). In diesem Falle sagt man, die Funktion $u'(P)$ sei *gleichmäßig benachbart* zu $u(P)$; die Zahl $\varrho$ kann man als Maß für die gleichmäßige Nachbarschaft beider Funktionen bezeichnen. So sind für kleine Werte von $x$ die Funktionen $x$ und $\sin x$ benachbart zueinander, und es ist $|\sin x - x| < \frac{|x|^3}{6}$. Wenn man sich z. B. auf die Werte $|x| \leq \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$ beschränkt, dann ist $|\sin x - x| < 0{,}024$. Demnach bleibt bei Werten zwischen $-\frac{\pi}{6}$ und $+\frac{\pi}{6}$ der Fehler der angenäherten Gleichung $\sin x \approx x$ kleiner als 0,024.

Oft ist es von Bedeutung, daß nicht nur die Funktionen selbst benachbart sind, sondern auch ihre Ableitungen bis zur $k$-ten Ordnung; in diesem Fall eignet sich die Größe

$$\varrho^{(k)} = \max\left\{|u(P) - u'(P)| + \sum_{i \leq k} |D^{(i)} u - D^{(i)} u'|\right\}$$

als Maß für die Nachbarschaft der Funktionen $u(P)$ und $u'(P)$ oder, was dasselbe ist, als Maß für den Fehler der Näherungsbeziehung $u = u'$; dabei bezeichnet $D^{(i)}$ eine Ableitung $i$-ter Ordnung, zu summieren ist über alle Ableitungen, deren Ordnung $\leq k$ ist. Wenn die Zahl $\varrho^{(k)}$ klein ist, dann unterscheiden sich sowohl

die Funktionen selbst als auch ihre entsprechenden Ableitungen bis zur $k$-ten Ordnung einschließlich gleichmäßig wenig voneinander.

Es finden sich auch andere Fälle, wo die Zahl $\varrho$ nicht das geeignetste Maß für die Nachbarschaft darstellt. Oft kommt es nämlich vor, daß die Differenz der Funktionen $u'(P)$ und $u(P)$ zwar im allgemeinen klein ist, aber in kleinen Abschnitten merklich wird. In Abb. 4 sind die Funktionen $y = x$ und $y = x + 20x \cdot e^{-400x^2}$ im Intervall von Null bis Eins graphisch dargestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß sich die Kurven nur in dem kleinen Abschnitt von $x = 0$ bis $x = 0{,}13$ wesentlich voneinander unterscheiden; für $x > 0{,}13$ fallen die Kurven zusammen. Gleichzeitig ist die größte Abweichung der Kurven ziemlich beträchtlich; sie ist gleich 0,43 und liegt bei $x = \frac{\sqrt{2}}{40} = 0{,}035$.

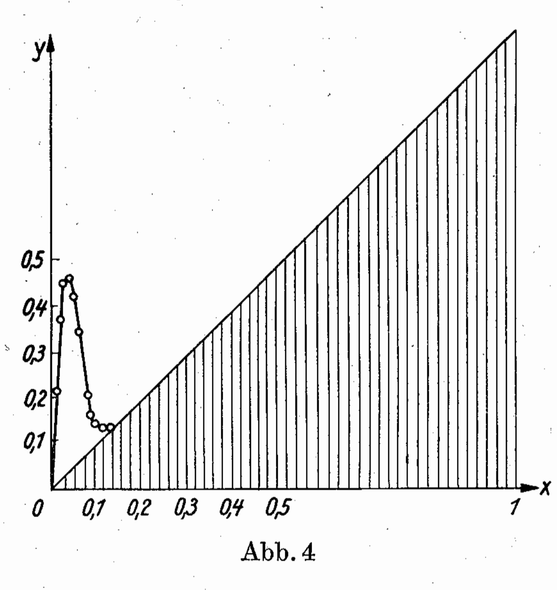


Abb. 4

Vom Standpunkt der gleichmäßigen Nachbarschaft weichen die Funktionen $x$ und $x + 20x \cdot e^{-400x^2}$ wesentlich voneinander ab, obgleich die Intuition einem sagt, daß dem durchaus nicht so ist, und wenn uns etwa die Fläche besonders interessiert, die durch die beiden Kurven begrenzt wird, so würden wir uns leicht überzeugen, daß sich die Kurven in dieser Hinsicht nur wenig unterscheiden. Denn die Differenz der Flächeninhalte, die von den beiden Linien begrenzt werden, ist gleich

$$\int_0^1 20xe^{-400x^2}\,dx.$$

Wenn wir $400x^2 = t$ setzen, finden wir, daß die erwähnte Flächendifferenz gleich

$$\frac{1}{40}\int_0^{400} e^{-t}\,dt < \frac{1}{40}\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = 0{,}025$$

ist, was 5% des in Abb. 4 schraffierten Dreiecks beträgt. Wenn man die Bilder der Funktionen $x$ und $x + 100\,xe^{-10\,000x^2}$ miteinander vergleicht, stellt sich heraus, daß die größte Ordinatendifferenz wie zuvor 0,43 ist, aber eine merkliche Abweichung der Kurven nur im Abschnitt $0 < x < 0{,}03$ auftritt, während die Flächendifferenz kleiner als 1% des schraffierten Dreiecks ist. Von solchen Funktionen sagt man, sie seien *im Mittel benachbart*; als Maß der Nachbarschaft im Mittel zweier Funktionen $u(P)$ und $u'(P)$ wählt man oft die Größe

$$\delta^{(k)} = \left\{\int_\Omega [u(P) - u'(P)]^2\,d\Omega\right\}^{1/2} = \|u - u'\|.$$

Manchmal erweist es sich als notwendig, daß nicht nur die Funktionen selbst im Mittel benachbart sind, sondern auch ihre Ableitungen bis zu einer gegebenen Ordnung $k$. Dann nimmt man zweckmäßig als Maß für die Nachbarschaft die Größe

$$\delta^{(k)} = \left\{\int\limits_{\Omega}\!\!\int [u(P) - u'(P)]^2 \, d\Omega + \sum_{i \le k} \int\limits_{\Omega} [D^{(i)} u - D^{(i)} u']^2 \, d\Omega\right\}^{1/2}.$$

Wir wollen hier nicht bei anderen möglichen Verfahren zur Abschätzung der Nachbarschaft zweier Funktionen verweilen; eins dieser Verfahren wird im folgenden Paragraphen ausführlich untersucht.

Das Maß für die Nachbarschaft zweier Funktionen bezeichnet man oft als den Abstand zwischen ihnen, so daß es z. B. möglich ist, von dem Abstand der gegebenen Funktionen $u(P)$ und $u'(P)$ im Sinne der gleichmäßigen Nachbarschaft zu sprechen; er ist gleich $\max |u(P) - u'(P)|$. Ebenso ist es möglich, von dem Abstand zweier Funktionen im Sinne der Nachbarschaft im Mittel zu sprechen; dieser Abstand ist gleich $\|u - u'\|$.

Mit dem Begriff der Abschätzung der Nachbarschaft von Funktionen steht in engem Zusammenhang der Begriff der *Konvergenz* (oder, was dasselbe ist, des *Strebens gegen einen Grenzwert*) einer Folge von Funktionen. Es sei in beliebiger Weise ein Abstand zwischen Funktionen definiert. Es sei eine Funktionenfolge $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P), \ldots$ gegeben, und es existiere eine solche Funktion $u(P)$, daß der Abstand zwischen den Funktionen $u_n(P)$ und $u(P)$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Dann sagt man, $u_n(P)$ *konvergiert* (oder *strebt*) *gegen* $u(P)$ *im Sinne der entsprechenden Nachbarschaft*. Es seien etwa die Funktionen $u_n(P)$ und $u(P)$ im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ definiert. Wenn $\max\limits_{P \in \bar{\Omega}} |u_n(P) - u(P)| \to 0$, dann ist $u_n(P) \to u(P)$ *gleichmäßig* in $\bar{\Omega}$. Wenn $u_n(P)$ und $u(P)$ im Gebiet $\Omega$ definiert sind und $\|u_n - u\| \to 0$ ist, dann kommen wir zu einem neuen Typ der Konvergenz: In diesem Falle sagt man, daß *im Mittel* $u_n(P) \to u(P)$ im Gebiet $\Omega$ ist.

In derselben Weise wie den Begriff der Konvergenz einer Folge kann man den Begriff der *Konvergenz einer Reihe im Sinne der entsprechenden Nachbarschaft* einführen: Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(P)$$

konvergiert in dem einen oder dem anderen Sinne, und hat die Funktion $u(P)$ zur Summe, wenn die Folge der Teilsummen dieser Reihe in eben diesem Sinne gegen die Funktion $u(P)$ konvergiert. Insbesondere kann man von gleichmäßiger Konvergenz einer Reihe sprechen, oder davon, daß sie im Mittel konvergiert. Wir glauben, daß der Leser mit dem Begriff der gleichmäßigen Konvergenz hinreichend vertraut ist (siehe Smirnow [1], Kap. IV, § 3). Um die Bedeutung des Begriffes der Konvergenz im Mittel zu erläutern, bringen wir ein Beispiel. Es sei $\Omega$ das Intervall $0 < x < 2\pi$ und $f(x)$ eine absolut integrierbare Funktion. Wir bilden ihre Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx); \tag{1}$$

ihre Teilsummen bezeichnen wir mit $S_n(x)$. Bekanntlich kann die Reihe (1) für bestimmte Werte von $x$ sogar divergieren, nichtsdestoweniger konvergiert diese

Reihe im Mittel gegen $f(x)$, wenn diese Funktion nur eine endliche Norm hat, wovon wir uns sofort überzeugen werden. Es ist nämlich

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int_0^{2\pi} \left\{f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right\}^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

[siehe SMIRNOW [2], Punkt 147, Formeln (33) und (36)]. Andererseits ist nach der Vollständigkeitsrelation [SMIRNOW [2], Punkt 147, Formel (40), und Punkt 155]

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Ein Vergleich der beiden letzten Gleichungen zeigt, daß $\|f - S_n\| \to 0$ gilt, d. h. $S_n(x) \to f(x)$ im Mittel.

Wenn wir im folgenden von einer Folge von Funktionen $u_n(P)$ sprechen, die im Mittel gegen eine Funktion $u(P)$ konvergiert, setzen wir voraus, daß jede der Funktionen $u_n(P)$ und auch die Grenzfunktion $u(P)$ eine endliche Norm besitzt. Den Umstand, daß $u_n(P)$ im Mittel gegen $u(P)$ konvergiert, werden wir symbolisch folgendermaßen schreiben:

$$u_n(P) \xrightarrow{M} u(P). \tag{2}$$

Wir halten einige Eigenschaften im Mittel konvergenter Folgen fest.

**Satz 1.** *Ein und dieselbe Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Funktionen im Mittel konvergieren.*

Wir nehmen das Gegenteil an, die Folge $u_n(P)$ möge im Mittel sowohl gegen die Funktion $u(P)$ als auch gegen die Funktion $v(P)$ konvergieren, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v\| = 0$$

gilt. Wir schätzen die Norm der Differenz $u - v$ ab. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\|u - v\| = \|u - u_n - (v - u_n)\| \leq \|u - u_n\| + \|v - u_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Daraus folgt, daß $\|v - u\| = 0$ ist, und nach Eigenschaft a) der Norm (§ 3) $u(P) \equiv v(P)$.

**Satz 2.**[1]) *Es sei $u_n(P) \xrightarrow{M} u(P)$, ferner $v(P)$ eine willkürliche Funktion mit endlicher Norm. Dann ist*

$$(u_n, v) \underset{n\to\infty}{\to} (u, v). \tag{3}$$

[1]) Satz 2 werden wir den *Satz von der Stetigkeit des Skalarproduktes* nennen. Wir weisen darauf hin, daß man gewöhnlich den etwas schärferen Satz 1 von § 43 so nennt.

Zum Beweis schätzen wir die Differenz

$$(u_n, v) - (u, v) = (u_n - u, v)$$

ab. Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI ist

$$|(u_n, v) - (u, v)| \leq \|u_n - u\| \cdot \|v\|.$$

Der erste Faktor rechts strebt gegen Null auf Grund der Definition der Konvergenz im Mittel, während der zweite Faktor konstant ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann dem Satz 2 noch eine etwas andere Form geben, die für manche Untersuchungen geeigneter ist. Wir betrachten die im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P) = u(P), \tag{4}$$

$u_n(P)$ seien ihre Teilsummen, so daß

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(P); \quad u_n(P) \xrightarrow{M} u(P)$$

ist. Nach Satz 2 ist

$$(u_n, v) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, v) \underset{n\to\infty}{\to} (u, v)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, v) = (u, v).$$

Berücksichtigt man die Definition der skalaren Multiplikation [Formel (1), § 2], so kann man der letzten Beziehung die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \varphi_n(P)\, v(P)\, d\Omega = \int_{\Omega} u(P)\, v(P)\, d\Omega \tag{5}$$

geben. Nunmehr kann man Satz 2 folgendermaßen formulieren:

*Eine Reihe, die im Mittel konvergiert, darf man nach gliedweiser Multiplikation mit einer beliebigen, eine endliche Norm besitzenden Funktion gliedweise integrieren.*

Es sei $\omega$ ein willkürliches Teilgebiet des Gebietes $\Omega$. Das Volumen (bzw. den Flächeninhalt oder die Länge, wenn das Gebiet $\Omega$ zwei- oder eindimensional ist) des Gebietes $\omega$ bezeichnen wir mit $|\omega|$. Wir wählen eine Funktion $v(P)$, indem wir

$$v(P) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\omega|}, & P \in \omega, \\ 0, & P \in \Omega - \omega \end{cases}$$

setzen. Die Funktion $v(P)$ hat eine endliche Norm

$$\|v(P)\| = \left\{\int_{\Omega} v^2(P)\, d\Omega\right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{|\omega|}}.$$

Wir setzen das in (3) ein. Wir erhalten

$$(u_n, v) = \int_\Omega u_n(P)\, v(P)\, d\Omega = \int_\omega u_n(P)\, v(P)\, d\Omega + \int_{\Omega-\omega} u_n(P)\, v(P)\, d\Omega.$$

Das letzte Integral verschwindet, da $v(P) = 0$ auf $\Omega - \omega$ ist. Daraus folgt

$$(u_n, v) = \int_\omega u_n(P)\, v(P)\, d\Omega = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega u_n(P)\, d\Omega.$$

Analog erhält man

$$(u, v) = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega u(P)\, d\Omega.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{|\omega|} \int_\omega \psi(P)\, d\Omega$$

bedeutet den Mittelwert der Funktion $\psi(P)$ in dem Gebiet $\omega$. Bei der genannten Wahl der Funktion $v(P)$ führt Satz 2 auf folgendes:

*Wenn eine Folge im Mittel konvergiert, dann konvergieren die Mittelwerte der Glieder der Folge gegen den entsprechenden Mittelwert der Grenzfunktion.*

Dieser Satz spielt in der mathematischen Physik eine wesentliche Rolle. Es handelt sich um folgendes. Wir sind es gewöhnt, viele physikalische Größen als Funktionen eines Punktes zu betrachten, jedoch ist es unmöglich, die Werte solcher Größen in einem einzelnen Punkt unmittelbar zu messen: Die Messung liefert nur Mittelwerte dieser Größen für ein gewisses kleines Gebiet, das den betreffenden Punkt enthält. Wenn wir also die Temperatur auf der Oberfläche eines ungleichmäßig erwärmten Körpers messen, dann kann diese Messung nicht die Temperatur in einem Punkt der Oberfläche liefern; sie kann nur einen Mittelwert für die Temperatur eines bestimmten Teils der Fläche ergeben. Dasselbe gilt für die Messung von Deformationen mittels eines Tensometers oder für die Bestimmung der Spannungen auf der Oberfläche eines Körpers, der unter der Wirkung äußerer Kräfte steht, und in einer Reihe anderer Fälle. Man kann behaupten, daß eine Messung ganz allgemein nicht die Werte physikalischer Größen in einem Punkt gibt, sondern die Mittelwerte dieser Größen für ein kleines Gebiet, und daß es für praktische Erfordernisse ausreicht, die Mittelwerte der Größen zu kennen. Wie wir unten sehen werden, erlauben es die Variationsmethoden, die gesuchten Größen im Mittel anzunähern; aus unserem Satz folgt, daß die direkten Methoden es gestatten, Näherungswerte der gesuchten Größen zu bestimmen mit einem Fehler, der dem absoluten Betrag nach beliebig klein gemacht werden kann, was für praktische Zwecke völlig ausreichend ist.

Manchmal ist es nötig, einen allgemeineren Konvergenztyp einzuführen.

Es sei $\sigma(P)$ eine nichtnegative Funktion. Wir wollen sagen, $\varphi_n(P)$ konvergiere für $n \to \infty$ gegen $\varphi(P)$ *im Mittel mit der Belegung* $\sigma(P)$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sigma(P)\, |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2\, d\Omega = 0$$

gilt.

Alles hier über die Konvergenz im Mittel Gesagte läßt sich auf die Konvergenz im Mittel mit einer Belegung $\sigma(P)$ ausdehnen.

**Satz 3.** *Wenn* $u_n(P) \xrightarrow{M} u(P)$, *dann gilt* $\|u_n\| \to \|u\|$.

Wir haben $\|u_n - u\| \to 0$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|\,\|u_n\| - \|u\|\,| \leq \|u_n - u\|$. Daraus folgt $|\,\|u_n\| - \|u\|\,| \to 0$ und $\|u_n\| \to \|u\|$.

Man kann Funktionen betrachten, die nicht in einem Gebiet definiert sind, sondern auf irgendeiner Fläche (oder auf einer Linie); für solche Funktionen definieren wir ebenfalls die Konvergenz im Mittel. Es seien etwa die Funktionen $u(Q)$ und $u_n(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$ auf einer gewissen Fläche $S$ definiert ($Q$ ist ein veränderlicher Punkt dieser Fläche). Wir wollen sagen, daß $u_n(Q) \xrightarrow{M} u(Q)$ auf der Fläche $S$, wenn alle Integrale

$$\int_S u^2(Q)\, dS; \quad \int_S u_n^2(Q)\, dS, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

existieren und wenn

$$\int_S [u(Q) - u_n(Q)]^2\, dS \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

gilt.

Alles bisher über die Konvergenz im Mittel Gesagte kann man auch auf diesen Fall übertragen.

Um das Verhältnis zwischen der Konvergenz im Mittel und der gleichmäßigen Konvergenz besser verständlich zu machen, betrachten wir folgendes Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \tag{6}$$

konvergiert gleichmäßig, z. B. im Intervall $0 \leq x \leq \pi$. In der Tat ist

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert; die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (6) ergibt sich aus dem Weierstrassschen Kriterium (Smirnow [1], Punkt 147). Erst recht konvergiert die Reihe auf dem erwähnten Intervall im Mittel.

Vergleichen wir die Schnelligkeit der gleichmäßigen Konvergenz und der Konvergenz im Mittel der Reihe (6). Zu diesem Zwecke schätzen wir den absoluten Betrag und die Norm des Restes

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

ab; ersteres charakterisiert die Schnelligkeit der gleichmäßigen Konvergenz, letzteres die Schnelligkeit der Konvergenz im Mittel. Wir haben

$$|R_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

das Gleichheitszeichen ist möglich, es wird bei $x = 0$ angenommen. Unter Verwendung des Integralkriteriums für die Konvergenz von Reihen (SMIRNOW [1], Punkt 122) findet man leicht, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \int_{N+1}^{\infty} \frac{dn}{n^2} = \frac{1}{N+1}$$

gilt, und demnach mindestens bei $x = 0$

$$|R_N| > \frac{1}{N+1}. \tag{7}$$

Ferner ist

$$\|R_N\|^2 = \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}\right]^2 dx$$

oder, da $\cos nx$ eine gerade Funktion ist,

$$\|R_N\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}\right]^2 dx.$$

Nach der Vollständigkeitsrelation (SMIRNOW [2], Punkt 147 und Punkt 155) ist

$$\|R_N\|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Wir wenden erneut das Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen an und erhalten

$$\|R_N\|^2 < \frac{\pi}{2} \int_N^{\infty} \frac{dn}{n^4} = \frac{\pi}{6N^3} < \frac{1}{N^3}$$

und schließlich

$$\|R_N\| < \frac{1}{N^{3/2}}. \tag{8}$$

Die Formeln (7) und (8) besagen, daß die Konvergenz im Mittel im allgemeinen schneller ist, als die gleichmäßige Konvergenz. Diese Feststellung, die wir auf ein spezielles Beispiel gegründet haben, hat tatsächlich allgemeinen Charakter. Insbesondere *zieht die gleichmäßige Konvergenz stets die Konvergenz im Mittel nach sich*. So konvergiere etwa $u_n(x) \to u(x)$ gleichmäßig im Intervall $a \leq x \leq b$. Das bedeutet, daß man bei einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $N(\varepsilon)$ finden kann, daß für $n \geq N$

$$|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}$$

wird. Wenn wir diese Ungleichung quadrieren und integrieren, finden wir, daß

$$\int_a^b [u_n(x) - u(x)]^2 \, dx < \varepsilon^2$$

oder $\|u_n - u\| < \varepsilon$, $u \geq N(\varepsilon)$ ist, was bedeutet, daß $u_n \xrightarrow{M} u$ gilt. Die entgegengesetzte Feststellung ist nicht richtig: Eine im Mittel konvergente Reihe braucht nicht gleichmäßig zu konvergieren. So hat die FOURIER-Reihe der Funktion $\ln 2 \left|\sin \frac{x}{2}\right|$ die Form

$$\ln 2 \left|\sin \frac{x}{2}\right| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}; \tag{9}$$

sie konvergiert z. B. im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ im Mittel, da die Funktion $\ln 2 \left|\sin \frac{x}{2}\right|$ eine endliche Norm besitzt. Die Reihe (9) konvergiert in dem genannten Intervall aber nicht gleichmäßig. Noch mehr, diese Reihe divergiert bei $x = 0$ sogar.

## § 8. Konvergenz bezüglich der Energie

Im vorliegenden Paragraphen wird noch ein anderer Konvergenztyp untersucht, der mit einer neuen Auffassung des Maßes der Entfernung zweier Funktionen zusammenhängt. Der neue Typ von Konvergenz spielt in der Theorie der Variationsmethoden eine wichtige Rolle.

Wir betrachten einen *positiven* Operator $A$ und seinen Definitionsbereich $D_A$. Wenn $A$ ein Differentialoperator ist, wie das schon oft der Fall war und wie es auch im folgenden sein wird, dann wollen wir annehmen, daß die Funktionen, die zu $D_A$ gehören, stetig sind und die nötige Zahl von stetigen Ableitungen in einem abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega} = \Omega + S$ besitzen. Genauer, wenn $k$ die Ordnung des Operators $A$ ist, d. h. die Ordnung der höchsten in $A$ auftretenden Ableitung, dann nehmen wir an, daß die Funktionen aus $D_A$ selbst und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $k - 1$ einschließlich in $\bar{\Omega}$ stetig sind, die Ableitung $k$-ter Ordnung im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ mit möglicher Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten, Linien und Flächen, stetig ist und eine endliche Norm besitzt. Es ist leicht zu sehen, daß dann auch $Au$ eine endliche Norm hat, wenn $u \in D_A$. Außer den genannten Stetigkeitsbedingungen sollen die Funktionen aus dem Definitionsbereich eines Differentialoperators auch den Randbedingungen des jeweiligen Problems genügen.

Bezüglich dieser Bedingungen machen wir folgende Annahme: Wir nehmen an, daß die Randbedingungen homogen sind, d. h. so beschaffen, daß ihnen jede Funktion genügt, welche identisch gleich Null sowohl auf dem Rand $S$ selber, als auch in allen Punkten des Gebietes $\Omega$ ist, die hinreichend nahe bei $S$ liegen.

Wenn wir im folgenden das Definitionsgebiet dieses oder jenes Differentialoperators beschreiben, werden wir die Stetigkeits- und Differenzierbarkeits-

eigenschaften nicht besonders erwähnen, da wir sie als selbstverständlich voraussetzen und nur die Randbedingungen formulieren.

Es seien $u(P)$ und $v(P)$ zwei Funktionen aus $D_A$. *Als Maß für die Entfernung dieser Funktionen nehmen wir die Quadratwurzel aus der Energie ihrer Differenz.* Der Kürze halber bezeichnen wir die Quadratwurzel aus der Energie einer beliebigen Funktion $u(P) \in D_A$ durch $|u|$, so daß

$$|u| = \sqrt{(Au, u)} \tag{1}$$

gilt. Dem Gesagten entsprechend verwenden wir als Maß für die Nähe (oder die Entfernung) der Funktionen $u(P)$ und $v(P)$ die Größe

$$|u - v| = \sqrt{(A(u - v), u - v)}.$$

Die Größe $|u|$ wollen wir *Norm der Energie* der Funktion $u(P)$ nennen. Der Sinn dieser Benennung wird unten auseinandergesetzt.

Wenn die Rolle des Operators $A$ hervorgehoben werden soll, werden wir $|u|_A$ statt $|u|$ schreiben.

Der neue Entfernungsbegriff für Funktionen führt, wie in § 7 bereits angekündigt, zu einem neuen Konvergenzbegriff für Funktionen. Es sei $u(P) \in D_A$ und $u_n(P) \in D_A$, $n = 1, 2, \ldots$. Wir wollen sagen, eine Folge $u_n(P)$ *konvergiere bezüglich der Energie* gegen $u(P)$, wenn $|u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ gilt.

Den Umstand, daß $u_n(P)$ gegen $u(P)$ bezüglich der Energie konvergiert, werden wir symbolisch wie folgt schreiben:

$$u_n(P) \xrightarrow{E} u(P).$$

Es muß hervorgehoben werden, daß die Begriffe der Energie, der Konvergenz bezüglich der Energie usw. die nötige Klarheit erst erhalten, nachdem der entsprechende positive Operator $A$ angegeben wurde.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar der

**Satz 1.** *Wenn der gegebene Operator positiv-definit ist, und $u_n \xrightarrow{E} u$ gilt, dann gilt gleichzeitig $u_n \xrightarrow{M} u$.*

Denn wenn $A$ ein positiv-definiter Operator ist, dann gilt für eine beliebige Funktion $u(P) \in D_A$ die Ungleichung $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ oder in den neuen Bezeichnungen

$$|u| \geq \gamma \|u\|, \qquad u \in D_A. \tag{2}$$

Wenn wir hier $u$ durch $u_n - u$ ersetzen, erhalten wir

$$\|u_n - u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Die im vorigen Paragraphen untersuchte Konvergenz im Mittel stellt einen Spezialfall der Konvergenz bezüglich der Energie dar. Es genügt, für den Operator $A$ den identischen Operator $E$ zu setzen; dann ist $(Au, u) = (u, u) = \|u\|^2$, folglich $|u| = \|u\|$ und die Bedingung $|u_n - u| \to 0$ für die Konvergenz bezüglich der Energie ist identisch mit der Bedingung $\|u_n \to u\| \to 0$. Einen anderen Spezialfall der Konvergenz bezüglich der Energie bildet die Konvergenz im

Mittel mit einer Belegung, wenn die Belegung $\sigma(P)$ entweder überall von Null verschieden ist, oder nur auf einer endlichen Zahl von Punkten, Kurven und Flächen verschwindet. Um sich davon zu überzeugen, genügt es, den Operator $A$ wie folgt zu wählen:

$$Au = \sigma(P)\, u(P).$$

Wir betrachten ein weniger einfaches Beispiel. Es sei $B$ der in § 5 eingeführte Operator, so daß

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}, \quad 0 < x < 1; \qquad u(0) = u(1) = 0$$

ist. Für diesen Operator gilt, wie wir gesehen haben,

$$|u|^2 = (Bu, u) = \int_0^1 u'^2(x)\, dx.$$

Die Konvergenz bezüglich der Energie bedeutet in diesem Falle

$$\int_0^1 [u_n'(x) - u'(x)]^2\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3}$$

d. h. daß die ersten Ableitungen der Funktionen $u_n(x)$ im Mittel gegen die erste Ableitung der Funktion $u(x)$ konvergieren. In § 6 wurde gezeigt, daß $B$ ein positiv-definiter Operator ist; aus Satz 1 ergibt sich, daß mit $u_n(x) \xrightarrow{E} u(x)$ gleichzeitig auch $u_n(x) \xrightarrow{M} u(x)$ gilt. Leicht kann man zeigen, daß in dem betrachteten Beispiel gilt: $u_n(x) \to u(x)$ gleichmäßig im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Zum Beweis bemerken wir vor allem, daß auf Grund der Randbedingungen $u_n(0) - u(0) = 0$ ist, und deshalb

$$u_n(x) - u(x) = \int_0^x [u_n'(t) - u'(t)]\, dt$$

gilt. Das Integral schätzen wir nach der Bunjakowskischen Ungleichung ab, indem wir die Eins als einen Faktor des Integranden nehmen. Das ergibt

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \left\{\int_0^x 1^2 \cdot dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^x [u_n'(t) - u'(t)]^2\, dt\right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{x} \left\{\int_0^x [u_n'(t) - u'(t)]^2\, dt\right\}^{1/2} \leq \left\{\int_0^1 [u_n'(t) - u'(t)]^2\, dt\right\}^{1/2}.$$

Der letzte Ausdruck hängt nicht von $x$ ab und strebt wegen der Bedingung (3) gegen Null. Nach dem bekannten Kriterium von Weierstrass[1]) konvergiert $u_n(x) \to u(x)$ gleichmäßig.

[1]) Siehe Smirnow [1], Punkt 147, wo das Kriterium von Weierstrass für Reihen gegeben wird. Dem Leser wird es nicht schwerfallen, ein analoges Kriterium für Folgen zu formulieren und zu beweisen.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Operator $-\Delta$ ($\Delta$ ist der LAPLACE-Operator), der für alle auf dem Rand $S$ eines Gebietes $\Omega$ verschwindenden Funktionen definiert ist. Wir haben gesehen (§ 6), daß dieser Operator positiv ist. Unten (siehe § 22) wird gezeigt, daß er auch positiv-definit ist. Die Energie einer Funktion $u(P) \in D_{-\Delta}$ ist gleich (vgl. § 6)

$$|u|^2 = (-\Delta u, u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega.$$

Wenn $u_n(P) \xrightarrow{E} u(P)$, dann heißt das im vorliegenden Fall

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Daraus ergibt sich leicht

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Also bedeutet im vorliegenden Fall die Konvergenz bezüglich der Energie, daß die ersten Ableitungen der Funktionen $u_n(P)$ im Mittel gegen die entsprechenden ersten Ableitungen der Funktion $u(P)$ streben. Aus der Tatsache, daß der Operator $-\Delta$ positiv-definit ist, ergibt sich infolge von Satz 1, daß $u_n(P)$ für das Gebiet $\Omega$ im Mittel gegen $u(P)$ konvergiert. Auch folgende schärfere Behauptung ist richtig: Im hier betrachteten Fall folgt aus der Beziehung $u_n(P) \xrightarrow{E} u(P)$, daß $u_n(P)$ gegen $u(P)$ im Mittel konvergiert auf einer beliebigen stückweise glatten Fläche (bzw. Kurve, wenn das Gebiet $\Omega$ eben ist), die ganz in $\Omega$ gelegen ist; insbesondere konvergiert $u_n$ im Mittel gegen $u$ auf dem Rand des Gebietes $\Omega$.

Wir nehmen jetzt an, daß der Operator $A$ von vornherein positiv ist, und betrachten das Skalarprodukt $(Au, v)$. Es hat Sinn, wenn $u \in D_A$ und $v$ eine willkürliche Funktion mit endlicher Norm ist. Wir wollen dieses Produkt unter der Voraussetzung betrachten, daß nicht nur $u$, sondern auch $v$ imDefinitionsbereich des Operators $A$ liegt.[1]) In diesem Falle werden wir die Größe $(Au, v)$ das *energetische Produkt* der Funktionen $u(P)$ und $v(P)$ nennen und es mit dem Symbol $[u, v]$ bezeichnen, so daß

$$[u, v] = (Au, v) = \int_\Omega v \cdot Au\, d\Omega; \quad u \in D_A, \quad v \in D_A \tag{4}$$

gilt. Es ist bemerkenswert, daß *das energetische Produkt dieselben Eigenschaften* A *bis* D *besitzt, wie das Skalarprodukt von Funktionen* (siehe § 3). Prüfen wir das nach. Wir haben

$$[v, u] = (Av, u).$$

Ein Operator $A$, der positiv ist, ist auch symmetrisch, deshalb ist $(Av, u) = (v, Au) = (Au, v) = [u, v]$, und die Eigenschaft A ist bewiesen. Die Eigenschaft B folgt

[1]) Insbesondere genügt $v$ denselben Randbedingungen wie $u$.

aus der Linearität des Operators $A$, die Eigenschaften C und D aus seiner Positivität.

Wir bemerken noch, daß für den identischen Operator das energetische Produkt in das Skalarprodukt der Funktionen übergeht.

Aus den Formeln (1) und (4) ist ersichtlich, daß das energetische Produkt mit der Norm der Energie ebenso zusammenhängt, wie das Skalarprodukt mit der gewöhnlichen Norm. Durch Wiederholung der Überlegungen des § 3 überzeugt man sich leicht, daß die Norm der Energie die Eigenschaften a) bis d) der gewöhnlichen Norm besitzt. Insbesondere gilt die Ungleichung

$$|[u, v]| \leq |u| \cdot |v|, \tag{5}$$

die zur Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI analog ist, und ebenfalls die Dreiecksungleichung

$$|u + v| \leq |u| + |v|. \tag{6}$$

## § 9. Über lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Die Funktionen $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$ heißen *linear abhängig*, wenn man konstante Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ angeben kann, die nicht alle verschwinden, so daß die Identität

$$a_1 u_1(P) + a_2 u_2(P) + \cdots + a_n(P) \equiv 0 \tag{1}$$

erfüllt ist. Die genannten Funktionen heißen *linear unabhängig*, wenn die Identität (1) nur mit

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

erfüllbar ist. Die Begriffe der linearen Abhängigkeit bzw. linearen Unabhängigkeit sind dem Leser z. B. aus der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen bekannt (SMIRNOW [2], Punkt 26). Bekannt ist auch das Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Funktionen, daß im Nichtverschwinden ihrer WRONSKIschen Determinante besteht. Im vorliegenden Paragraphen geben wir ein anderes derartiges Kriterium an, das für die folgenden Untersuchungen wesentlich besser geeignet ist.

**Satz 1.** *Die Funktionen $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$ seien in einem gewissen Gebiet $\Omega$ gegeben und mögen im Definitionsbereich eines gewissen positiven Operators $A$ liegen. Damit die genannten Funktionen linear abhängig sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante*

$$\begin{vmatrix} [u_1, u_1], & [u_1, u_2], & \ldots, & [u_1, u_n] \\ [u_2, u_1], & [u_2, u_2], & \ldots, & [u_2, u_n] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [u_n, u_1], & [u_n, u_2], & \ldots, & [u_n, u_n] \end{vmatrix} \tag{2}$$

*gleich Null ist.*

Die Determinante (2) heißt GRAM*sche Determinante* der Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Wir erinnern daran, daß

$$[u_i, u_k] = (A u_i, u_k) = \int_\Omega u_k \cdot A u_i \, d\Omega$$

das energetische Produkt der Funktionen $u_i(P)$ und $u_k(P)$ ist.

**Beweis.** 1. Die Funktionen $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$ seien linear abhängig. Dann existieren Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die nicht sämtlich gleich Null sind, so daß

$$a_1 u_1(P) + a_2 u_2(P) + \cdots + a_n u_n(P) = 0$$

gilt. Beide Seiten dieser Gleichung multiplizieren wir energetisch mit $u_k(P)$, wo $k$ irgendeine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist:

$$[u_k, u_1]\, a_1 + [u_k, u_2]\, a_2 + \cdots + [u_k, u_n]\, a_n = 0.$$

Wenn man $k$ die Werte $1, 2, \ldots, n$ erteilt, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &[u_1, u_1]\, a_1 + [u_1, u_2]\, a_2 + \cdots + [u_1, u_n]\, a_n = 0, \\ &[u_2, u_1]\, a_1 + [u_2, u_2]\, a_2 + \cdots + [u_2, u_n]\, a_n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &[u_n, u_1]\, a_1 + [u_n, u_2]\, a_2 + \cdots + [u_n, u_n]\, a_n = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

das man als System von $n$ homogenen Gleichungen mit den $n$ Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ auffassen kann. Wie wir wissen, besitzt dieses System eine Lösung, in welcher nicht alle Unbekannten verschwinden, deshalb ist die Determinante dieses Systems gleich Null, und das ist gerade die GRAMsche Determinante der Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

2. Die Determinante (2) sei gleich Null. Wir bilden das System (3). Es hat eine Lösung, in der nicht alle Unbekannten $a_k$ gleich Null sind. Wir wollen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eben diese Lösung verstehen. Wir setzen

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = u;$$

nach Eigenschaft B des Skalarproduktes[1]) kann man die Gleichungen (3) in der Form

$$[u_1, u] = 0; \quad [u_2, u] = 0, \quad \ldots, \quad [u_n, u] = 0$$

darstellen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a_1$, die zweite mit $a_2$ usw. Die erhaltenen Gleichungen addieren wir. Wiederum infolge der Eigenschaft B kann man dem Ergebnis die Gestalt $[u, u] = 0$ geben. Nach Eigenschaft D des Skalarproduktes ist $u \equiv 0$, was zu beweisen war.

Aus Satz 1 folgt sofort, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit von Funktionen darin besteht, daß ihre GRAMsche Determinante von Null verschieden ist.

Wir betrachten den Spezialfall, daß $A$ der identische Operator ist. Die Bedingung, daß die Funktionen im Definitionsbereich $D_A$ des Operators liegen sollen, geht dann einfach in die Bedingung über, daß diese Funktionen eine endliche Norm haben müssen; das energetische fällt mit dem skalaren Produkt zusammen. Als unmittelbare Folgerung aus Satz 1 erhält man dann den

---

[1]) Wir erinnern daran, daß die Eigenschaften A bis D des Skalarproduktes auch für das energetische Produkt gelten.

**Satz 2.** *Damit die Funktionen $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$, die eine endliche Norm besitzen, linear abhängig sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante*

$$\begin{vmatrix} (u_1, u_1), & (u_1, u_2), & \ldots, & (u_1, u_n) \\ (u_2, u_1), & (u_2, u_2), & \ldots, & (u_2, u_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (u_n, u_1), & (u_n, u_2), & \ldots, & (u_n, u_n) \end{vmatrix} \tag{4}$$

*gleich Null ist.*

Infolge der in § 5 getroffenen Beschränkungen haben Funktionen, die im Definitionsbereich eines beliebigen positiven Operators liegen, in jedem Falle eine endliche Norm, deshalb kann man die beiden Sätze des vorliegenden Paragraphen auf solche Funktionen anwenden.

Zum Schluß bemerken wir, daß die identisch verschwindende Funktion mit jeder beliebigen anderen Funktion zusammen linear abhängig ist.

## § 10. Orthogonalität und Orthogonalreihen

Zwei Funktionen heißen *orthogonal im Gebiet $\Omega$*, wenn ihr Skalarprodukt bezüglich dieses Gebietes gleich Null ist. So sind die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ im Intervall $0 < x < 2\pi$ orthogonal, da

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

ist. Ebenso sind die Funktionen $x^2 - y^2$ und $xy$ im Kreis $x^2 + y^2 < 1$ orthogonal, da

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} (x^2 - y^2)\, xy \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \varrho^5 \, d\varrho \int_0^{2\pi} \cos 2\vartheta \sin 2\vartheta \, d\vartheta = 0$$

ist. Zur Berechnung des Integrals haben wir durch $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$ Polarkoordinaten eingeführt.

Die Orthogonalitätseigenschaft der trigonometrischen Funktionen spielt eine wichtige Rolle in der Analysis — sie wird beim Aufbau der Theorie der FOURIER-Reihen verwendet. In diesem Paragraphen werden Orthogonalsysteme allgemeinerer Form betrachtet.

Wir führen noch den Begriff der *normierten Funktion* ein. So wird eine Funktion genannt, wenn ihre Norm gleich Eins ist.

Eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen wird ein *Orthogonalsystem* genannt, wenn die Funktionen dieses Systems paarweise orthogonal sind. Ein solches System heißt darüber hinaus *orthonormal*, wenn alle Funktionen des Systems normiert sind. Wenn also $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ im Gebiet $\Omega$ ein Orthonormalsystem bilden, dann ist nach Definition

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m; \end{cases} \tag{1}$$

das Skalarprodukt in (1) bezieht sich auf das Gebiet $\Omega$.

Ein beliebiges Orthogonalsystem läßt sich leicht zu einem Orthonormalsystem machen; dazu genügt es, jede Funktion des Systems durch ihre Norm zu dividieren, die wir stets als endlich und von Null verschieden voraussetzen wollen.

Die Funktionen eines Orthonormalsystems sind linear unabhängig; wenn nämlich $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ paarweise orthogonal und normiert sind, dann sind in ihrer Gramschen Determinante die Diagonalelemente gleich Eins, die übrigen aber gleich Null. Und dann wird die Gramsche Determinante gleich Eins. Nach Satz 2, § 9, sind die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dann linear unabhängig.

Wenn $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$ ist und wenn die Summanden paarweise orthogonal sind, dann ist

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \cdots + \|\varphi_n\|^2. \tag{2}$$

Der Beweis dieser Beziehung, die eine eigentümliche Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras darstellt, ist sehr einfach:

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} \varphi_m\right) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m).$$

Wenn $k \neq m$ ist, dann ist $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$, und die Doppelsumme geht in eine einfache über, so daß

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_k)$$

ist, was wegen der Definition der Norm

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|^2$$

ergibt.

Die Formel (2) läßt sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo $\varphi$ die Summe einer unendlichen Reihe orthogonaler Funktionen ist, wenn diese Reihe nur im Mittel konvergiert. Es sei

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k,$$

die Reihe konvergiere im Mittel, und die Glieder dieser Reihe seien paarweise orthogonal. Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k,$$

so daß $s_n \xrightarrow{M} \varphi$. Nach dem Bewiesenen ist

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|^2,$$

andererseits ist nach Satz 3, § 7, $\|s_n\|^2 \to \|\varphi\|^2$. Daraus folgt

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|^2. \tag{$2_1$}$$

Wenn insbesondere das System der Funktionen $\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ orthonormal ist, und wenn

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \tag{3}$$

ist (die Reihe wird als im Mittel konvergent vorausgesetzt), dann gilt

$$\|\varphi\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{4}$$

Nebenbei haben wir folgendes Resultat erhalten: Wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n} a_n \varphi_n,$$

wo die Funktionen $\varphi_n(P)$ orthonormiert seien, im Mittel konvergiert, dann konvergiert notwendigerweise auch die Reihe der Quadrate ihrer Koeffizienten. Man kann zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, d. h. wenn die Reihe (4) konvergiert, dann konvergiert die Reihe (3) im Mittel gegen eine gewisse Funktion, deren Norm gleich der Summe der Reihe (4) ist.

**Beispiele.** 1. Das klassische Beispiel bildet das System der Funktionen

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \tag{5}$$

die im Intervall $0 < x < 2\pi$ orthogonal sind; wegen der Periodizität der Funktionen des Systems sind sie in einem beliebigen Intervall der Länge $2\pi$ orthogonal. Um das System (5) in ein orthonormiertes zu überführen, genügt es, die erste Funktion durch $\sqrt{2\pi}$ zu dividieren, die übrigen durch $\sqrt{\pi}$.

2. Das System der Funktionen

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots \tag{6}$$

ist im Intervall $0 < x < \pi$ orthogonal. Das zugehörige orthonormierte System ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \ldots. \tag{$6_1$}$$

3. In demselben Intervall ist das System

$$\sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

orthogonal. Das zugehörige orthonormierte System ist

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{$7_1$}$$

4. Im Quadrat $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ ist z. B. das System

$$\frac{2}{\pi} \sin mx \sin ny, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

orthonormiert.

5. Die LEGENDREschen Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

sind im Intervall $-1 < x < 1$ orthogonal. Bekanntlich ist

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

deshalb wird das zugehörige Orthonormalsystem von den Polynomen

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gebildet.

Es sei in einem gewissen Gebiet $\Omega$ das System der orthonormierten Funktionen $\varphi_k(P)$, $k = 1, 2, \ldots$ gegeben, sowie eine Funktion $u(P)$ mit endlicher Norm. Wir geben eine natürliche Zahl $n$ vor und stellen folgende Aufgabe: Es sind Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ so zu wählen, daß die Norm $\|u - s_n\|$, wo $s_n(P) = \alpha_1 \varphi_1(P) + \alpha_2 \varphi_2(P) + \cdots + \alpha_n \varphi_n(P)$ ist, möglichst klein wird. Wir haben

$$\begin{aligned} \|u - s_n\|^2 = (u - s_n, u - s_n) &= (u, u) - 2(u, s_n) + (s_n, s_n) \\ &= \|u\|^2 - 2(u, s_n) + \|s_n\|^2. \end{aligned}$$

Nach den Formeln (3) und (4) ist

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2.$$

Ferner ist

$$(u, s_n) = \left(u, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u, \varphi_k).$$

Die Skalarprodukte

$$(u, \varphi_k) = \int_{\Omega} u(P)\, \varphi_k(P)\, d\Omega \tag{10}$$

werden FOURIER-*Koeffizienten* der Funktion $u(P)$ bezüglich des Orthonormalsystems $\varphi_n(P)$ genannt. Zur Abkürzung setzen wir

$$(u, \varphi_k) = a_k,$$

dann ist

$$(u, s_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$$

und

$$\|u - s_n\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k).$$

Durch Hinzufügen und Subtrahieren der Größe $a_k^2$ unter dem Summenzeichen erhält man

$$\|u - s_n\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß die Größe $\|u - s_n\|$ ihr Minimum annimmt, wenn man $\alpha_k = a_k$ setzt, d. h. wenn man für die Konstanten die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $u(P)$ nimmt. Dann ist

$$s_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P) = \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)\, \varphi_k(P) \tag{11}$$

und

$$\|u - s_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \tag{12}$$

Die linke Seite der Gleichung (12) ist nicht negativ; daraus folgt die wichtige Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \|u\|^2. \tag{13}$$

Da man $n$ willkürlich wählen konnte, nehmen wir $n \to \infty$. Aus der Ungleichung (13) folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \tag{14}$$

konvergiert, wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \|u\|^2 \tag{15}$$

ist. Die Ungleichung (15) trägt den Namen BESSEL*sche Ungleichung*.

Der formale Übergang zu $n = \infty$ in der Summe $S_n$ führt auf die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(P) = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)\, \varphi_k(P), \tag{16}$$

die die FOURIER-*Reihe* oder die *Orthogonalreihe* der Funktion $u(P)$ bezüglich des Orthonormalsystems $\varphi_n(P)$ genannt wird. Es ist wichtig, zu klären, unter welchen Bedingungen die Reihe (16) gegen die Funktion $u(P)$ konvergiert.

Wir führen jetzt den Begriff eines *vollständigen Funktionensystems* ein. Das System der Funktionen $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ (ob sie orthogonal sind oder nicht, ist gleich) heißt vollständig im Gebiet $\Omega$ im Sinne der Konvergenz im Mittel, wenn man jede beliebige Funktion mit endlicher Norm in $\Omega$ durch eine Linearkombination einer endlichen Anzahl der Funktionen $\varphi_n(P)$ mit beliebiger Genauigkeit im Mittel approximieren kann. Diese Definition besagt also folgendes: Wenn das Funktionensystem $\varphi_n(P)$ vollständig ist und wenn $u(P)$ eine willkürliche Funktion mit endlicher Norm ist, dann kann man für jede beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ eine solche

natürliche Zahl $N$ und solche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ finden, daß

$$\|u - (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_N\varphi_N)\| = \left\|u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k\right\| < \varepsilon \tag{17}$$

gilt.

Man kann die Definition der Vollständigkeit etwas einengen und von einem *System, das bezüglich einer gegebenen Klasse von Funktionen vollständig ist,* sprechen, wenn man die Ungleichung (17) für jede beliebige Funktion $u(P)$ der gegebenen Klasse bilden kann. So kann man leicht zeigen, daß die Potenzen von $x$,

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots,$$

ein vollständiges System bezüglich der im Intervall $a \leq x \leq b$ stetigen Funktionen bilden. Denn es sei etwa $u(x)$ eine solche Funktion. Linearkombinationen von Potenzen sind einfach Polynome. Nach einem bekannten Satz von WEIERSTRASS (SMIRNOW [2], Punkt 154) kann man eine Folge von Polynomen konstruieren, die in $a \leq x \leq b$ gleichmäßig gegen $u(x)$ konvergiert. Daraus folgt, daß man nach Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ ein solches Polynom $P(x)$ finden kann, daß

$$|u(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leq x \leq b$$

ist. Quadriert und integriert man von $a$ bis $b$, dann erhält man

$$\int_a^b (u(x) - P(x))^2\, dx < \varepsilon^2$$

oder $\|u - P\| < \varepsilon$, was zu beweisen war. Analog kann man zeigen, daß das System (6) in der Klasse der stetigen und mit der Periode $2\pi$ periodischen Funktionen vollständig ist. Sehr schwierig, wenn auch möglich, ist es, die Vollständigkeit der genannten Systeme in der Klasse der Funktionen mit endlicher Norm zu zeigen.

**Satz 1.** *Wenn das Orthonormalsystem der Funktionen $\varphi_n(P)$ vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel bezüglich einer gewissen Funktionenklasse ist, dann konvergiert die* FOURIER-*Reihe einer beliebigen Funktion $u(P)$ der betreffenden Klasse,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n\varphi_n(P) = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_n)\,\varphi_n(P),$$

*im Mittel gegen diese Funktion. Dabei gilt die sogenannte Vollständigkeitsrelation*

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n)^2. \tag{18}$$

Wegen der Vollständigkeit des Systems kann man bei vorgegebenem $\varepsilon$ eine Zahl $N$ sowie Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ finden, so daß die Ungleichung (17) gilt. Die Größe $\left\|u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\varphi_k\right\|$ wird für $\alpha_k = a_k = (u, \varphi_k)$ am kleinsten. Deshalb ist

erst recht

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

Aus Formel (12) folgt, daß die Größe $\|u - S_n\|$, wo $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ ist, mit wachsendem $n$ abnimmt (oder mindestens nicht zunimmt), so daß

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon, \quad n \geq N$$

gilt. Die letzte Beziehung besagt auch, daß die FOURIER-Reihe im Mittel gegen die Funktion $u(P)$ konvergiert. Die Vollständigkeitsrelation erhalten wir aus (12) für $n \to \infty$, wenn wir berücksichtigen, daß wegen der bewiesenen Konvergenz der FOURIER-Reihe $\|u - S_n\| \to 0$ gilt.

Wie man leicht feststellt, haben wir bei den Überlegungen des vorliegenden Paragraphen nur die Eigenschaften A bis D des Skalarproduktes und die Eigenschaften a) bis d) der Norm benutzt. Die Tatsache, daß das Skalarprodukt das Integral über das Produkt zweier Funktionen darstellt, spielte keine Rolle. Wir können deshalb den Orthogonalitätsbegriff und die Theorie der Orthogonalreihen verallgemeinern, indem wir nicht das Skalarprodukt, sondern das energetische Produkt der Funktionen zugrunde legen. Wie wir unten sehen werden, wird uns diese Verallgemeinerung nützlich sein.

Wir wollen nur Funktionen betrachten, die zum Definitionsbereich $D_A$ eines gewissen positiven Operators $A$ gehören; wir führen das zugehörige energetische Produkt $[u, v] = (Au, v)$ und die Norm der Energie $|u| = \sqrt{(Au, u)}$ ein. Zwei Funktionen heißen *orthogonal bezüglich der Energie*, wenn ihr energetisches Produkt gleich Null ist; eine Funktion heißt *normiert bezüglich der Energie*, wenn ihre energetische Norm gleich Eins ist. Analog zum Vorstehenden definiert man Orthogonal- oder Orthonormalsysteme bezüglich der Energie. Wenn das Funktionensystem $\varphi_n(P)$ bezüglich der Energie orthonormiert ist, dann gilt

$$[\varphi_k, \varphi_m] = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \tag{19}$$

Wenn $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$ ist, wo die Summanden paarweise orthogonal bezüglich der Energie sind, dann ist $|\varphi|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \cdots + |\varphi_n|^2$; wenn

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \tag{20}$$

und das System $\varphi_n$ bezüglich der Energie orthonormiert ist, dann gilt

$$|\varphi|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2; \tag{21}$$

wenn also die Funktionen $\varphi_n$ bezüglich der Energie orthonormiert sind, und die Reihe (20) bezüglich der Energie konvergiert, dann konvergiert notwendigerweise auch die Reihe (21).

Wenn ein bezüglich der Energie orthonormiertes System von Funktionen $\varphi_n(P)$ und irgendeine Funktion $u(P) \in D_A$ gegeben ist, dann kann man das Problem der Bestimmung solcher Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ stellen, daß die energetische Norm $|u - S_n|$, wo $S_n(P) = \alpha_1\varphi_1(P) + \alpha_2\varphi_2(P) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(P)$ ist, möglichst klein wird. Wie früher finden wir, daß

$$\alpha_k = a_k = [u, \varphi_k]$$

sein muß, wobei infolge der BESSELschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [u, \varphi_k]^2 \leq |u|^2 \tag{22}$$

gilt. Für die Größen $[u, \varphi_k]$ behalten wir die Bezeichnung FOURIER-Koeffizienten bei. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} [u, \varphi_k]\, \varphi_k \tag{23}$$

wollen wir Orthogonalreihe bezüglich der Energie der Funktion $u(P)$ nennen, aber auch FOURIER-Reihe dieser Funktion. Analog wie früher führt man den Begriff eines bezüglich der Energie oder im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie vollständigen Funktionensystems ein. Es sei eine Klasse von Funktionen aus $D_A$ gegeben; insbesondere kann diese Klasse mit $D_A$ zusammenfallen. Das System der Funktionen $\varphi_n(P) \in D_A$ nennen wir *vollständig bezüglich der Energie in bezug auf die gegebene Funktionenklasse*, wenn bei Vorgabe einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ und einer beliebigen Funktion $u(P)$ aus der gegebenen Klasse eine solche natürliche Zahl $N$ und solche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ gefunden werden können, daß die Ungleichung

$$|u - (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_N\varphi_N)| < \varepsilon \tag{24}$$

erfüllt ist. Es gilt

**Satz 2.** *Wenn das bezüglich der Energie orthonormierte System der Funktionen $\varphi_n(P)$ (bezüglich der Energie) vollständig in bezug auf eine bestimmte Funktionenklasse ist, dann konvergiert die* FOURIER-*Reihe einer beliebigen Funktion $u(P)$ dieser Klasse,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u, \varphi_n]\, \varphi_n(P),$$

*bezüglich der Energie gegen diese Funktion. Dabei gilt die Vollständigkeitsrelation*

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [u, \varphi_n]^2. \tag{25}$$

Wir verzichten auf einen Beweis dieses Satzes, da er Wort für Wort mit dem Beweis des Satzes 1 zusammenfällt.

Wir bemerken noch folgendes: Wenn der Operator $A$, der die Energie bestimmt, nicht nur positiv, sondern auch positiv-definit ist, dann konvergiert die in Satz 2 genannte FOURIER-Reihe sogar im Mittel.

**Beispiel.** Als Operator $Au$ wählen wir den Operator $-\frac{d^2u}{dx^2}$, wobei die Funktionen $u(x)$ den Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$ unterworfen seien. Dann ist

$$[u, v] = -\int_0^\pi v\frac{d^2u}{dx^2}dx = -v\frac{du}{dx}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^\pi \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

und

$$|u|^2 = \int_0^\pi \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Daraus ist ersichtlich, daß für unser Beispiel die energetische Orthogonalität zweier Funktionen die gewöhnliche Orthogonalität ihrer Ableitungen bedeutet. Wir erwähnen noch, daß hier die Konvergenz bezüglich der Energie in die Konvergenz im Mittel der Ableitungen übergeht.

Das System der Funktionen

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ist bezüglich der Energie orthonormiert und vollständig in der Klasse $D_A$. Zunächst ist

$$[\varphi_n, \varphi_m] = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases}$$

so daß unser System bezüglich der Energie orthonormiert ist. Die Vollständigkeit in bezug auf die Energie läßt sich wie folgt zeigen. Das System (6) ist im Intervall $0 < x < \pi$ vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel, und jede Funktion $\psi(x)$ mit endlicher Norm läßt sich in eine im Mittel konvergente Fourier-Reihe

$$\psi(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

entwickeln. Wir setzen $\psi(x) = u'(x)$, wo $u(x) \in D_A$ ist. Dann ist $u(0) = u(1) = 0$, und

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u'(x)\,dx = u(\pi) - u(0) = 0;$$

daraus folgt

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^*\varphi_n'(x); \quad b_n^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, b_n.$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Ableitung einer beliebigen Funktion aus $D_A$ durch eine Linearkombination der Ableitungen von $\varphi_n(x)$ mit beliebiger Genauigkeit im Mittel approximiert werden kann; das bedeutet in unserem Fall, daß das System $\varphi_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \sin nx$ bezüglich der Energie vollständig ist.

Die gewöhnliche Orthogonalität ist der Spezialfall der Orthogonalität bezüglich der Energie, wenn $A$ der identische Operator ist. Einen anderen interessanten Spezialfall erhält man, wenn $A$ der Operator der Multiplikation mit einer nicht negativen Funktion $\sigma(P)$ ist. In diesem Falle ist

$$[u, v] = \int_{\Omega} \sigma(P)\, u(P)\, v(P)\, d\Omega;$$

die Orthogonalität der Funktionen $u(P)$ und $v(P)$ bezüglich der Energie bedeutet, daß

$$\int_{\Omega} \sigma(P)\, u(P)\, v(P)\, d\Omega = 0$$

gilt, und das ist die sogenannte *Orthogonalität mit der Belegung* $\sigma(P)$. Wir führen zwei Beispiele für Funktionensysteme an, die mit einer Belegung orthogonal sind.

1. Es seien $\alpha_{k,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ die positiven Wurzeln der Besselschen Funktionen $J_k(x)$. Das System $J_k(\alpha_{k,n} x)$, $n = 1, 2, \ldots$ ist im Intervall $0 < x < 1$ orthogonal mit der Belegung $x$, wenn nur $k > -1$ ist.

2. Die Tschebyschewschen Polynome

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sind im Intervall $-1 < x < 1$ orthogonal mit der Belegung $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Eine wichtige Rolle spielt in der Theorie der Orthogonalreihen das sogenannte Orthogonalisierungsverfahren, das zur Umwandlung einer beliebigen Folge linear unabhängiger Funktionen in ein Orthonormalsystem dient. Es sei $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P), \ldots$ eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen, die im Definitionsbereich eines gewissen positiven Operators liegen mögen, und die Funktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ seien bei beliebigem $n$ linear unabhängig. Wir bilden eine bezüglich der Energie orthonormierte Folge $\omega_1(P), \omega_2(P), \ldots, \omega_n(P), \ldots$, so daß bei beliebigem $n$ die Funktion $\omega_n(P)$ linear durch $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ und umgekehrt $\varphi_n(P)$ linear durch $\omega_1(P), \omega_2(P), \ldots, \omega_n(P)$ ausgedrückt wird.

Da die Funktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ linear unabhängig sind, ist $\varphi_1(P) \not\equiv 0$ und deshalb $|\varphi_1| > 0$. Wir setzen

$$\psi_1(P) = \varphi_1(P), \quad \omega_1(P) = \frac{\psi_1(P)}{|\psi_1|},$$

dann ist die Funktion $\omega_1(P)$ normiert. Wir nehmen jetzt an, die orthonormierten Funktionen $\omega_1(P), \omega_2(P), \ldots, \omega_{n-1}(P)$ seien bereits konstruiert. Wir setzen

$$\psi_n(P) = \varphi_n(P) - \sum_{k=1}^{n-1} [\varphi_n, \omega_k]\, \omega_k(P).$$

Offensichtlich ist die Funktion $\psi_n(P)$ orthogonal zu $\omega_1(P), \omega_2(P), \ldots, \omega_{n-1}(P)$. Ferner ist $\psi_n(P) \not\equiv 0$, andernfalls wären die Funktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$

linear abhängig. Jetzt genügt es,

$$\omega_n(P) = \frac{\psi_n(P)}{|\psi_n|}$$

zu setzen. Nach Konstruktion ist die Folge $\omega_1(P)$, $\omega_2(P)$, ... bezüglich der Energie orthonormiert, und $\omega_n(P)$ läßt sich linear durch $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$, ..., $\varphi_n(P)$ ausdrücken. $\varphi_n(P)$ seinerseits läßt sich linear durch $\omega_1(P)$, $\omega_2(P)$ ..., $\omega_n(P)$ ausdrücken:

$$\varphi_n(P) = |\psi_n| \, \omega_n(P) + \sum_{k-1}^{n-1} [\varphi_n, \omega_k] \, \omega_k(P).$$

Wir haben das Orthogonalitätsverfahren in Anwendung auf die Orthogonalität bezüglich der Energie dargelegt. Dieses Verfahren läßt sich mühelos auch auf die gewöhnliche Orthogonalität übertragen; es genügt vorauszusetzen, daß der die Energie bestimmende positive Operator der identische Operator ist.

Zum Schluß des Paragraphen betrachten wir einige Eigenschaften orthogonaler Systeme. Der Klarheit wegen werden wir von gewöhnlicher Orthogonalität sprechen, obgleich sich alles ohne Änderungen auch auf die Orthogonalität bezüglich der Energie ausdehnen läßt.

Ein Orthonormalsystem nennen wir *vollständig* in bezug auf eine Funktionenklasse, wenn für eine beliebige Funktion dieser Klasse die Vollständigkeitsrelation (18) gilt. Aus Satz 1 ergibt sich, daß die Vollständigkeit eines Systems in einer Funktionenklasse seine Abgeschlossenheit in derselben Klasse nach sich zieht. Auch das umgekehrte gilt: Ein System, das in bezug auf eine bestimmte Klasse abgeschlossen ist, ist auch vollständig in bezug auf dieselbe Klasse. Denn für eine beliebige Funktion $u(P)$ aus besagter Klasse gilt die Identität (18). Wir bezeichnen die $n$-te Teilsumme der Orthogonalreihe der Funktion $u(P)$ mit $s_n$. Nach Formel (12) ist

$$\|u - s_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Infolge der Vollständigkeitsrelation gilt $\|u - s_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Das bedeutet, daß die Funktion $s_n$, die selbst eine Linearkombination der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ist, bei hinreichend großem $n$ die Funktion $u$ im Mittel mit beliebiger Genauigkeit approximiert. Da $u$ eine beliebige Funktion der gegebenen Klasse ist, so ist das System $\varphi_n$ in bezug auf die gegebene Klasse vollständig.

Wenn ein Orthonormalsystem in bezug auf eine gegebene Klasse von Funktionen vollständig ist, dann gibt es in dieser Klasse keine Funktion, die nicht identisch verschwindet und zu allen Funktionen des Systems orthogonal ist. Denn wenn $u_0$ eine solche Funktion ist, dann ist $(u_0, \varphi_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$; nach der Vollständigkeitsrelation ist

$$\|u_0\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \varphi_n)^2 = 0$$

und nach Eigenschaft a) der Norm (§ 3) ist $u_0 \equiv 0$.

KAPITEL III

# DIE ENERGETISCHE METHODE

## § 11. Ein Satz über ein minimales Funktional

Unsere Hauptaufgabe ist die Lösung von Differentialgleichungen bei entsprechenden Randbedingungen. Wir wollen annehmen, daß die Randbedingungen homogen sind; die zugehörige Differentialgleichung wird dann im allgemeinen inhomogen sein. Wir betrachten die linke Seite der Gleichung als einen Operator, der auf einer Menge von Funktionen definiert ist, welche die Randbedingungen erfüllen. Wir bezeichnen diesen Operator mit dem Buchstaben $A$ und finden, daß unsere Aufgabe in der Lösung der Gleichung

$$A u = f(P) \tag{1}$$

besteht, wo $f(P)$ eine gegebene Funktion ist; *im folgenden werden wir stets voraussetzen, daß diese Funktion eine endliche Norm hat.* Wir betonen nochmals: Die Gleichung (1) zu lösen bedeutet, eine Funktion $u(P) \in D_A$ zu finden, für die die Gleichung (1) identisch erfüllt ist. Der Umstand, daß die gesuchte Funktion im Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ liegt, bedeutet außerdem, daß diese Funktion die Randbedingungen des gestellten Problems erfüllt. Die Gleichung (1) zu lösen bedeutet also, eine der gegebenen Gleichung (meistens einer Differentialgleichung) und den Randbedingungen des Problems genügende Funktion zu finden. Wir werden die Gleichung (1) unter der Voraussetzung, daß der Operator $A$ positiv ist, untersuchen.

**Satz 1.** *Wenn der Operator positiv ist, dann kann die Gleichung $A u = f$ nicht mehr als eine Lösung haben.*

Die Gleichung möge tatsächlich zwei Lösungen $u_1$ und $u_2$ haben, so daß $A u_1 = f$ und $A u_2 = f$ ist. Wir setzen $u_1 - u_2 = \tilde{u}$. Subtraktion liefert, da der Operator $A$ linear ist, $A \tilde{u} = 0$. Wir multiplizieren skalar mit $\tilde{u}$ und erhalten $(A \tilde{u}, \tilde{u}) = 0$. Der Operator $A$ war aber positiv, deshalb ist notwendig $\tilde{u} \equiv 0$ und folglich $u_1 \equiv u_2$.

Die in den Lehrbüchern der mathematischen Physik angeführten Eindeutigkeitssätze für die Lösung der wichtigsten Randwertprobleme für elliptische Gleichungen sind meistens Spezialfälle des eben bewiesenen Satzes, und der Beweis wird dort im wesentlichen nach demselben Schema geführt. Ebenso verhält es sich mit dem bekannten Kriterium von KIRCHHOFF über die Eindeutigkeit der Lösung der Grundaufgabe der statischen Elastizitätstheorie.[1])

**Satz 2.** *Es sei $A$ ein positiver Operator. Wenn die Gleichung* (1) *eine Lösung hat, dann ist von denjenigen Werten, welche alle möglichen Funktionen aus dem Defi-*

---

[1]) Siehe z. B. L. S. LEIBENSON [2].

*nitionsbereich* $D_A$ *des Operators* $A$ *dem quadratischen Funktional*

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \int_\Omega [u(P) \cdot Au - 2u(P)f(P)]\, d\Omega \tag{2}$$

*erteilen, derjenige am kleinsten, welcher diesem Funktional durch die Lösung der Gleichung* (1) *erteilt wird. Umgekehrt, wenn in* $D_A$ *eine Funktion existiert, die dem Funktional* (2) *seinen kleinsten Wert erteilt, dann ist diese Funktion die Lösung der Gleichung* (1).

Satz 2 werden wir den *Satz vom Minimalfunktional* nennen.

Die Funktion $u_0$ sei die (eindeutige, infolge von Satz 1) Lösung der Gleichung (1), so daß $Au_0 = f$ ist. Wir ersetzen in (2) $f$ durch $Au_0$:

$$F(u) = (Au, u) - 2(Au_0, u).$$

Wir erinnern uns an das energetische Produkt und erhalten

$$(Au, u) = [u, u], \quad (Au_0, u) = [u_0, u]$$

und

$$F(u) = [u, u] - 2[u_0, u].$$

Wenn wir die Größe $[u_0, u_0]$ addieren und subtrahieren, erhalten wir

$$F(u) = [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0]$$

oder

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2. \tag{3}$$

Daraus ist ersichtlich, daß $F(u)$ sein Minimum dann und nur dann annimmt, wenn $u = u_0$ ist; damit ist der erste Teil von Satz 2 bewiesen. Wir bemerken, daß

$$\min F(u) = F(u_0) = -|u_0|^2 = -(Au_0, u_0) \tag{4}$$

ist.

Möge jetzt eine Funktion $u_0(P) \in D_A$ existieren, die das Funktional (2) zum Minimum macht. $\eta(P)$ sei eine willkürliche Funktion aus $D_A$ und $\lambda$ eine willkürliche reelle Zahl. Dann ist nach unseren Bedingungen

$$F(u_0 + \lambda\eta) - F(u_0) \geq 0.$$

Unter Beachtung der Symmetrie des Operators $A$ kann man die letzte Ungleichung leicht auf die Form

$$2\lambda(Au_0 - f, \eta) + \lambda^2(A\eta, \eta) \geq 0$$

bringen. Die linke Seite dieser Ungleichung ist ein quadratisches Polynom in $\lambda$; es ist nicht negativ und seine Diskriminante deshalb $\leq 0$:

$$(Au_0 - f, \eta)^2 - (A\eta, \eta) \cdot 0 \leq 0.$$

Das ist nur möglich, wenn

$$(Au_0 - f, \eta) = 0 \tag{5}$$

ist.

Mit der Abkürzung $Au_0 - f(P) = \psi(P)$ können wir der letzten Gleichung die Form

$$\int_{\Omega} \psi(P)\,\eta(P)\,d\Omega = 0$$

geben. Wir müssen nun zeigen, daß $\psi(P) \equiv 0$ ist. Wir führen den Beweis unter der Voraussetzung, daß die Funktion $\psi(P)$ stetig ist. Wir nehmen an, daß in einem im Innern von $\Omega$ liegenden Punkt $P_0$ die Funktion $\psi(P)$ von Null verschieden ist; es sei etwa $\psi(P) > 0$. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\psi(P)$ kann man einen kleinen Kreis $\omega$ mit dem Mittelpunkt in $P_0$ bilden, der ganz im Innern von $\Omega$ liegt (Abb. 5) und in welchem $\psi(P) > 0$ ist. Die zu $D_A$ gehörenden Funktionen sollen zusammen mit ihren Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung — wir bezeichnen sie mit $k$ — stetig sein und gewissen homogenen Randbedingungen auf dem Rand $S$ des Gebietes genügen. Den aufgezählten Forderungen muß auch die Funktion $\eta(P)$ genügen; im übrigen ist sie willkürlich. Wir behalten das im Auge und wählen $\eta(P)$ gleich

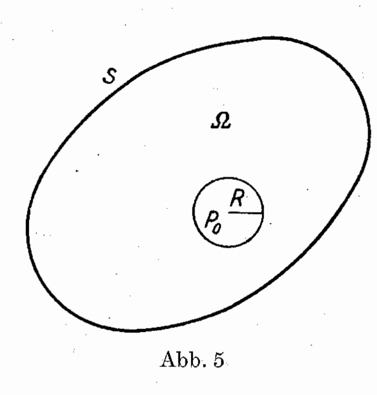


Abb. 5

$$\eta(P) = \begin{cases} (R^2 - r^2)^{k+1}, & \text{wenn} \quad P \in \omega, \\ 0 & \text{, wenn} \quad P \in \Omega - \omega; \end{cases}$$

darin bedeutet $R$ den Radius des Kreises $\omega$ und $r$ den Abstand der Punkte $P$ und $P_0$. Man sieht leicht, daß $\eta(P)$ in $\Omega$ zusammen mit seinen Ableitungen bis zur $k$-ten Ordnung einschließlich stetig ist; $\eta$ genügt den Randbedingungen, da sie homogen sind; auf $S$ und in der Nähe von $S$ ist die Funktion $\eta(P) \equiv 0$ (siehe § 8). Aus dem Gesagten folgt, daß $\eta(P) \in D_A$ ist und deshalb das Integral

$$\int_{\Omega} \psi(P)\,\eta(P)\,d\Omega = 0$$

zum Verschwinden bringt. Da $\eta(P) \equiv 0$ in $\Omega - \omega$ ist, so genügt es, über $\omega$ zu integrieren, und die Gleichung (5) nimmt die Form

$$\int_{\omega} \psi(P)\,(R^2 - r^2)^{k+1}\,d\Omega = 0$$

an. Diese Beziehung ist jedoch unmöglich, da nach Voraussetzung der Integrand nicht negativ, aber auch nicht identisch gleich Null ist. Damit ist gezeigt, daß $\psi(P) \equiv 0$ sein muß, und folglich genügt $u_0$ der Gleichung (1).

Wie wir unten sehen werden, ist in einer Reihe von Aufgaben der mathematischen Physik der Betrag des Funktionals (2) der potentiellen Energie des betrachteten Körpers proportional. In diesen Fällen *behauptet der Satz 2 die Gültigkeit des Minimalprinzips für die potentielle Energie*. Dieser Satz erlaubt es in den erwähnten Fällen, das Problem der Integration einer Differentialgleichung bei vorgegebenen Randbedingungen durch das Problem des Aufsuchens einer Funktion zu ersetzen, die ein Minimum des Funktionals (2) liefert; die direkten Me-

thoden, von denen wir später sprechen werden, gestatten es, eine Näherungslösung der letzteren Aufgabe mit verhältnismäßig einfachen Mitteln zu finden.

Das Lösungsverfahren für Aufgaben der mathematischen Physik, welches darin besteht, die Integration einer Differentialgleichung bei gegebenen Randbedingungen durch das Aufsuchen einer Funktion zu ersetzen, welche das Funktional (2) zum Minimum macht[1]), werden wir die *energetische Methode* nennen, einer mehr oder weniger eingebürgerten Tradition folgend.

**Beispiele.** 1. Wir stellen die Aufgabe, die Gleichung

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \tag{6}$$

bei den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{7}$$

zu integrieren. Unser Problem hat offensichtlich die Lösung $u_0 = x(1-x)$. Der Operator, der durch die linke Seite der Gleichung (6) und die Randbedingungen (7) bestimmt ist, ist positiv (sogar positiv-definit), infolge von Satz 2 erteilt deshalb die Funktion $x(1-x)$ dem Integral

$$F(u) = \int_0^1 \left(-u\frac{d^2u}{dx^2} - 4u\right) dx \tag{8}$$

seinen kleinsten Wert im Vergleich mit beliebigen anderen Funktionen, die den Bedingungen (7) genügen. Die Forderung, daß die Funktion $u(x)$ die Randbedingungen erfüllt, ist sehr wesentlich. Würde man etwa $u_1 = x(2-x)$ setzen, was die Bedingung $u(1) = 0$ verletzt, so fände man $F(u_1) = 4/3$, und es wäre $F(u_0) = -{}^1/_3 > F(u_1)$.

2. Die Gleichung (6) hat mit den Randbedingungen

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0 \tag{9}$$

die Lösung $u_2 = 3 - x^2$. Der Operator $-d^2u/dx^2$ ist bei den Randbedingungen (9) positiv (vgl. § 6). Wegen des Satzes 2 liefert die Funktion $3 - x^2$ den Minimalwert des Integrals (8) in der Klasse der Funktionen, die den Bedingungen (9) genügen.

Im Zusammenhang mit den soeben betrachteten Beispielen machen wir folgende Bemerkung. Wir integrieren in (8) partiell; unter Beachtung der Randbedingungen (9) bekommt man dann leicht

$$F(u) = \int_0^1 [u'^2(x) - 4u]\, dx + u^2(1). \tag{10}$$

Nach dem früher Gesagten ist klar, daß die Funktion $3 - x^2$ dem Ausdruck (10) ein Minimum erteilt in der Klasse derjenigen Funktionen, die die Randbedingungen (9) erfüllen. Das Bemerkenswerte daran ist, daß im vorliegenden Falle letztere Bedingung entbehrlich ist: Man kann behaupten, daß die Funktion $3 - x^2$ dem Ausdruck (10) ein Minimum erteilt im Vergleich mit beliebigen Funktionen,

[1]) Wir werden diese Aufgabe kurz das „Minimalproblem“ für das Funktional (2) nennen.

die im Intervall $0 \leq x \leq 1$ stetig sind und stetige erste Ableitungen besitzen, unabhängig davon, ob die Bedingung (9) erfüllt ist oder nicht. Beweisen wir das. $u(x)$ sei in $0 \leq x \leq 1$ stetig und stetig differenzierbar. Wir setzen $u(x) - u_2(x) = \eta(x)$, so daß $u = u_2 + \eta$ ist. Wir haben

$$F(u) = F(u_2 + \eta) = \int_0^1 [(u_2' + \eta')^2 - 4(u_2 + \eta)]\, dx + [u_2(1) + \eta(1)]^2$$

$$= \left\{\int_0^1 (u_2'^2 - 4u_2)\, dx + u_2^2(1)\right\}$$

$$+ \left\{2 \int_0^1 (u_2'\eta' - 2\eta)\, dx + 2u_2(1)\, \eta(1)\right\} + \left\{\int_0^1 \eta'^2\, dx + \eta^2(1)\right\}. \tag{11}$$

Rechts in (11) ist die erste geschweifte Klammer gleich $F(u_2)$, die dritte geschweifte Klammer ist positiv. Wir zeigen, daß die zweite geschweifte Klammer verschwindet. Wir erhalten durch partielle Integration

$$\int_0^1 u_2'\eta'\, dx = -\int_0^1 u_2''\eta\, dx + u'_2(1)\eta(1) - u'_2(0)\, \eta(0)$$

oder, wenn wir die Bedingungen (9) benutzen, denen die Funktion $u_2$ genügt,

$$\int_0^1 u_2'\eta'\, dx = -\int_0^1 u_2''\eta\, dx - u_2(1)\, \eta(1).$$

Wir setzen das in die zweite geschweifte Klammer in (11) ein und finden für diese Klammer den Wert

$$-2\int_0^1 (u_2'' + 2)\eta\, dx = 0,$$

da $u_2'' = -2$ ist. Jetzt ist

$$F(u) = F(u_2) + \left\{\int_0^1 \eta'^2\, dx + \eta^2(1)\right\},$$

und es ist offensichtlich, daß $F(u) > F(u_0)$ ist, wenn nur $\eta \not\equiv 0$ ist.

Die bei diesem Beispiel entdeckte sehr interessante Tatsache hängt damit zusammen, daß sich für das Funktional (8), das wir dann in der Form (10) dargestellt haben, die Bedingungen (9) als *natürliche* Randbedingungen erweisen. Die Frage der natürlichen Randbedingungen wird in § 17 ausführlich erörtert.

Der im vorliegenden Paragraphen bewiesene Satz 2 hat konditionalen Charakter: Er setzt die Existenz einer Lösung der Gleichung (1) oder (im zweiten Teil des Satzes 2) einer Funktion voraus, die dem Funktional $F(u)$ ein Minimum erteilt. *Wenn wir im folgenden von der Gleichung $Au = f$ sprechen, wo $A$ ein positiver*

*Operator ist, so setzen wir voraus, daß diese Gleichung eine Lösung mit endlicher Energie*[1]) *besitzt, sofern nichts Gegenteiliges gesagt ist.* In § 19 wird bewiesen, daß eine solche Lösung existiert, wenn der Operator $A$ positiv-definit ist und die Funktion $f$ eine endliche Norm hat.

## § 12. Darstellung der Lösung in Form einer Orthogonalreihe

Es sei bekannt, daß die Gleichung

$$Au = f(P), \tag{1}$$

wo $A$ ein positiver Operator ist und die Funktion $f(P)$ eine endliche Norm besitzt, eine Lösung $u_0(P)$ mit endlicher Energie hat. Dann kann man diese Lösung auf folgende Weise bilden.

Wir wählen eine Folge von *bezüglich der Energie vollständigen* Funktionen $\varphi_n(P)$. Wir nehmen an, daß diese Folge auch *orthonormiert bezüglich der Energie* ist; das kann man immer erreichen, indem man nötigenfalls das Orthogonalisierungsverfahren anwendet. Wir entwickeln die Funktion $u_0(P)$ in die Orthogonalreihe

$$u_0(P) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(P); \quad a_n = [u_0, \varphi_n].$$

Nach Formel (4) von § 8 ist

$$[u_0, \varphi_n] = (A u_0, \varphi_n);$$

nun genügt $u_0$ der Gleichung (1), deshalb ist $A u_0 = f$, $a_n = (f, \varphi_n)$, und schließlich

$$u_0(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(P). \tag{2}$$

Die Reihe (2) erlaubt es, die Lösung der Gleichung (1) zu bilden, da die Koeffizienten der Reihe sich auf einfache Weise durch die bekannten Funktionen $f(P)$ und $\varphi_n(P)$ ausdrücken. Die erwähnte Reihe konvergiert bezüglich der Energie; sie konvergiert darüber hinaus im Mittel, wenn der Operator $A$ positiv-definit ist.

**Beispiel.** Wir betrachten das Torsionsproblem für einen Stab, dessen Grundfläche das Rechteck $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ ist. Die Torsionsfunktion $\psi(x, y)$ genügt der POISSONschen Gleichung

$$-\Delta \psi = 2G\theta, \tag{3}$$

wo $G$ der Schubmodul ist, $\theta$ der Windungswinkel pro Einheit der Stablänge; die Funktion $\psi$ verschwindet auf den Seiten $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ des Rechtecks. Wie wir gesehen haben (§ 6), ist der Operator $-\Delta$ positiv, wenn sein Definitionsbereich aus Funktionen besteht, die auf dem Rande des Bereiches verschwinden. In unserem Falle wird das energetische Produkt zweier Funktionen

[1]) D. h. eine Lösung, für die die Norm bezüglich der Energie $|u| = \sqrt{(Au, u)}$ endlich ist.

$u(x, y)$ und $v(x, y)$ durch die Formel

$$[u, v] = -\int_0^a\int_0^b v(x, y)\, \Delta u(x, y)\, dx\, dy$$

gegeben; demgemäß haben wir für die Norm bezüglich der Energie

$$|u|^2 = -\int_0^a\int_0^b u(x, y)\, \Delta u\,(x, y)\, dx\, dy.$$

Die Funktionen

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}; \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

sind beliebig oft stetig differenzierbar und verschwinden auf dem Rand des Rechtecks, sie gehören daher zum Definitionsbereich des Operators in unserem Problem. Sie sind orthogonal bezüglich der Energie; um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß

$$\Delta\varphi_{mn}(x,y) = -\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = -\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\varphi_{mn}(x, y)$$

gilt. Jetzt ist

$$[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = -\int_0^a\int_0^b \varphi_{mn}\, \Delta\varphi_{rs}\, dx\, dy$$

$$= \pi^2\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{r\pi x}{a}\, dx \int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{s\pi y}{b}\, dy. \tag{5}$$

Wenn mindestens eine der Ungleichungen $m \neq r$ oder $n \neq s$ erfüllt ist, dann ist $[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = 0$, was gezeigt werden sollte. Wenn wir $r = m$ und $s = n$ setzen, erhalten wir

$$|\varphi_{mn}|^2 = \frac{\pi^2(b^2m^2 + a^2n^2)}{4ab},$$

so daß das System (5) nicht normiert ist. Wenn wir $\varphi_{mn}(x, y)$ durch $|\varphi_{mn}|$ dividieren, erhalten wir das System

$$\psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{6}$$

das bezüglich der Energie orthonormiert ist.

Nach Formel (2) wird die Torsionsfunktion durch die Reihe

$$\psi(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty}(2G\theta, \psi_{mn})\, \psi_{mn}(x, y) \tag{7}$$

dargestellt. Wir berechnen die Koeffizienten dieser Reihe:

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \int_0^a\int_0^b 2G\theta\psi_{mn}(x, y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{4G\theta}{\pi}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\,dx\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\,dy =$$

$$= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}\,[1 - (-1)^m]\,[1 - (-1)^n].$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Koeffizienten der Reihe (7) gleich Null sind, wenn wenigstens eine der Zahlen $m$ oder $n$ gerade ist; sind diese Zahlen aber beide ungerade, dann gilt

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{16\,abG\theta}{\pi^3 mn}\sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}.$$

In (7) eingesetzt, ergibt das

$$\psi(x, y) = \frac{32\,G\theta a^2b^2}{\pi^4}\sum_{m,\,n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)}. \tag{8}$$

Aus der allgemeinen Theorie ergibt sich, daß die Reihe (8) bezüglich der Energie konvergiert; wie die Formel (5) des § 6 besagt, bedeutet das, daß die entsprechenden Reihen der ersten Ableitungen im Mittel konvergieren. Man kann zeigen[1]), daß der Operator $-\Delta$ in unserer Aufgabe positiv-definit ist, daher konvergiert die Reihe (8) auch im Mittel. In Wirklichkeit konvergiert besagte Reihe sogar gleichmäßig. Jedoch zeigen einfache, wenn auch umfangreiche Berechnungen, daß die Konvergenz im Mittel der Reihe (8) und der Reihen ihrer ersten Ableitungen bedeutend schneller erfolgt, als die gleichmäßige Konvergenz (vgl. den Schluß von § 7).

## § 13. Die Minimalfolge und ihre Konvergenz

$\Phi(u)$ sei ein Funktional, dessen Werte nach unten beschränkt sind. Dann (Smirnow [1], Punkt 42) existiert eine genaue untere Grenze $d$ des Funktionals $\Phi(u)$:

$$d = \inf \Phi(u).$$

Wir führen folgende Definition ein: Eine Folge von Funktionen $u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, die zum Definitionsbereich des Funktionals $\Phi(u)$ gehören, soll *Minimalfolge* dieses Funktionals heißen, wenn $\lim_{n\to\infty}\Phi(u_n) = d$ gilt. Jetzt sei $A$ ein positiver Operator. Wenn die Gleichung

$$Au = f \tag{1}$$

[1]) Siehe § 22 und 23.

eine Lösung $u_0$ besitzt, dann geht das Funktional

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \int_\Omega (u \cdot Au - 2uf)\, d\Omega$$

in die Form

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2 \tag{2}$$

über, wie wir gesehen haben. Danach ist klar, daß $\inf F(u) = \min F(u) = -|u_0|^2$ ist, und daß eine Minimalfolge des Funktionals $F(u)$ durch die Gleichung

$$\lim F(u_n) = -|u_0|^2 \tag{3}$$

charakterisiert wird.

Große Bedeutung für die energetische Methode hat der

**Satz 1.** *Wenn die Gleichung* (1) *eine Lösung hat, dann konvergiert jede Minimalfolge des Funktionals* (2) *bezüglich der Energie gegen diese Lösung.*

Der Beweis ist sehr einfach. Wenn die Folge $u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Minimalfolge des Funktionals (2) ist, dann folgt aus (2) und (3)

$$F(u_n) = |u_n - u_0|^2 - |u_0|^2 \underset{n\to\infty}{\to} -|u_0|^2.$$

Daraus ergibt sich $|u_n - u_0| \to 0$, d. h. $u_n(P) \xrightarrow{E} u(P)$. Wenn $A$ ein positiv-definiter Operator ist, dann gilt gleichzeitig $u_n \xrightarrow{M} u_0$.

Der Satz 1 liegt vielen direkten Verfahren zugrunde. Um nämlich die Gleichung (1) zu lösen (vorausgesetzt, daß eine Lösung existiert), genügt es, für das Integral (2) eine Minimalfolge zu bilden; jedes ihrer Elemente bildet eine Näherungslösung der gegebenen Gleichung. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Bildung einer Minimalfolge. Die Existenz einer solchen Möglichkeit ergibt sich aus dem vorangegangenen Paragraphen: Wenn wir die Teilsummen der Reihe (2) in § 12 mit $u_n(P)$ bezeichnen,

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k(P),$$

dann gilt $u_n(P) \xrightarrow{E} u(P)$. Ein Mangel dieses Verfahrens liegt darin, daß der Orthogonalisierungsprozeß ziemlich mühselig ist. Die bei weitem wichtigste Methode zur Bildung einer Minimalfolge ist das Ritzsche Verfahren; wir erwähnen noch das Verfahren von Courant [1], das Verfahren „der Zurückführung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen" von L. W. Kantorowitsch [1], und die ebenfalls von L. W. Kantorowitsch vorgeschlagene „Methode des schnellsten Anwachsens"[1]). Die angeführten Verfahren werden in den nächsten Paragraphen des vorliegenden Kapitels mehr oder weniger ausführlich erläutert. Wir weisen noch auf die Methode der kleinsten Quadrate hin, welcher das Kapitel IX des vorliegenden Buches gewidmet ist. Diese Methode ist auch auf solche Gleichungen der Form (1) anwendbar, wo der Operator $A$ nicht positiv oder sogar unsymmetrisch ist, im Falle eines positiven Operators $A$ führt die Methode der kleinsten Quadrate jedoch auf Minimalfolgen, wie am dafür vorgesehenen Ort gezeigt wird.

[1]) Siehe L. W. Kantorowitsch [1], Kap. III.

## § 14. Das RITZsche Verfahren

Das RITZsche Verfahren ist eine der Methoden zur Konstruktion einer Minimalfolge. Es wurde in der Einführung an einer konkreten von RITZ selbst betrachteten Aufgabe erläutert; wir geben hier eine Darstellung für allgemeinere Fälle.

Die Lösung der Gleichung

$$Au = f(P), \tag{1}$$

wo $A$ ein positiver Operator ist, führt, wie wir schon wissen, auf das Aufsuchen des Minimums des Funktionals

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{2}$$

Dieses letztere Problem werden wir näherungsweise folgendermaßen lösen.

Wir wählen eine Folge von Funktionen

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots, \tag{3}$$

die zum Definitionsbereich des Operators $D_A$ gehören; wir stellen an diese Folge zwei Forderungen:

1. *Die Folge* (3) *sei vollständig bezüglich der Energie*;

2. *für beliebiges $n$ seien die Funktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ linear unabhängig.*

Die Funktionen (3) nennt man nach RITZ *Koordinatenfunktionen.*

Wir bilden eine Linearkombination

$$u_n(P) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(P) \tag{4}$$

der ersten $n$ Koordinatenfunktionen mit willkürlichen Zahlenkoeffizienten $a_j$. Wir setzen $u_n(P)$ statt $u(P)$ in das Funktional (2) ein; das macht $F(u)$ zu einer Funktion der $n$ unabhängigen Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j A\varphi_j, \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j, f\right) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} (A\varphi_j, \varphi_k)\, a_j a_k - 2\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j, f)\, a_j. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir wählen die Koeffizienten $a_j$ so, daß die Funktion (5) ein Minimum annimmt. Wie man sofort sieht, führt das auf ein System linearer algebraischer Gleichungen mit den Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Die Funktion (5) wird zum Minimum bei denjenigen Werten der unabhängigen Veränderlichen, welche die ersten Ableitungen zum Verschwinden bringen[1]):

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

---

[1]) Die Gleichungen (6) sind bekanntlich notwendige Bedingungen für ein Minimum von $F(u_n)$. Jedoch kann man unter Verwendung der Positivität des Operators $A$ zeigen, daß dem System (6) genügende Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein Minimum der Größe $F(u_n)$ realisieren. Dieselbe Bemerkung gilt demnach auch für Eigenwertprobleme (§ 32).

Betreffs der Berechnung der Ableitungen, die auf den linken Seiten der Gleichungen (6) auftreten, bemerken wir folgendes. In $a_i$ ist die Funktion $F(u_n)$ ein quadratisches Polynom; sucht man die Glieder heraus, die $a_i$ in der zweiten oder ersten Potenz enthalten, so nimmt $F(u_n)$ die Gestalt

$$F(u_n) = (A\varphi_i, \varphi_i)\, a_i^2 + \sum_{k \neq i} (A\varphi_i, \varphi_k)\, a_i a_k + \sum_{j \neq i} (A\varphi_j, \varphi_i)\, a_j a_i - 2(f, \varphi_i)\, a_i + \cdots \tag{7}$$

an; durch die Punkte wird die Gesamtheit der Glieder bezeichnet, die $a_i$ nicht enthalten. Den Ausdruck (7) kann man noch etwas vereinfachen. Zunächst ist es gleichgültig, durch welchen Buchstaben wir den Summationsindex bezeichnen, deshalb können wir in der zweiten Summe $k$ anstelle von $j$ schreiben. Da ein positiver Operator symmetrisch ist, ist ferner $(A\varphi_k, \varphi_i) = (\varphi_k, A\varphi_i) = (A\varphi_i, \varphi_k)$, und die zweite Summe in (7) erweist sich als mit der ersten identisch. So ist

$$F(u_n) = (A\varphi_i, \varphi_i)\, a_i^2 + 2\sum_{k \neq i} (A\varphi_i, \varphi_k)\, a_i a_k - 2(f, \varphi_i)\, a_i + \cdots.$$

Jetzt ist die Differentiation einfach:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 2(A\varphi_i, \varphi_i)\, a_i + 2\sum_{k \neq i} (A\varphi_i, \varphi_k)\, a_k - 2(f, \varphi_i).$$

Den ersten Summanden kann man unter die Summe ziehen und einfach schreiben

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 2\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_k)\, a_k - 2(f, \varphi_i).$$

Indem wir die gewonnenen Ableitungen gleich Null setzen, erhalten wir das System der RITZschen Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_k)\, a_k = (f, \varphi_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Ausführlicher geschrieben lautet das System

$$\begin{aligned} &(A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 + \cdots + (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_1), \\ &(A\varphi_2, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 + \cdots + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(A\varphi_n, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_n, \varphi_2)\, a_2 + \cdots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n). \end{aligned} \tag{$8_1$}$$

Man kann dem System der RITZschen Gleichungen eine andere Form geben, wenn man den Begriff des energetischen Produktes benutzt; für dieses galt $(A\varphi_i, \varphi_k) = [\varphi_i, \varphi_k]$, womit das System $(8_1)$ die Form

$$\begin{aligned} &[\varphi_1, \varphi_1]\, a_1 + [\varphi_1, \varphi_2]\, a_2 + \cdots + [\varphi_1, \varphi_n]\, a_n = (f, \varphi_1), \\ &[\varphi_2, \varphi_1]\, a_1 + [\varphi_2, \varphi_2]\, a_2 + \cdots + [\varphi_2, \varphi_n]\, a_n = (f, \varphi_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &[\varphi_n, \varphi_1]\, a_1 + [\varphi_n, \varphi_2]\, a_2 + \cdots + [\varphi_n, \varphi_n]\, a_n = (f, \varphi_n) \end{aligned} \tag{$8_2$}$$

erhält.

Die Determinante des Systems (8)

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1], [\varphi_1, \varphi_2], \ldots, [\varphi_1, \varphi_n] \\ [\varphi_2, \varphi_1], [\varphi_2, \varphi_2], \ldots, [\varphi_2, \varphi_n] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\varphi_n, \varphi_1], [\varphi_n, \varphi_2], \ldots, [\varphi_n, \varphi_n] \end{vmatrix} \tag{9}$$

ist die GRAMsche Determinante der linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ und daher von Null verschieden. Daraus folgt, daß das System der RITZschen Gleichungen stets lösbar ist, wenn der Operator $A$ positiv ist. Bestimmt man die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und setzt sie in (4) ein, so erhält man eine Funktion $u_n(P)$, welche wir als *Näherungslösung der Gleichung* (1) *nach* RITZ bezeichnen wollen.

**Satz 1.** *Die Näherungslösungen der Gleichung* (1) *nach* RITZ *bilden eine Minimalfolge des Funktionals* (2), *wenn die Gleichung* (1) *eine Lösung mit endlicher Energie besitzt.*

Zur Abkürzung bezeichnen wir den kleinsten Wert dieses Funktionals durch den Buchstaben $d$:

$$d = \min F(u) = -|u_0|^2,$$

wo $u_0$ die exakte Lösung der Gleichung (1) ist. Wir bemerken, daß $F(u_n) \geq d$ ist, d. h. das RITZsche Verfahren liefert einen zu großen Wert für das Minimalintegral. Das folgt einfach daraus, daß $u_n(P) \in D_A$, da $u_n(P)$ eine Linearkombination der Funktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ ist, die zu $D_A$ gehören. Die Größe $d$ ist die genaue untere Grenze des Funktionals $F(u)$. Wenn $\varepsilon$ eine willkürliche positive Zahl ist, dann existiert nach der Definition der genauen unteren Grenze eine Funktion $v(P) \in D_A$, so daß $d \leq F(v) \leq d + \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Ferner ist die Folge $\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ bezüglich der Energie vollständig. Daraus folgt, wie wir sogleich zeigen, die Möglichkeit, eine natürliche Zahl $n$ und Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ so zu wählen, daß die Ungleichung

$$F(v_n) - F(v) < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist, wo $v_n = \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n$ ist. Nach Formel (8) von § 11 ist nämlich

$$F(v_n) - F(v) = |v_n - u_0|^2 - |v - u_0|^2$$
$$= [|v_n - u_0| + |v - u_0|]\,[|v_n - u_0| - |v - u_0|].$$

Nach der Dreiecksungleichung [Formel (6) von § 8] gilt

$$|v_n - u_0| - |v - u_0| \leq |v_n - v|$$

und

$$F(v_n) - F(v) \leq [|v_n - u_0| + |v - u_0|]\,|v_n - v|.$$

Die Zahl $n$ und die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestimmen wir so, daß

$$|v_n - v| < \frac{\varepsilon}{k}$$

gilt; über die Zahl $k$ verfügen wir unten. Jetzt ist

$$|v_n| < |v| + \frac{\varepsilon}{k}$$

und

$$F(v_n) - F(v) < \left[2|v| + 2|u_0| + \frac{\varepsilon}{k}\right]\frac{\varepsilon}{k}.$$

Wählen wir $k$ so, daß

$$\frac{1}{k}\left[2|v| + 2|u_0| + \frac{\varepsilon}{k}\right] < \frac{1}{2}$$

gilt, so erhalten wir damit auch $F(v_n) - F(v) < \frac{\varepsilon}{2}$, und daraus weiter

$$d \leq F(v_n) \leq F(v) + \frac{\varepsilon}{2} < d + \varepsilon.$$

$u_n$ sei eine nach dem Ritzschen Verfahren gebildete Funktion. Dann gilt

$$d \leq F(u_n) \leq F(v_n) \qquad \text{oder} \qquad d \leq F(u_n) \leq d + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir jetzt $F(u)_n \to d$, d. h. $u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ ist eine Minimalfolge.

Aus dem soeben bewiesenen Satz und dem des § 13 über die Konvergenz von Minimalfolgen ergibt sich, daß die Näherungslösungen nach Ritz bezüglich der Energie gegen die exakte Lösung der Gleichung (1) konvergieren. Sie konvergieren sogar im Mittel gegen die exakte Lösung, wenn $A$ ein positiv-definiter Operator ist.

Wir klären jetzt das Verhältnis der exakten Lösung des Minimalproblems, die durch Formel (2) des § 12 gegeben ist, zu der Näherungslösung $u_n$, welche das Ritzsche Verfahren liefert. Jetzt sei folgender Zusammenhang zwischen den Funktionen $\varphi_k$ und $\psi_k$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= a_{11}\varphi_1,\\
\psi_2 &= a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2,\\
&\cdots\cdots\\
\psi_n &= a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \cdots + a_{nn}\varphi_n,\\
&\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

wobei alle Konstanten $a_{kk}$ von Null verschieden seien. Stellen wir $u_n$ in der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k$$

oder in der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

dar, so kommen wir zu demselben Ergebnis, da der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{m=1}^{k} a_{km} \varphi_m = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m \sum_{k=m}^{n} a_{km} b_k$$

ebenfalls eine Linearkombination der Funktionen $\varphi_k$ ist. Indem wir dies beachten, orthogonalisieren wir die Folge $\{\varphi_n\}$ bezüglich der Energie. Um keine überflüssigen Symbole einzuführen, wollen wir die neuen Funktionen, die im Ergebnis des Orthogonalisierungsprozesses entstehen, wie vorher mit $\varphi_k$ bezeichnen. Nun ist

$$(A\varphi_k, \varphi_j) = [\varphi_k, \varphi_j] = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \tag{10}$$

und das System (8) nimmt die besonders einfache Form

$$a_j = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

an. Jetzt gilt

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k, \tag{11}$$

d. h. die Näherungslösung des Minimalproblems, die man nach dem RITZschen Verfahren erhält, fällt mit einem Abschnitt der Reihe (2), § 12 zusammen, die die exakte Lösung darstellt.

Die Näherungslösung $u_n$ nach RITZ liegt um so näher (im Sinne der Nachbarschaft bezüglich der Energie) bei der exakten, je größer $n$ ist. Um große Genauigkeit zu erzielen, muß man $n$ groß wählen, d. h. eine große Zahl von Koordinatenfunktionen nehmen. Das macht es notwendig, das System (8) mit einer großen Zahl von Gleichungen und Unbekannten zu lösen. Wegen der praktischen Behandlung solcher Systeme verweisen wir den Leser auf das Buch von W. N. FADDEJEWA [4]. Wir bemerken nur, daß die Lösung des Systems (8) durch seine Symmetrie erleichtert wird, das bedeutet, daß die Koeffizienten $[\varphi_i, \varphi_k]$ und $[\varphi_k, \varphi_i]$, die bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch sind, einander gleich sind.

**Anmerkung.** Wenn das System (8) schon gebildet ist und es aus diesem oder jenem Grunde wünschenswert erscheint, eine weniger genaue Näherung zu bilden, welche gewisse Koordinatenfunktionen nicht enthält, dann bestimmen sich die Koeffizienten $a_k$ dieser weniger genauen Näherung aus dem System, welches man aus dem System (8) durch *Verkürzung* erhält, d. h. durch Wegstreichen der Zeilen und Spalten, die den fortgelassenen Koordinatenfunktionen entsprechen. Eine analoge Bemerkung gilt auch bei den Eigenwertproblemen (siehe § 32).

Es mögen wie vorher $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ Koordinatenfunktionen sein, die bezüglich der Energie orthonormiert sind, so daß die Beziehung (10) gilt. Mit der Abkürzung $c_i = (f, \varphi_i)$ erhalten wir

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \qquad u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i .$$

Wir haben schon gesehen [Formel (3) von § 11], daß $F(u_0) = -|u_0|^2$ ist. Wir zeigen, daß

$$F(u_n) = -|u_n|^2 \tag{12}$$

gilt, wenn $u_n(P)$ die nach dem RITZschen Verfahren gebildete Näherungslösung der Gleichung (1) ist. Es gilt nämlich $F(u_n) = |u_n|^2 - 2(u_n, f)$ und

$$(u_n, f) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, f\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\varphi_i, f) = \sum_{i=1}^{n} c_1^2.$$

Ferner sind die Funktionen $\varphi_i(P)$ bezüglich der Energie orthonormiert; nach dem in § 10 Bewiesenen [Formel (20) und (21)] gilt dann

$$|u_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Daraus folgt

$$(u_n, f) = |u_n|^2 \tag{13}$$

und $F(u_n) = -|u_n|^2$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (13) ergibt dann

$$(u_0, f) = |u_0|^2. \tag{14}$$

Das ist übrigens wegen

$$(u_0, f) = (u_0, A u_0) = [u_0, u_0] = |u_0|^2$$

auch unmittelbar zu sehen. Aus den Formeln (20) und (21) des § 10 folgt weiter, daß

$$|u_0|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

gilt, woraus ersichtlich ist, daß die Größe $|u_n|$ mit wachsendem $n$ wächst, wobei

$$|u_n| \leq |u_0|; \quad |u_n| \underset{n\to\infty}{\to} |u_0| \tag{15}$$

gilt.

Es sei $n > k$. Wir berechnen die Größe $|u_n - u_k|^2$. Wir haben

$$u_n - u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i = \sum_{i=k+1}^{n} c_i \varphi_i;$$

nach den Formeln (20) und (21) des § 10 gilt

$$|u_n - u_k|^2 = \sum_{i=k+1}^{n} c_i^2$$

oder

$$|u_n - u_k|^2 = |u_n|^2 - |u_k|^2, \tag{16}$$

und analog

$$|u_0 - u_k|^2 = |u_0|^2 - |u_k|^2. \tag{17}$$

$u(P)$ sei eine willkürliche nicht identisch verschwindende Funktion aus dem Definitionsbereich des Operators $A$. Die Funktion $\varphi_1(P) = u(P)/|u|$ ist normiert bezüglich der Energie. Wir betrachten $\varphi_1(P)$ als erstes Element eines bezüglich der Energie orthonormierten Funktionensystems $\varphi_n(P)$ und suchen eine Näherungslösung der Gleichung (1) nach dem RITZschen Verfahren, indem wir in

Formel (4) $n = 1$ setzen. Dann ist, wie wir wissen, $u_1 = c_1 \varphi_1$, wo $c_1 = (f, \varphi_1)$ ist, und es gilt

$$|u_0|^2 \geq |u_1|^2 = c_1^2.$$

Nun ist aber

$$c_1 = (f, \varphi_1) = \frac{(f, u)}{|u|},$$

und damit kommen wir zu der nützlichen Ungleichung

$$|u_0|^2 \geq \frac{(f, u)^2}{|u|^2}. \tag{18}$$

In der Ungleichung (18) bedeutet $u_0(P)$ die exakte Lösung der Gleichung (1), während $u(P)$ eine beliebige nicht identisch verschwindende Funktion ist, die im Definitionsbereich des Operators $A$ liegt. Das bedeutet, wie wir uns erinnern, daß diese Funktion die nötige Zahl von stetigen Ableitungen besitzt und den Randbedingungen des Problems genügt.

Wir wenden uns nun der Frage zu, inwieweit die von uns den Koordinatenfunktionen auferlegten Forderungen der Vollständigkeit und der linearen Unabhängigkeit notwendig sind. Die erste Forderung ist nicht unbedingt notwendig. Tatsächlich besteht keine Notwendigkeit, daß jede beliebige Funktion aus $D_A$ durch eine Linearkombination der Koordinatenfunktionen bezüglich der Energie approximiert werden kann. Es genügt, daß die gesuchte Lösung eine solche Approximation gestattet. Dann hat man im Beweis des Satzes 1 für $v$ eine geeignete Linearkombination der Koordinatenfunktionen zu nehmen, und der ganze Beweis bleibt gültig. Wenn daher von vornherein bekannt ist, daß die gesuchte Lösung in einem Bereich liegt, der kleiner als $D_A$ ist, dann genügt es, daß das System der Koordinatenfunktionen in diesem kleineren Bereich vollständig ist. Wenn also z. B. bekannt ist, daß die gesuchte Funktion bezüglich einer ihrer unabhängigen Veränderlichen gerade ist, dann braucht man als Koordinatenfunktionen nur solche zu nehmen, die in der betreffenden Veränderlichen gerade sind, und es genügt, daß das gewählte System von Koordinatenfunktionen vollständig bezüglich der geraden Funktionen aus $D_A$ ist.

Wir untersuchen jetzt, was passiert, wenn zwar die Bedingung der Vollständigkeit erfüllt ist, die Koordinatenfunktionen aber linear abhängig sind. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß es im System (3) nur eine Funktion gibt, die durch eine endliche Zahl anderer Funktionen dieses Systems linear ausgedrückt werden kann, wir nehmen weiter an, daß diese Funktion nicht identisch verschwindet. In diesem Falle ist es stets möglich, indem man einige Koordinatenfunktionen durch ihre Linearkombinationen ersetzt, zu erreichen, daß $\varphi_1(P) \equiv 0$ ist, und daß die Funktionen $\varphi_2(P), \varphi_3(P), \ldots$, in endlicher Anzahl genommen, linear unabhängig sind. Den Ausdruck (4) kann man in der Form

$$u_n(P) = \sum_{i=2}^{n} a_j \varphi_j(P)$$

schreiben, alles andere bleibt wie bisher, insbesondere sind die Koeffizienten $a_2, a_3, \ldots, a_n$ eindeutig bestimmt. Daraus folgt, daß die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ebenfalls bestimmt sind, aber nicht mehr eindeutig: Den Koeffizienten $a_1$ kann man willkürlich vorgeben. Das bedeutet, daß das System (8) lösbar ist, wenn auch

nicht eindeutig, jedoch jede beliebige Lösung auf ein und dieselbe Funktion $u(P)$ führt. Demnach verhindert das Vorhandensein einer oder mehrerer Funktionen, die von den übrigen Funktionen des Systems der Koordinatenfunktionen linear abhängen, keineswegs die Bildung einer einwandfreien Näherungslösung nach Ritz, wenn die Lösung des Systems der Ritzschen Gleichungen dadurch auch erschwert wird. Bei der praktischen Rechnung kommt der Fall vor, daß die Koordinatenfunktionen „fast" linear abhängig sind, d. h. daß die Determinante (9) nahe bei Null liegt, obwohl die Koordinatenfunktionen im strengen Sinne linear unabhängig sind. Dann schwankt der relative Fehler bei der Berechnung der Determinante, und damit auch bei der Berechnung der Zahlenwerte der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, stark in Abhängigkeit vom Grade der Genauigkeit der Berechnung der Koeffizienten und der freien Glieder der Gleichungen (8), und diese Schwankungen wirken sich nicht wenig auf die Funktion $u_n(P)$ aus.

Das Vorhandensein linear abhängiger oder „fast" linear abhängiger Funktionen stellt also kein Hindernis bei der Anwendung des Ritzschen Verfahrens dar. Man muß aber daran denken, daß dies ohne Not die Aufstellung und Lösung des Systems der Ritzschen Gleichungen erschwert, und deshalb müssen solche „fast" oder schlechthin linear abhängigen Funktionen aus dem System der Koordinatenfunktionen ausgeschlossen werden.

## § 15. Andere Methoden zur Bildung einer Minimalfolge

Das Ritzsche Verfahren ist die wichtigste, aber nicht die einzige Methode zur Bildung einer Minimalfolge. Im vorliegenden Paragraphen erläutern wir noch kurz drei weitere Verfahren; eins davon gab R. Courant [1] an, die beiden anderen L. W. Kantorowitsch (siehe L. W. Kantorowitsch und W. I. Krylow [1] und L. W. Kantorowitsch [1], dgl. Arbeiten M. S. Birmans [1, 2]).

**Das Verfahren von Courant.** R. Courant [1] schlug eine Methode zur Bildung einer Minimalfolge vor, welche bei den bekannten Bedingungen nicht nur im Mittel, sondern auch gleichmäßig konvergiert zusammen mit den abgeleiteten Folgen bis zu einer gewissen Ordnung.

Es sei die Differentialgleichung

$$Au = f \tag{1}$$

gegeben und eine Lösung gesucht, die in einem gewissen endlichen Gebiet $\Omega$ des $m$-dimensionalen Raumes $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ definiert ist und auf dem Rand $S$ dieses Gebietes gewissen homogenen Randbedingungen genügt. Wir nehmen an, daß der Operator $A$ auf einer Menge von Funktionen, die den Randbedingungen des Problems genügen, positiv ist, und daß dieses Problem eine Lösung mit endlicher Energie besitzt. Diese Lösung liefert ein Minimum des Funktionals

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die gegebene Funktion $f$ stetige Ableitungen nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bis zur Ordnung $k$ einschließlich besitzt. Wir bilden das neue Funktional

$$\Phi(u) = F(u) + \sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=j} \left\| \frac{\partial^j (Au - f)}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right\|^2. \tag{2}$$

Offensichtlich ist $\Phi(u) \geq F(u)$. Ferner macht die Funktion $u$, die $F(u)$ zum Minimum macht, auch $\Phi(u)$ zum Minimum, da diese Funktion in (2) sowohl den ersten Summanden zum Minimum macht, als auch den zweiten, welchen sie zum Verschwinden bringt. Daraus folgt, daß man die Lösung unseres Randwertproblems finden kann, indem man das Minimalproblem für $\Phi(u)$ löst. Wir bilden, z. B. nach dem RITZschen Verfahren, eine Minimalfolge $\{u_n\}$ dieses Funktionals. Dann gilt offensichtlich

$$\left\| \frac{\partial^j (\Delta u_n - f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k; \tag{3}$$

die Beziehung (3) gestattet nachträgliche Schlüsse auf die Konvergenz der Minimalfolge.

Betrachten wir zum Beispiel die POISSONsche Gleichung

$$-\Delta u = f$$

in der Ebene bei der Randbedingung $u|_S = 0$. Wir setzen in (2) $k = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= (-\Delta u, u) - 2(u, f) + \|\Delta u + f\|^2 \\ &= \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf + (\Delta u + f)^2 \right\} d\Omega .\end{aligned}$$

Wir bilden eine Minimalfolge $u_n$. Dann gilt offensichtlich

$$\int_\Omega (\Delta u_n + f)^2 \, d\Omega \to 0 . \tag{4}$$

Nach der GREENschen Formel ist

$$u_n(x, y) - u(x, y) = \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u_n + f)\, d\Omega ,$$

wo $G(x, y; \xi, \eta)$ die GREENsche Funktion[1]) für den LAPLACE-Operator ist. Daraus folgt nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leq \sqrt{\int_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta} \times \sqrt{\int_\Omega (\Delta u + f)\, d\xi\, d\eta} . \tag{5}$$

Die GREENsche Funktion genügt der Ungleichung

$$0 \leq G(x, y; \xi, \eta) \leq a\,|\ln r| + b , \tag{6}$$

wo $a$ und $b$ Konstanten sind; daraus ist leicht zu folgern, daß der erste Faktor auf der rechten Seite in (5) beschränkt ist:

$$\sqrt{\int_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta} < C, \qquad C = \text{const.}$$

Jetzt folgt aus (5), daß $u_n(x, y) \to u(x, y)$ *gleichmäßig* in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ gilt.

---

[1]) Betreffs der GREENschen Funktion und der folgenden Abschätzung (6) siehe etwa W. I. SMIRNOW [4], Punkt 220 bis 224.

Die Einführung zusätzlicher Summanden in $\Phi(u)$ erschwert die Rechnung; diese Komplizierung kann jedoch gerechtfertigt sein, wenn es auf Grund der Bedeutung des Problems wünschenswert ist, eine gleichmäßig konvergente Folge zu gewinnen.

K. N. Schewtschenko [1] wandte das Courantsche Verfahren auf das dreidimensionale statische Problem der Elastizitätstheorie an.

**Das Verfahren der Zurückführung auf gewöhnliche Differentialgleichungen von L. W. Kantorowitsch.** L. W. Kantorowitsch schlug zur Bildung einer Minimalfolge eine Methode vor, die sich wesentlich vom Ritzschen Verfahren unterscheidet. Diese Methode ist in der Monographie von L. W. Kantorowitsch und W. I. Krylow [1] ausführlich dargestellt; wir beschränken uns hier auf einige Erläuterungen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß das Gebiet $\Omega$ eben ist und die in der Abb. 6 angegebene Gestalt hat, und daß die Integration der Differentialgleichung (1) bei der Bedingung $u|_S = 0$ gefordert sei. Der Operator $A$ sei positiv auf einer Menge von Funktionen, die den erwähnten Randbedingungen genügen. Dann führt unser Problem auf die Aufgabe, das Minimum des Funktionals $F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$ zu bestimmen.

y, Ω, a, b, x

Abb. 6

Wir setzen

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x, y)\, f_k(x),$$

wo $\chi_k(x, y)$ eine bekannte, auf $S$ verschwindende Funktion ist, mit möglicher Ausnahme der Geraden $x = a$ und $x = b$. Wir bestimmen die Funktionen $f_p(x)$ einer Veränderlichen aus der Forderung, daß das Funktional $F(u_n)$ einen Minimalwert haben soll. Nach den üblichen Methoden der Variationsrechnung[1]) erhalten wir für $f_k(x)$ ein Differentialgleichungssystem; zu diesem fügen wir die Randbedingungen bei $x = a$ und $x = b$ hinzu, die sich aus den Randbedingungen des Problems ergeben:

$$f_k(a) = f_k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wie man sieht, besteht das wesentliche des Verfahrens von L. W. Kantorowitsch darin, daß es (angenähert) die Integration einer partiellen Differentialgleichung auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführt.

**Die Methode des schnellsten Anwachsens.** Diese Methode wenden wir unmittelbar nur auf solche symmetrischen Operatoren an, welche der zweifachen Ungleichung

$$m\,\|u\|^2 \leq (Au, u) \leq M\,\|u\|^2 \tag{7}$$

genügen, wo $m$ und $M$ positive Konstanten sind. Solche Operatoren gehören zur Klasse der sogenannten beschränkten[2]) Operatoren. Differentialoperatoren

[1]) Siehe etwa W. I. Smirnow [4], Kap. II.

[2]) Näheres über beschränkte Operatoren siehe § 45.

gehören nicht zu dieser Klasse, deshalb erfordert die Anwendung des Verfahrens des schnellsten Anwachsens auf Differentialgleichungen eine solche einleitende Transformation der betreffenden Gleichung, daß der auf der linken Seite stehende Operator beschränkt wird.

Möge also der Operator $A$ die Ungleichung (7) befriedigen; aus dieser Ungleichung folgt unter anderem, daß $A$ ein positiver Operator ist. Wir betrachten die Gleichung

$$Au = f, \tag{8}$$

wo $u$ die gesuchte, $f$ eine gegebene Funktion ist. Nach dem Satz vom Minimalfunktional (§ 11) ist die Lösung dieser Gleichung gleichbedeutend mit der Lösung des Minimalproblems des Funktionals

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Wir wählen eine willkürliche Funktion $u_1$. Falls etwa $Au_1 = f$ ist, so wäre das Problem gelöst. Wenn jedoch $Au_1 \neq f$ ist, dann nehmen wir $u_1$ als erste Näherung der gesuchten Lösung. Zur Konstruktion einer zweiten Näherung setzen wir $Au_1 - f = v_1$ und wählen eine Zahl $a$ so, daß der Ausdruck $F(u_1 - av_1)$ ein Minimum annimmt. Durch Auflösung der Klammern erhält man leicht

$$F(u_1 - av_1) = F(u_1) - 2a[(Au_1, v_1) - (f, v_1)] + a^2(Av_1, v_1).$$

Wenn wir die Ableitung dieses Ausdrucks nach $a$ gleich Null setzen, erhalten wir

$$(Av_1, v_1)\, a - [(Au_1, v_1) - (f, v_1)] = 0.$$

Diese Gleichung kann man noch etwas vereinfachen, da

$$(Au_1, v_1) - (f, v_1) = (Au_1 - f, v_1) = (v_1, v_1) = \|v_1\|^2$$

gilt. Jetzt ist

$$(Av_1, v_1)\, a - \|v_1\|^2 = 0 \quad \text{und} \quad a = \frac{\|v_1\|^2}{(Av_1, v_1)} = a_1.$$

Als zweite Näherung nehmen wir die Funktion $u_2 = u_1 - a_1 v_1$. Wir setzen den Prozeß fort und erhalten eine dritte Näherung $u_3$ usw.

Die Schnelligkeit der Konvergenz des Verfahrens des schnellsten Anwachsens wird durch die Ungleichung

$$|u_{n+1} - u_0| \leq |u_1 - u_0| \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n$$

abgeschätzt, wo $u_0$ die exakte Lösung der Gleichung (8) ist.

## § 16. Funktionen mit endlicher Energie

$A$ sei ein positiver Operator und $u(P)$ eine Funktion aus dessen Definitionsbereich $D_A$. Die Größe $|u|^2 = (Au, u)$ ist offensichtlich endlich; man kann behaupten, daß eine beliebige Funktion aus dem Gebiet $D_A$ eine endliche Energie

besitzt. Im vorliegenden Paragraphen zeigen wir, daß sich der Begriff der Energie auf eine größere Funktionenklasse, als $D_A$ es ist, ausdehnen läßt; diese Klasse wollen wir *Klasse der Funktionen mit endlicher Energie* nennen. Mit Rücksicht auf das Ziel dieses Buches beschränken wir uns auf den Fall, daß der Operator $A$ positiv-definit ist.

Die Bildung der Klasse von Funktionen mit endlicher Energie gründet sich auf den bekannten *Satz von* FISCHER-RIESZ[1]):

*Die Funktionen* $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ *seien in einem Gebiet* $\Omega$ *definiert, ihre Normen seien in diesem Gebiet endlich. Wenn diese Funktionen die Bedingung*[2])

$$\lim_{n, m \to \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = \lim_{n, m \to \infty} \left\{ \int_\Omega [\varphi_n(P) - \varphi_m(P)]^2 \, d\Omega \right\}^{1/2} = 0 \tag{1}$$

*erfüllen, dann existiert eine Funktion* $\varphi(P)$ *mit endlicher Norm, die den Grenzwert der Funktionenfolge* $\varphi_n(P)$ *im Sinne der Konvergenz im Mittel darstellt.*

Der Satz von FISCHER-RIESZ behauptet folglich die Existenz des Integrals

$$\int_\Omega \varphi^2(P) \, d\Omega$$

sowie der Beziehung $\varphi_n(P) \xrightarrow{M} \varphi(P)$ oder, was dasselbe ist, der Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega [\varphi(P) - \varphi_n(P)]^2 \, d\Omega = 0.$$

Es muß bemerkt werden, daß die Funktion $\varphi(P)$ nicht integrierbar im RIEMANNschen Sinne (SMIRNOW [1], Punkt 116) zu sein braucht, deshalb sind die letzten beiden Integrale im LEBESGUEschen Sinne zu verstehen (siehe § 41).

$A$ sei ein positiv-definiter Operator, so daß für eine beliebige Funktion $u(P) \in D_A$ die Ungleichung

$$|u|^2 = (Au, u) \geq \gamma^2 \, \|u\|^2 \tag{2}$$

erfüllt ist. Wir betrachten eine beliebige Folge von Funktionen $u_n(P)$, die im Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ liegen und der Bedingung

$$\lim_{n, m \to \infty} |u_n - u_m| = 0 \tag{3}$$

genügen. Wenn die Funktionen $u_n(P)$ und $u_m(P)$ zu $D_A$ gehören, dann liegt ihre Differenz $u_n(P) - u_m(P)$ ebenfalls in $D_A$. Aus (2) und (3) folgt

$$\lim_{n, m \to \infty} \|u_n - u_m\| = 0,$$

dann existiert aber nach dem Satz von FISCHER-RIESZ eine Funktion $u(P)$ mit endlicher Norm derart, daß

$$u_n(P) \xrightarrow{M} u(P) \tag{4}$$

gilt.

---

[1]) Wegen des Beweises dieses Satzes siehe z. B. I. P. NATANSON [2].

[2]) Wir bemerken, daß die Bedingung (1) dem Kriterium von CAUCHY für die Existenz des Grenzwertes einer Zahlenfolge sehr ähnlich ist.

Eine Funktion $u(P)$ dieser Art rechnen wir zur Klasse der Funktionen mit endlicher Energie hinzu. Es ist leicht zu sehen, daß eine beliebige Funktion, die zum Definitionsbereich $D_A$ eines gegebenen Operators gehört, auch zur Klasse der Funktionen mit endlicher Energie gehört. Wenn nämlich $u \in D_A$ ist, dann genügt es, $u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u$ zu setzen, und dann gilt offensichtlich $|u_n - u_m| \to 0$ und $\|u_n - u\| \to 0$.

Wir zeigen jetzt, wie man das energetische Produkt und die Norm bezüglich der Energie für Funktionen mit endlicher Energie definieren kann. Wenn $u(P)$ und $v(P)$ Funktionen mit endlicher Energie sind, dann existieren auf Grund dieser Definition zwei Folgen $u_n(P) \in D_A$ und $v_n(P) \in D_A$ derart, daß die Gleichungen

$$\lim_{n, m \to \infty} |u_n - u_m| = 0, \qquad \lim_{n, m \to \infty} |v_n - v_m| = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \|v_n - v\| = 0$$

gelten. Nach der Dreiecksungleichung, die für die Norm bezüglich der Energie gilt (§ 8), ist

$$\big||u_n| - |u_m|\big| \leq |u_n - u_m| \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0.$$

Das bedeutet, daß die Zahlenfolge $|u_n|$, $n = 1, 2, \ldots$ dem CAUCHYschen Kriterium für die Existenz eines Grenzwertes genügt (SMIRNOW [1], Punkt 31), und deshalb existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} |u_n|.$$

Wir setzen definitionsgemäß

$$|u| = \lim_{n \to \infty} |u_n|, \qquad u_n \in D_A \tag{5}$$

und analog

$$|v| = \lim_{n \to \infty} |v_n|, \qquad v_n \in D_A.$$

Wenn wir die Ungleichung (2) auf die Funktion $u_n(P)$ anwenden,

$$|u_n|^2 \geq \gamma^2 \|u_n\|^2,$$

und wieder $n \to \infty$ streben lassen, dann kommen wir wiederum zur Ungleichung (2), die damit für beliebige Funktionen mit endlicher Energie als richtig erwiesen ist.

Wir bilden das energetische Produkt der Funktionen $u_n(P)$ und $v_n(P)$

$$[u_n, v_n] = (A u_n, v_n).$$

Wir zeigen, daß es für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert strebt, wofür der Nachweis genügt, daß es unter das oben erwähnte CAUCHYsche Kriterium fällt. Wir haben

$$[u_n, v_n] - [u_m, v_m] = [u_n, v_n] - [u_n, v_m] + [u_n, v_m] - [u_m, v_m]$$
$$= [u_n, v_n - v_m] + [u_n - u_m, v_m].$$

Nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI (§ 8) gilt

$$|[u_n, v_n] - [u_m, v_m]| \leq |u_n| \cdot |v_n - v_m| + |v_m| \cdot |u_n - u_m|.$$

Auf der rechten Seite sind die ersten Faktoren beschränkt als Veränderliche, die einen Grenzwert besitzen (SMIRNOW [1], Punkt 27), während die zweiten Faktoren für $m \to \infty$ und $n \to \infty$ nach Voraussetzung gegen Null streben. Daraus folgt, daß

$$\lim_{n \to \infty} |[u_n, v_n] - [u_m, v_m]| = 0$$

gilt, d. h., daß für die Folge $[u_n, v_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ das CAUCHYsche Kriterium gilt und deshalb der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} [u_n, v_n]$$

existiert. Jetzt definieren wir das energetische Produkt zweier Funktionen $u(P)$ und $v(P)$ mit endlicher Energie, indem wir

$$[u, v] = \lim_{n \to \infty} [u_n, v_n]; \qquad u_n \in D_A, \quad v_n \in D_A \tag{6}$$

setzen. Es ist offensichtlich, daß alle Eigenschaften der Norm bezüglich der Energie und des energetischen Produktes, die in § 8 für Funktionen aus dem Definitionsbereich eines Operators $A$ aufgestellt wurden, für Funktionen mit endlicher Energie gültig bleiben.

Es sei wie früher $u(P)$ eine Funktion mit endlicher Energie und $u_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge von Funktionen aus $D_A$, die mit $u(P)$ durch die Beziehungen (3) und (4) verknüpft ist. Wir zeigen, daß

$$u_n(P) \xrightarrow{E} u(P) \tag{7}$$

gilt. Zum Beweis betrachten wir die Funktion $w(P) = u(P) - u_k(P)$, wo $k$ eine feste Zahl ist. Man sieht leicht, daß $w(P)$ eine Funktion mit endlicher Energie ist und daß diese Funktion durch Beziehungen der Form (3) und (4) mit der Folge der Funktionen $u_n(P) - u_k(P) = w_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ verknüpft ist; wie oben gesagt wurde, ist

$$\lim_{n \to \infty} |w_n| = |w|$$

oder, was dasselbe ist,

$$\lim_{n \to \infty} |u_n - u_k| = |u - u_k|. \tag{8}$$

Wenden wir uns der Beziehung (3) zu. Darin kann man den Grenzübergang vollziehen, indem man $m$ und $n$ auf beliebige Weise gegen unendlich streben läßt. Wir führen diesen Übergang so aus: Zuerst halten wir $m$ willkürlich fest und bilden $n \to \infty$, danach $m \to \infty$. Dann nimmt die Gleichung (3) die Form

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ \lim_{n \to \infty} |u_n - u_m| \right\} = 0$$

an.

Wegen (8) ist der innere Grenzwert gleich $|u - u_m|$, und wir erhalten

$$\lim_{m\to\infty} |u - u_m| = 0,$$

was mit (7) zusammenfällt.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit einer gegebenen Funktion zur Klasse der Funktionen mit endlicher Energie nicht nur durch die gegebene Funktion bestimmt wird, sondern durch den gegebenen Operator $A$.

Wir betrachten beispielsweise den Operator

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}, \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

dessen Definitionsbereich durch die Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{10}$$

charakterisiert werde.

In § 6 wurde festgestellt, daß der Operator $B$ positiv-definit ist und daß

$$|u|^2 = (Bu, u) = \int_0^1 u'^2(x)\,dx \tag{11}$$

gilt.

Es sei $u_n(x) \in D_B$ und gelte

$$|u_n - u_m|^2 = \int_0^1 [u_n'(x) - u_m'(x)]^2\,dx \xrightarrow[n,\,m\to\infty]{} 0. \tag{12}$$

Nach dem oben Gesagten existiert eine Funktion $u(x)$ mit endlicher Energie derart, daß $u_n(x) \xrightarrow{M} u(x)$ und $u_n(x) \xrightarrow{E} u(x)$ gilt. Wir versuchen, die Eigenschaften der Funktion $u(x)$ festzustellen. Wie oben (§ 4) schon gesagt wurde, nehmen wir an, daß die Funktionen aus dem Definitionsbereich $D_B$ des Operators $B$ stetige zweite Ableitungen besitzen. Aus Formel (12) und aus dem Satz von FISCHER-RIESZ ergibt sich, daß die ersten Ableitungen $u'(x)$ im Mittel gegen eine Funktion konvergieren, welche wir mit $v(x)$ bezeichnen. Wenn die Funktion $u(x)$ eine stetige Ableitung hat, dann ist $v(x) = u'(x)$, wie man leicht zeigen kann; im allgemeinen Fall nennt man in Übereinstimmung mit der von S. L. SOBOLEW gegebenen Definition $v(x)$ die *verallgemeinerte Ableitung* der Funktion $u(x)$. Demnach besitzt eine Funktion mit endlicher Energie [in bezug auf einen Operator (9)—(10)] im allgemeinen Fall nur eine verallgemeinerte erste Ableitung. Wir zeigen, daß $u(x)$ stetig ist und den Bedingungen (10) genügt.

Wir haben

$$u_n(x) - u_m(x) = u_n(0) - u_m(0) + \int_0^x [u_n'(t) - u_m'(t)]\,dt.$$

Die Funktionen $u_n(x)$ genügen den Bedingungen (10), da sie in $D_B$ liegen, und deshalb gilt $u_n(0) - u_m(0) = 0$ und

$$u_n(x) - u_m(x) = \int_0^x [u_n'(t) - u_m'(t)]\,dt.$$

Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI ist

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \left\{x\int_0^x [u_n'(t) - u_m'(t)]^2\,dt\right\}^{1/2} \leq \left\{\int_0^1 [u_n'(t) - u_m'(t)]^2\,dt\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung hängt nicht von $x$ ab und strebt für $n, m \to \infty$ gegen Null. Nach dem Kriterium von WEIERSTRASS (SMIRNOW [1], Punkt 147) konvergiert die Folge $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\overline{u}(x)$. Wie man leicht sieht, ist $u(x) = u(x)$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt nämlich die Konvergenz im Mittel (§ 7), deshalb gilt $u_n(x) \overset{M}{\to} u(x)$; jedoch kann ein und dieselbe Folge nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte im Mittel konvergieren (Satz 1, § 7), und deshalb gilt $\overline{u}(x) = u(x)$ und $u_n(x) \to u(x)$ gleichmäßig im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Insbesondere ist

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = 0; \quad u(1) = \lim_{n\to\infty} u_n(1) = 0.$$

In dem betrachteten Beispiel genügen also die Funktionen mit endlicher Energie denselben Randbedingungen wie die Funktionen aus dem Definitionsbereich des gegebenen Operators; ein wesentlicher Unterschied besteht nur darin, daß Funktionen mit endlicher Energie keine stetigen Ableitungen zu haben brauchen.

Wir betrachten noch den Operator

$$B_0 u = -\frac{d^2 u}{d x^2}, \quad 0 < x < 1; \quad u'(0) = u'(1) = 0. \tag{14}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß dieser Operator nicht positiv ist. Es ist nämlich

$$(B_0 u, u) = -\int_0^1 u \frac{d^2 u}{d x^2}\,dx = -\left.u u'\right|_0^1 + \int_0^1 u'^2(x)\,dx = \int_0^1 u'^2(x)\,dx; \tag{15}$$

die ausintegrierten Glieder verschwinden wegen der Randbedingungen. Die Formel (15) besagt, daß $(B_0 u, u) \geq 0$ ist. Auf der anderen Seite hat die Funktion $u(x) \equiv 1$ eine stetige Ableitung und genügt den Randbedingungen (14); deshalb gilt $1 \in D_{B0}$; gleichzeitig ist $(B_0\, 1, 1) = 0$, was der Definition eines positiven Operators widerspricht.

Um $B_0$ zu einem positiven Operator zu machen, verkleinern wir dessen Definitionsbereich, indem wir den Funktionen dieses Bereiches außer den Randbedingungen (14) noch die Bedingung

$$\int_0^1 u(x)\,dx = 0 \tag{16}$$

auferlegen. Diese Zusatzbedingung macht den Operator $B_0$ positiv und darüber hinaus positiv-definit. Wir beweisen das. Es seien $x_1$ und $x_2$ willkürliche Punkte aus dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ und $u(x)$ eine willkürliche Funktion mit in diesem Intervall stetigen Ableitungen. Wir haben

$$u(x_1) - u(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} u'(t)\,dt.$$

Daraus folgt, wenn $x_2 \leq x_1$ ist,

$$[u(x_1) - u(x_2)]^2 \leq \left(\int_{x_2}^{x_1} u'(t)\,dt\right)^2 \leq (x_2 - x_1)\int_{x_2}^{x_1} u'^2(t)\,dt \leq \int_0^1 u'^2(t)\,dt.$$

Dieselbe Ungleichung erhält man, wenn $x_2 > x_1$ ist. Wir lösen die Klammer auf der linken Seite auf:

$$u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2u(x_1)\,u(x_2) \leq \int_0^1 u'^2(t)\,dt.$$

Die so gewonnene Ungleichung integrieren wir nach $x_1$ und nach $x_2$ von Null bis Eins. Das führt auf die Ungleichung

$$2\int_0^1 u^2(x)\,dx - 2\left(\int_0^1 u(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 u'^2(t)\,dt. \tag{17}$$

Jetzt sei $u(x) \in D_{B0}$. Infolge der Bedingung (16) verschwindet das zweite Integral auf der linken Seite von (17), und wir erhalten

$$\int_0^1 u'^2(x)\,dx \geq 2\int_0^1 u^2(x)\,dx = 2\,\|u\|^2,$$

was man wegen der Beziehung (15) in der Form

$$(B_0 u, u) \geq 2\,\|u\|^2$$

darstellen kann. Diese Ungleichung zeigt auch, daß $B_0$ ein positiv-definiter Operator ist.

Wir zeigen jetzt, daß für den Operator $B_0$ die Klasse der Funktionen mit endlicher Energie auch solche Funktionen enthält, die den Randbedingungen (14) nicht genügen. Es sei z. B. $u(x)$ eine beliebige Funktion, die in $0 \leq x \leq 1$ stetig und stetig differenzierbar ist und der Gleichung (16) genügt, aber nicht den Bedingungen (14). Wie aus der Theorie der Fourier-Reihen bekannt ist (Smirnow [2], Punkt 145), bilden die Funktionen $\sin k\pi x$, $k = 1, 2, \ldots$ ein vollständiges Orthogonalsystem im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Die Ableitung $u'(x)$ kann man in die Reihe

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x; \qquad a_k = 2\int_0^1 u'(x)\sin k\pi x\,dx \tag{18}$$

entwickeln, welche im Intervall $0 \leq x \leq 1$ im Mittel konvergiert (§ 7). Wir integrieren diese Reihe im Intervall von Null bis $x$ gliedweise, was wegen des Satzes 2, § 7 zulässig ist:

$$u(x) = C - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\pi k}\cos k\pi x.$$

Die Bedingung (16) liefert $C = 0$ und im Endergebnis

$$u(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\pi k}\cos k\pi x. \tag{19}$$

Wir setzen jetzt

$$u_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\pi k} \cos k\pi x.$$

Die Funktionen $u_n(x)$ sind stetig und beliebig oft stetig differenzierbar; außerdem genügen sie den Bedingungen (14), da

$$u_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\pi x$$

und deshalb $u'_n(0) = u'_n(1) = 0$ und $u_n(x) \in D_B$ gilt. Aus der Entwicklung (18), die jedenfalls im Mittel konvergiert, folgt

$$\| u'_n(x) - u'_m(x) \| = | u_n - u_w | \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0 .$$

Definitionsgemäß existiert eine Funktion $\overline{u}(x)$ mit endlicher Energie, gegen welche die Folge $u_n(x)$ sowohl bezüglich der Energie konvergiert als auch im Mittel. Aus der Entwicklung (19) folgt, daß $u_n(x) \xrightarrow{M} u(x)$ gilt. Dann aber ist $\overline{u}(x) = u(x)$ und selbstverständlich ist $u(x)$ eine Funktion mit endlicher Energie, obwohl die Randbedingungen (14) für diese Funktion nicht erfüllt sind.

## § 17. Anwendung der Funktionen mit endlicher Energie. Der Fall natürlicher Randbedingungen

Wir betrachten einen positiv-definiten Operator $A$, die Gleichung $Au = f(P)$ und das ihr entsprechende Variationsproblem für das Minimalfunktional

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f).$$

Es ist klar, daß das Funktional $F(u)$ nur für den Fall definiert ist, wo $u \in D_A$ ist, nur dann ist der Ausdruck $(Au, u)$ sinnvoll. Wenn man jedoch die Begriffe des energetischen Produktes und der Norm bezüglich der Energie benutzt, dann kann man $(Au, u) = |u| = [u, u]$ schreiben und unserem Funktional die neue Form

$$F(u) = [u, u] - 2(u, f) \tag{1}$$

geben. In dieser Form ist das Funktional $F(u)$ auf einer viel breiteren Funktionenklasse definiert: *Die rechte Seite der Gleichung* (1) *ist sinnvoll, wenn* $u(P)$ *eine beliebige Funktion mit endlicher Energie ist.*

In § 11 wurde das Minimalproblem für das Funktional $F(u)$ in der Funktionenklasse aufgestellt, die den Definitionsbereich des Operators $A$ bildet; es wurde gezeigt, daß dieses Minimum durch die Funktion $u_0(P)$ realisiert wird, die der Gleichung $Au_0 = f(P)$ genügt. Wir stellen jetzt das Minimalproblem für dasselbe Funktional in der größeren Klasse der *Funktionen mit endlicher Energie* auf. Wir zeigen, daß sich das Minimum des Funktionals dabei nicht ändert und daß wie vorher nur die Funktion $u_0(B)$ dieses Minimum realisiert.

Wir bezeichnen mit $d$ das Minimum von $F(u)$ in der Klasse $D_A$ und mit $d_1$ das Minimum von $F(u)$ in der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie. Es ist

klar, daß sich bei Erweiterung der Funktionenklasse das Minimum des Funktionals nicht vergrößern kann, so daß $d_1 \leq d$ ist. Wir nehmen an, daß $d_1 < d$ ist. Dann gibt es eine solche Funktion $\tilde{u}(P)$ mit endlicher Energie, so daß $F(\tilde{u}) < d$ oder ausführlicher, daß

$$[\tilde{u}, \tilde{u}] - 2(\tilde{u}, f) = |\tilde{u}|^2 - 2(\tilde{u}, f) < d$$

gilt. Nach den Formeln (4) und (7) des § 16 existiert eine solche Funktionenfolge $u_n \in D_A$, so daß $|u_n - \tilde{u}| \to 0$ und $\|u_n - \tilde{u}\| \to 0$ gilt. Aus der ersten Beziehung folgt, daß $|u_n| \to |\tilde{u}|$ gilt, aus der zweiten, daß $(u_n, f) \to (\tilde{u}, f)$ (vgl. § 3) gilt. Dann aber unterscheiden sich bei hinreichend großem $n$ die Größen $F(\tilde{u}) = |\tilde{u}|^2 - 2(\tilde{u}, f)$ und $F(u_n) = |u_n| - 2(u_n, f)$ beliebig wenig voneinander, und für hinreichend großes $n$ ist daher $F(u_n) < d$. Das ist jedoch unmöglich, da $u_n \in D_A$ und $d$ der kleinste Wert ist, den das Funktional $F(u)$ auf der Funktionenklasse $D_A$ annimmt. Dieser Widerspruch besagt, daß $d_1 = d$ ist.

Wir nehmen jetzt an, in der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie werde das Minimum des Funktionals $F(u)$ außer durch die oben erwähnte Funktion $u_0(P)$ noch durch eine andere Funktion $w_0(P)$ realisiert und zeigen, daß $w_0(P) \equiv u_0(P)$ ist. Die Formel (5) des § 11 gibt eine Identität, die für eine beliebige Funktion $\eta(P)$ der Klasse $D_A$ richtig ist: $(Au_0, \eta) = (f, \eta)$, oder unter Verwendung des Begriffes des energetischen Produktes,

$$[u_0, \eta] = (f, \eta). \tag{2}$$

Wir setzen darin $\eta = u_0$ und erhalten speziell

$$[u_0, u_0] = (f, u_0). \tag{3}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Identität (2) für beliebige Funktionen $\eta$ mit endlicher Energie gültig bleibt. Wenn nämlich $\eta$ eine solche Funktion ist, dann existiert eine derartige Funktionenfolge $\eta_n \in D_A$, daß $|\eta - \eta_n| \to 0$ und $\|\eta - \eta_n\| \to 0$ gilt. Für die Funktionen $\eta_n$ ist die Identität (2) richtig:

$$[u_0, \eta_n] = (f, \eta_n).$$

Wir führen den Grenzübergang $n \to \infty$ durch und finden unter Benutzung des Satzes von der Stetigkeit des Skalarproduktes[1]) (Satz 2 des § 7), daß die Identität (2) für eine willkürliche Funktion $\eta$ mit endlicher Energie gilt. Jetzt kann man in der Identität (2) $\eta = w_0$ setzen, was

$$[u_0, w_0] = (f, w_0) \tag{4}$$

ergibt. Wir erinnern jetzt daran, daß $w_0$ das Minimum des Funktionals $F(u)$ auf der Funktionenklasse mit endlicher Energie ist. Wir schreiben $F(u)$ in diesem Fall in der Form (1); indem wir die Darlegung in § 11 wiederholen, kommen wir zur Identität

$$[w_0, \eta] = (f, \eta),$$

[1]) Dieser Satz und sein Beweis läßt sich unmittelbar auch auf das energetische Produkt ausdehnen.

wo $\eta$ eine beliebige Funktion mit endlicher Energie ist. Indem wir hier $\eta = w_0$ und darauf $\eta = u_0$ setzen, erhalten wir

$$[w_0, w_0] = (f, w_0), \tag{5}$$

$$[w_0, u_0] = (f, u_0). \tag{6}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (5) und (4), beziehungsweise (6) und (3), finden wir

$$[w_0 - u_0, w_0] = 0, \qquad [w_0 - u_0, u_0] = 0.$$

Schließlich ergibt die Subtraktion der letzten Gleichungen $[w_0 - u_0, w_0 - u_0] = 0$ oder $|w_0 - u_0|^2 = 0$. Daraus folgt $w_0 = u_0$, was zu beweisen war.

Aus dem Bewiesenen folgt, daß *als Lösung der Gleichung $Au = f$ diejenige Funktion gesucht werden kann, die das Funktional* (1) *in der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie zum Minimum macht.* Leicht überzeugt man sich, daß für dieses neue Variationsproblem die grundlegenden Ergebnisse der §§ 12—14 richtig bleiben mit einer gewissen Verschärfung. Es gilt nämlich:

1. Die Funktionenfolge $\varphi_n(P)$ sei orthonormiert und vollständig bezüglich der Energie, doch fordern wir im Unterschied zum § 12 nicht, daß diese Funktionen im Definitionsbereich des Operators $A$ liegen, sondern beschränken uns auf die Forderung, daß die $\varphi_n(P)$ Funktionen mit endlicher Energie sind. Dann bleibt die Formel (2) des § 12

$$u_0(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(P)$$

gültig, wo $u_0(P)$ die Lösung der Gleichung $Au = f(P)$ ist.

2. Es sei $u_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Minimalfolge für das Funktional (1), und die Funktionen $u_n(P)$ mögen endliche Energie besitzen aber nicht unbedingt in $D_A$ liegen. Dann ist $u_n(P) \xrightarrow{E} u_0(P)$, und da $A$ nach Voraussetzung ein positiv-definiter Operator ist, gilt gleichzeitig $u_n \xrightarrow{M} u$.

3. Bei Anwendung des Ritzschen Verfahrens kann man als Koordinatenfunktionen beliebige Funktionen nehmen, die endliche Energie besitzen, aber nicht notwendig in $D_A$ liegen, wenn sie die Bedingungen 1 und 2 des § 14 erfüllen; die so gebildete Näherungslösung der Gleichung $Au = f$ konvergiert bezüglich der Energie gegen die exakte Lösung dieser Gleichung. Das System der Ritzschen Gleichungen muß man in diesem Falle in der Form $(8_2)$ des § 14 schreiben, da die Form $(8_1)$ des § 14 ihren Sinn verliert, wenn $u \notin D_A$[1]) ist.

Wir wenden uns jetzt der praktisch sehr wichtigen Frage der natürlichen Randbedingungen zu. Nach der Definition eines Operators erfüllen die Funktionen seines Definitionsbereiches die Randbedingungen der zugehörigen Aufgabe; gleichzeitig zeigen die Beispiele des § 16, daß die Funktionen mit endlicher Energie in manchen Fällen diese Randbedingungen unbedingt erfüllen, in anderen nicht. *Die Randbedingungen, welchen die Funktionen aus dem Definitionsbereich eines gegebenen Operators unbedingt genügen, die Funktionen mit endlicher Energie jedoch nicht unbedingt, heißen natürliche Randbedingungen für den gegebenen Operator.*

---

[1]) Das Symbol $\notin$ bezeichnet die Nichtzugehörigkeit zur gegebenen Menge.

Die Randbedingungen, welchen die Funktionen mit endlicher Energie unbedingt genügen, werden manchmal als *wesentliche Randbedingungen*[1]) bezeichnet. So besagen die Beispiele des § 16, daß für den Operator $-\frac{d^2u}{dx^2}$ $(0 < x < 1)$ die Bedingungen $u(0) = 0$ und $u(1) = 0$ wesentliche, die Bedingungen $u'(0) = 0$ und $u'(1) = 0$ natürliche Randbedingungen sind.

Aus dem oben Gesagten folgt, daß bei Anwendung des RITZschen Verfahrens keine Notwendigkeit besteht, die Koordinatenfunktionen den natürlichen Randbedingungen zu unterwerfen, es genügt, daß sie die wesentlichen Randbedingungen erfüllen. Diese einfache Bemerkung spielt eine wichtige Rolle bei der praktischen Anwendung des RITZschen Verfahrens, da sie die Wahl der Koordinatenfunktionen sehr erleichtert. Im Zusammenhang damit erweist es sich als nötig, ein einfaches Kriterium anzugeben, das die natürlichen von den wesentlichen Randbedingungen zu unterscheiden gestattet. Wir geben ein solches Kriterium für eine gewisse Klasse von Differentialoperatoren, die alle praktisch einigermaßen wichtigen Fälle umfaßt. Der Operator $A$ möge die Form

$$Au = \sum_{k=0}^{s} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ j_1, j_2, \ldots, j_k = 1}}^{m} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\, dx_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left( A_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}(P) \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\, \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right) \tag{7}$$

haben, so daß seine Ordnung gleich $2s$ ist, ferner sei dieser Operator positiv-definit auf einer Menge von Funktionen, die gewissen Randbedingungen genügen. Dann sind die homogenen Randbedingungen, in denen Ableitungen von $u$ von mindestens der Ordnung $s$ vorkommen, natürliche, und diejenigen, welche Ableitungen von $u$ nur bis zur Ordnung $s - 1$ enthalten, wesentliche Randbedingungen. So ist für den LAPLACE-Operator $(s = 1)$ die Bedingung $u|_S = 0$ wesentlich, die Bedingung $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right] = 0$ natürlich; für den biharmonischen Operator $(s = 2)$

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4},$$

der in der Theorie der Biegung dünner Platten eine fundamentale Rolle spielt, ist die Bedingung

$$u|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$$

für fest eingespannten Rand wesentlich, während von den Bedingungen für den frei gestützten Rand (siehe § 27)

$$u|_S = 0, \quad \left[\Delta u - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_S = 0$$

($\varrho$ Krümmungsradius des Randes) die erste wesentlich, die zweite natürlich ist.

[1]) In der Elastizitätstheorie bezeichnet man als wesentliche Randbedingungen gewöhnlich die geometrischen oder kinematischen, als natürliche die dynamischen.

Die Gleichung $Au = f$ kann auch ein Gleichungssystem symbolisieren, in diesem Falle ist in Formel (7) unter $u$ eine Vektorfunktion zu verstehen, unter $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$ eine Matrix. Das oben erwähnte Kriterium, dessen Anwendung die wesentlichen von den natürlichen Bedingungen zu unterscheiden erlaubte, gilt auch in diesem Falle. Der Beweis des oben formulierten Kriteriums führt über den Rahmen dieses Buches hinaus. Ausführlicheres darüber entnehme man dem Buch [11] des Autors, § 35. Man kann ein Verfahren angeben, dessen Anwendung in jedem konkreten Falle zu entscheiden gestattet, ob eine gegebene Randbedingung natürlich ist oder nicht. Dieses Verfahren besteht in folgendem: Den Ausdruck $(Au, v) = [u, v]$, worin $u$ und $v$ Funktionen aus $D_A$ sind und demzufolge allen Randbedingungen genügen, bringen wir durch partielle Integration und Ausnutzung der Randbedingungen auf eine in $u$ und $v$ symmetrische Form; eine solche Umformung ist möglich, da der Operator $A$ symmetrisch und $(Au, v) = (Av, u)$ ist. Wenn wir in dem so gewonnenen Ausdruck $v = u$ setzen, erhalten wir einen Ausdruck für $[u, u]$. Wir nehmen an, daß dieser Ausdruck, wie es oft zutrifft, auch für solche Funktionen sinnvoll ist und positiv bleibt, die die bei unserem Problem interessierenden Randbedingungen nicht erfüllen. Den erwähnten Ausdruck für $[u, u]$ setzen wir in $F(u)$ ein und nehmen an, daß eine Funktion $u_0$ existiert, die dieses Funktional auf der Klasse derjenigen Funktionen zum Minimum macht, die die gegebenen Bedingungen im allgemeinen nicht erfüllen. Mit den üblichen Hilfsmitteln der Variationsrechnung[1]) kann man notwendige Bedingungen finden, denen die Funktion $u_0$ genügen muß. Wenn unter diesen auch die gegebene Randbedingung ist, dann ist sie natürlich.

Geradeso haben wir in § 11 gezeigt, daß die Randbedingungen $u'(0) = u'(1) = 0$ für den Operator $-\dfrac{d^2u}{dx^2}$, $0 < x < 1$ natürlich sind. Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel. Wir zeigen, daß für die Gleichung $-\Delta u = f(P)$ die Randbedingung des gemischten Problems

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]_S = 0, \quad \sigma > 0 \tag{8}$$

natürlich ist. Mögen die Funktionen $u$ und $v$ der Bedingung (8) genügen. Dann gilt

$$(-\Delta u, v) = -\int_\Omega v\,\Delta u\, d\Omega$$

und auf Grund der GREENschen Formel

$$(-\Delta u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS.$$

Infolge der Bedingung (8) ist $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = -\sigma u\,|_S$ und schließlich

$$(-\Delta u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, d\Omega + \int_S \sigma u v\, dS;$$

---

[1]) Siehe z. B. W. I. SMIRNOW [4], Kap. I.

die rechte Seite der letzten Gleichung ist symmetrisch in $u$ und $v$. Jetzt gilt

$$[u, u] = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega + \int_S \sigma u^2 \, dS,$$

welcher Ausdruck sinnvoll und positiv für beliebige in $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbare Funktionen ist, unabhängig davon, ob sie die Bedingung (8) erfüllen oder nicht.

Das Funktional $F(u)$ kann man jetzt in der Form

$$F(u) = [u, u] - 2(f, u) = \int_\Omega [(\operatorname{grad} u)^2 - 2fu] \, d\Omega + \int_S \sigma u^2 \, dS$$

darstellen. Wir betrachten dieses Funktional auf der Menge aller in $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, ohne vorauszusetzen, daß diese Funktionen irgendwelchen Randbedingungen genügen; ferner möge die Funktion $u_0(P)$ das Minimum von $F(u)$ auf der genannten Menge realisieren. Wir bezeichnen mit $t$ eine willkürliche reelle Zahl und mit $\eta(P)$ eine willkürliche Funktion, die in $\bar{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbar sei. Offensichtlich ist $F(u_0 + t\eta) \geq F(u_0)$. Für eine feste Funktion $\eta$ ist $F(u_0 + t\eta)$ eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen $t$; die letzte Ungleichung besagt, daß diese Funktion für $t = 0$ ein Minimum hat. Dann aber ist notwendig

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + t\eta)|_{t=0} = 0.$$

Man findet leicht

$$F(u_0 + t\eta) = F(u_0) + 2t \left\{ \int_\Omega (\operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta - f\eta) \, d\Omega \right.$$
$$\left. + \int_S \sigma u_0 \eta \, dS \right\} + t^2 \left\{ \int_\Omega (\operatorname{grad} \eta)^2 \, d\Omega + \int_S \sigma \eta^2 \, dS \right\}.$$

Wir differenzieren nach $t$, setzen $t = 0$ und setzen das Ergebnis gleich Null. Wir finden

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta - f\eta) \, d\Omega + \int_S \sigma u_0 \eta \, dS = 0. \tag{9}$$

Nach der GREENschen Formel ist

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta \, d\Omega = - \int_\Omega \eta \Delta u_0 \, d\Omega + \int_S \eta \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \, dS,$$

und die Gleichung (9) nimmt die Form

$$- \int_\Omega \eta (\Delta u_0 + f) \, d\Omega + \int_S \eta \left( \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \sigma u_0 \right) dS = 0$$

an. Da die Funktion $\eta(P)$ willkürlich war, erhalten wir

$$\Delta u_0 + f = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \sigma u_0 = 0 \text{ auf } S,$$

was zu beweisen war.

## § 18. Inhomogene Randbedingungen

Bei der Betrachtung der Gleichung $Au = f$ haben wir bisher angenommen, daß der Operator $A$ auf einer Menge von Funktionen definiert ist, die homogenen Randbedingungen genügen. Das erlaubt uns, nur solche Probleme zu betrachten, in denen die Bedingungen auf dem Rand des Gebietes homogen sind. In der Praxis spielen jedoch inhomogene Randbedingungen eine wichtige Rolle, weswegen es von Interesse ist, zu untersuchen, wie man die energetische Methode auf den Fall inhomogener Randbedingungen ausdehnen kann. Wir betrachten die Gleichung

$$Lu = f(P); \tag{1}$$

wir nehmen an, daß $L$ ein Differentialoperator der Ordnung $k$ sei; als Definitionsbereich $D_L$ nehmen wir die Gesamtheit aller Funktionen, die in einem vorgegebenen abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega} = \Omega + S$ stetige Ableitungen der Ordnungen $1, 2, \ldots, k-1$ und eine stückweise stetige Ableitung der Ordnung $k$ besitzen; die zu $D_L$ gehörenden Funktionen seien keinerlei Randbedingungen unterworfen. Wir wollen annehmen, daß der Operator $L$ linear ist. Wir nehmen an, daß die Gleichung (1) bei den Randbedingungen[1]

$$G_1 u|_S = g_1, \quad G_2 u|_S = g_2, \ldots, G_r u|_S = g_r \tag{2}$$

zu integrieren ist, wo $G_1, G_2, \ldots, G_r$ lineare Operatoren, $g_1, g_2, \ldots, g_r$ gegebene Funktionen sind, die auf der Fläche $S$ definiert sind. Wir werden unser Problem unter folgender, sehr wesentlicher Voraussetzung lösen: *Es existiere eine Funktion $\psi(P)$, die in $\bar{\Omega}$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ einschließlich stetig ist, während ihre Ableitung der Ordnung $k$ stückweise stetig in $\Omega$ ist; ferner erfüllt $\psi$ die Randbedingungen des Problems, so daß also*

$$G_1 \psi|_S = g_1, \quad G_2 \psi|_S = g_2, \quad \ldots, \quad G_r \psi|_S = g_r \tag{3}$$

*gilt.*

Wir setzen $u - \psi = v$. Die neue unbekannte Funktion $v(P)$ genügt der Differentialgleichung

$$Lv = f_1(P); \quad f_1(P) = f(P) - L\psi \tag{4}$$

und den homogenen Randbedingungen

$$G_1 v|_S = 0, \quad G_2 v|_S = 0, \quad \ldots, \quad G_r v|_S = 0. \tag{5}$$

Wir nehmen an, daß *der Operator $L$ auf der Menge der den Bedingungen* (5) *genügenden Funktionen positiv ist.* Nach dem Satz vom Minimalfunktional ist das Lösen der Gleichung (4) bei den Randbedingungen (5) gleichbedeutend mit dem Aufsuchen einer Funktion, die das Funktional

$$F(v) = (Lv, v) - 2(v, f_1)$$

---

[1]) Deren Zahl wird von der Ordnung der Gleichung (1) bestimmt, sowie davon, ob die gesuchte Funktion $u(P)$ ein Skalar oder eine Vektorfunktion ist.

auf dieser Menge zum Minimum macht. Wir ersetzen hier $v$ durch $u - \psi$ und $f_1$ durch $f - L\psi$:

$$\begin{aligned} F(v) &= (Lu - L\psi, u - \psi) - 2(u - \psi, f - L\psi) \\ &= (Lu, u) - 2(u, f) + (u, L\psi) - (Lu, \psi) + 2(\psi, f) - (L\psi, \psi). \end{aligned}$$

Für den Operator $L$ gelingt es gewöhnlich, eine der GREENschen Formel (siehe § 2) analoge Gleichung aufzustellen, mit deren Hilfe der Ausdruck

$$(u, L\psi) - (Lu, \psi) = \int_\Omega (u \cdot L\psi - \psi \cdot Lu)\, d\Omega$$

in ein Flächenintegral umgewandelt werden kann, das wir mit

$$\int_{S'} R(u, \psi)\, dS$$

bezeichnen. Der Ausdruck $R(u, \psi)$ hängt von der Form des Operators $L$ ab. Unter Verwendung der Randbedingungen (2) und (3) kann man $R(u, \psi)$ oft in der Form

$$R(u, \psi) = N(u) + M$$

darstellen, wo $N(u)$ nur von $u$ abhängt und von den Funktionen $g_1, g_2, \ldots, g_r$, die in den Randbedingungen (2) vorkommen, während $M$ nicht von $u$ abhängt, es kann jedoch von $\psi$ abhängen. In diesem Fall nimmt $F(v)$ die Form

$$F(v) = (Lu, u) - 2(u, f) + \int_S N(u)\, dS + \left[2(\psi, f) - (L\psi, \psi) + \int_S M\, dS\right]$$

an.

Der Ausdruck in den eckigen Klammern stellt eine Konstante dar (die möglicherweise unbekannt ist, wenn sich die Funktion $\psi$ nicht effektiv bestimmen läßt), deshalb ist die Bestimmung des Minimums des Funktionals $F(v)$ gleichbedeutend mit der Bestimmung eines anderen Funktionals, das wir mit $\Phi(u)$ bezeichnen:

$$\Phi(u) = (Lu, u) - 2(u, f) + \int_S N(u)\, dS = \int_\Omega (uLu - 2uf)\, d\Omega + \int_S N(u)\, dS; \quad (6)$$

das Minimum ist in der den Bedingungen (2) genügenden Funktionenklasse zu suchen.

**Anmerkung 1.** Das Funktional (6) kann man bilden, ohne die Funktion $\psi$ zu kennen, doch muß die Existenz einer solchen Funktion gesichert sein, damit das Minimalproblem für dieses Funktional sinnvoll ist. Andernfalls braucht das Variationsproblem keine Lösung zu haben, wie das Beispiel von HADAMARD zeigt (siehe Einführung). In einer Reihe von Fällen ist bewiesen, daß die Funktion $\psi$ existiert, sofern die Fläche $S$ hinreichend glatt ist, und die Funktionen $g_1, g_2, \ldots, g_r$, die den Bedingungen (2) genügen, hinreichend oft differenzierbar sind in beliebiger zur Fläche $S$ tangentialer Richtung. Wir wollen uns nicht weiter mit dieser Frage beschäftigen.

**Anmerkung 2.** Es kann vorkommen, daß einige der Bedingungen (5) für das Funktional $F(v)$ natürlich sind. Dann sind die ihnen entsprechenden inhomogenen Bedingungen (2) für das Funktional $\Phi(u)$ natürlich; das Minimum von $\Phi(u)$ kann deshalb in einer größeren Klasse von Funktionen als der oben genannten gesucht werden, nämlich in der Klasse derjenigen Funktionen, die alle Bedingungen (2) mit möglicher Ausnahme der natürlichen erfüllen.

Als Beispiel betrachten wir die Integration der LAPLACE-Gleichung

$$-\Delta u = 0 \tag{7}$$

bei der Randbedingung

$$u|_S = g(P); \tag{8}$$

diese Aufgabe wird bekanntlich als DIRICHLETsches Problem bezeichnet. Wir haben in der Gleichung (7) links das Minuszeichen gesetzt, weil bei der Randbedingung $u|_S = 0$ der Operator $-\Delta$ positiv ist. In unserem Fall ist $f \equiv 0$, und das zweite Glied in (6) verschwindet. Um $N(u)$ zu finden, bilden wir den Ausdruck

$$\int_\Omega (u \cdot L\psi - \psi \cdot Lu)\, d\Omega = \int_\Omega (\psi\, \Delta u - u\, \Delta\psi)\, d\Omega,$$

da in unserem Falle $L = -\Delta$ ist. Nach der GREENschen Formel (Formel (10), § 2) ist

$$\int_\Omega (\psi\, \Delta u - u\, \Delta\psi)\, d\Omega = \int_S \left(\psi \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right) dS,$$

wo $\nu$ die Außennormale zu $S$ ist. Also gilt in unserem Falle

$$R(u, \psi) = \psi \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \psi}{\partial \nu}.$$

Nach der Bedingung (8) ist $u|_S = g(P)$; derselben Randbedingung genügt auch die Funktion $\psi$, so daß $\psi|_S = g(P)$ ist. Das ergibt $R(u, \psi) = g \frac{\partial u}{\partial \nu} - g \frac{\partial \psi}{\partial \nu}$. Daraus ist ersichtlich, daß in unserem Falle $N(u) = g \frac{\partial u}{\partial \nu}$ und $M = g \frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ ist. Es ergibt sich

$$\Phi(u) = -\int_\Omega u\, \Delta u\, d\Omega + \int_S g \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS. \tag{9}$$

Den Ausdruck (9) kann man bilden, wenn man die Formel (9) des § 2 benutzt:

$$-\int_\Omega u\, \Delta u\, d\Omega = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS. \tag{10}$$

Wir setzen das in (9) ein. Bei Berücksichtigung von $u|_S = g(P)$ zeigt sich, daß das Flächenintegral verschwindet; das DIRICHLETsche Problem selbst führt auf

die Bestimmung des Minimums des Integrals

$$\Phi(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{11}$$

in einer Klasse von Funktionen, die auf dem Rand $S$ des betrachteten Gebietes die vorgegebenen Werte $g(P)$ annehmen. Historisch war das DIRICHLETsche Problem das erste, auf das die energetische Methode angewendet wurde.

Wir betrachten noch das Problem der Integration derselben Gleichung (7) bei der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = h(P) \tag{12}$$

(NEUMANNsches Problem). Wie vorher ist $f = 0$ und $R(u, \psi) = \psi \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \psi}{\partial \nu}$, aber diesmal ergibt die Randbedingung $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_S = h$ und $R(u, \psi) = \psi h - u h$. Daraus folgt $N(u) = -uh$, $M = \psi h$, und nach Formel (6) wird

$$\Phi(u) = -\int_\Omega u \, \Delta u \, d\Omega - \int_S u h \, dS.$$

Das Volumintegral formen wir nach (10) um. Unter nochmaliger Berücksichtigung der Bedingung (12) erhalten wir schließlich

$$\Phi(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega - 2 \int_S u h \, dS. \tag{13}$$

Die Randbedingung (12) ist für das Funktional (13) natürlich, und dessen Minimum kann auf einer Klasse von Funktionen bestimmt werden, die keinerlei Randbedingungen unterworfen sind.

## § 19. Über die Existenz der Lösung eines Variationsproblems

Bisher gingen wir stets von der Voraussetzung aus, daß die betrachtete Gleichung

$$Au = f$$

eine Lösung mit endlicher Energie hat. Daraus folgte dann, daß auch das Minimalproblem für das Funktional

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) = [u, u] - 2(u, f)$$

eine Lösung hat, wenn der Operator positiv ist. Im vorliegenden Paragraphen zeigen wir, daß *das Minimalproblem für das Funktional $F(u)$ eine Lösung in der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie hat, wenn nur der Operator $A$ positiv-definit ist.*

Wir schreiben das Funktional $F(u)$ in der Form

$$F(u) = |u|^2 - 2(u, f). \tag{1}$$

Wir zeigen zunächst, daß dieses Funktional nach unten beschränkt ist. Nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI (Formel (8) des § 3) ist $|(u, f)| \leq \|u\| \cdot \|f\|$; nun ist der Operator $A$ positiv-definit, deshalb ist $\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|$ ($\gamma$ ist die Konstante aus der Ungleichung (7) des § 6) und

$$F(u) \geq |u|^2 - \frac{2}{\gamma} |u| \cdot \|f\| = \left(|u| - \frac{2}{\gamma} \|f\|\right)^2 - \frac{\|f\|^2}{\gamma^2}.$$

Wenn man rechts das erste Glied fortläßt, wird die Ungleichung verstärkt, es ist also

$$F(u) \geq -\frac{\|f\|^2}{\gamma^2};$$

bei beliebiger Wahl von $u(P)$ aus der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie wird das Funktional $F(u)$ niemals kleiner als die Konstante $-\frac{\|f\|^2}{\gamma^2}$; das aber bedeutet, daß das Funktional nach unten beschränkt ist. Daraus folgt, daß dieses Funktional eine wohldefinierte untere Grenze (SMIRNOW [1], Punkt 42) hat, welche wir mit $d$ bezeichnen. Wie in § 17 gezeigt wurde, ändert sich diese Grenze nicht, wenn man die Werte von $F(u)$ nicht in der Klasse $D_A$ der Funktionen des Definitionsbereiches des Operators $A$ betrachtet, sondern in der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie.

Nach der Definition der unteren Grenze kann man zu jeder beliebig vorgegebenen positiven Zahl $\varepsilon$ eine Funktion $u(P, \varepsilon)$ mit endlicher Energie derart finden, daß $F(u(P, \varepsilon)) < d + \varepsilon$ ist. Gleichzeitig ist offensichtlich $F(u(P, \varepsilon)) \geq d$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{n}$, wo $n$ eine beliebige positive ganze Zahl ist; die entsprechende Funktion $u\left(P, \frac{1}{n}\right)$ bezeichnen wir kurz mit $u_n(P)$. Dann ist

$$d \leq F(u_n) < d + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Wir machen den Grenzübergang $n \to \infty$ und finden

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = d. \tag{3}$$

Die Gleichung (3) besagt, daß *die Funktionen $u_n(P)$ eine Minimalfolge für das Funktional $F(u)$ darstellen.*

Der nächste Schritt besteht in dem Beweis, daß unsere Minimalfolge bezüglich der Energie gegen einen Grenzwert konvergiert. Wir geben eine willkürliche Zahl $\varepsilon > 0$ vor und wählen die ganze Zahl $N$ so, daß $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wenn dann $n > N$ und $m > N$ ist, so ist $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ und folglich

$$d \leq F(u_n) < d + \frac{\varepsilon}{2}, \quad d \leq F(u_m) < d + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Es sei $t$ eine willkürliche Zahl, die zwischen Null und Eins liegt. Wir betrachten die Funktion $w_t(P) = tu_n(P) + (1-t)\,u_m(P)$ und bilden den Ausdruck

$$F(w_t) = [tu_n + (1-t)u_m,\, tu_n + (1-t)u_m] - 2(tu_n + (1-t)u_m, f).$$

Wir lösen die Klammern auf und erhalten

$$F(w_t) = |u_n - u_m|^2 t^2 + 2\{[u_n - u_m, u_m] - (u_n - u_m, f)\}\, t + |u_m|^2 - 2(u_n, f).$$

Danach ist $F(w_t)$ ein quadratisches Polynom bezüglich $t$, worin der Koeffizient von $t^2$ positiv ist. Das graphische Bild dieses Polynoms ist eine Parabel, deren konkave Seite nach oben gerichtet ist. Wenn man zu dieser Parabel eine beliebige Sehne zieht, dann liegt der zu der Sehne gehörende Bogen unter der Sehne (Abb. 7). Daraus ergibt sich folgendes. Wir betrachten die Sehne, deren Endpunkte die Abszissen $t = 0$ und $t = 1$ haben. Bei beliebigem $t$ aus $0 < t < 1$ erweist sich $F(w_t)$ kleiner als die größere der beiden Größen $F(w_0)$ und $F(w_1)$. Nun ist $w_0 = u_m$, $w_1 = u_n$; wegen der Ungleichungen (4) ist jede der Größen $F(u_n)$ und $F(u_m)$ kleiner als $d + \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt, daß $F(w_t) < d + \frac{\varepsilon}{2}$ für $0 < t < 1$ ist. Gleichzeitig ist $F(w_t) \geq \inf F(u) = d$. Wir setzen insbesondere $t = \frac{1}{2}$. Dann ist $w_{1/2} = \frac{u_m + u_n}{2}$ und

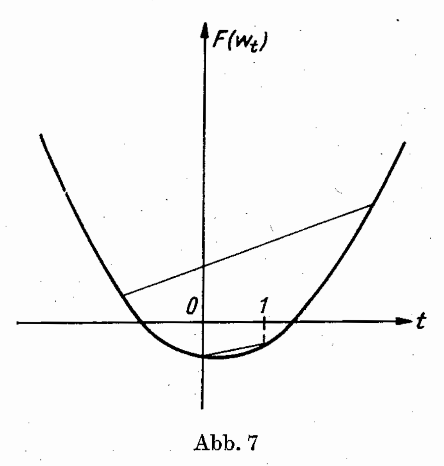


Abb. 7

$$d \leq F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) < d + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (4) und (6) folgt leicht

$$-\varepsilon < F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) < \varepsilon, \qquad m, n > N,$$

und diese Ungleichung besagt, daß

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \left[F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right)\right] = 0 \tag{7}$$

gilt. Wir berechnen die Größe unter dem Limeszeichen in (7). Nach Formel (1) ist

$$F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) = |u_n|^2 + |u_m|^2 - \frac{1}{2}\,|u_m + u_n|^2. \tag{8}$$

Ferner gilt

$$|u_n + u_m|^2 = [u_n + u_m, u_n + u_m] = |u_n|^2 + 2[u_n, u_m] + |u_m|^2.$$

Eingesetzt in (8) ergibt das

$$F(u_n) + F(u_m) - 2F\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}\,|u_n - u_m|^2 .$$

Jetzt folgt aus der Gleichung (7), daß

$$\lim_{n,\,m\to\infty} |u_n - u_m| = 0 \tag{9}$$

gilt. Auf Grund des in § 16 Bewiesenen existiert eine solche Funktion $u_0(P)$ mit endlicher Energie, so daß $u_n \xrightarrow{E} u_0$ und $u_n \xrightarrow{M} u_0$ gilt.

Wir zeigen jetzt, daß die Funktion $u_0(P)$ das Funktional $F(u)$ zum Minimum macht. Weil $u_n \xrightarrow{E} u_0$ gilt, gilt auch $|u_n| \to |u_0|$; gleichzeitig folgt aus der Stetigkeit des Skalarproduktes (§ 3) $(u_n, f) \to (u_0, f)$. Jetzt gilt

$$F(u_n) = |u_n|^2 - 2(u_n, f) \to |u_0|^2 - 2(u_0, f) = F(u_0)$$

und aus der Beziehung (3) folgt

$$F(u_0) = d = \inf F(u),$$

was zu beweisen war.

Also gibt es in der Klasse der Funktionen mit endlicher Energie eine Funktion $u_0(P)$, die das Funktional (1) zum Minimum macht. Wenn diese Funktion auch im Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ liegt, dann genügt besagte Funktion auch der Gleichung $Au = f$ nach dem Satz vom Minimalfunktional (§ 11); im allgemeinen hat man die Funktion $u_0(P)$ als *verallgemeinerte Lösung* dieser Gleichung zu betrachten. Die in den vorangegangenen Paragraphen dieses Kapitels entwickelten Verfahren sind auch dann anwendbar, wenn die Gleichung $Au = f$ keine gewöhnliche, sondern nur eine verallgemeinerte Lösung besitzt.

KAPITEL IV

# DIE WICHTIGSTEN ANWENDUNGEN DER ENERGETISCHEN METHODE

## § 20. Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

Viele Probleme der mathematischen Physik führen auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wobei diese Lösung in den Endpunkten eines gegebenen Intervalls gewissen Bedingungen genügen muß, die man stets homogen machen kann. Wir können die im vorigen Kapitel entwickelten Verfahren auf unser Problem anwenden, wenn wir feststellen können, daß der durch die linke Seite der Differentialgleichung und die Randbedingungen definierte Operator des betrachteten Problems bei diesen oder jenen Einschränkungen symmetrisch und positiv-definit ist. Damit haben wir es auch im vorliegenden Paragraphen zu tun.

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\,u = f(x). \tag{1}$$

Wir suchen ein Integral dieser Gleichung, das zusammen mit seiner ersten Ableitung im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig ist und an den Enden dieses Intervalls den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha u'(a) - \beta u(a) &= 0, \\ \gamma u'(b) + \delta u(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

genügt, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ konstant sind.

Bezüglich der Daten machen wir folgende Annahmen:

a) $p(x)$, $p'(x)$ und $r(x)$ seien im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig;
b) im selben Intervall sei $p(x) \geq 0$, $r(x) \geq 0$;
c) die Funktion $p(x)$ kann in bestimmten Punkten des Intervalls $a \leq x \leq b$ verschwinden, dann aber so, daß das Integral

$$A = \int_a^b \frac{dx}{p(x)} \tag{3}$$

konvergiert (und folglich einen endlichen Wert besitzt); diese Forderung ist insbesondere stets erfüllt, wenn $p(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ nirgends verschwindet;
d) die Konstanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ seien nicht negativ, wobei $\alpha$ und $\beta$ und ebenso auch $\gamma$ und $\delta$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Als Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ nehmen wir die Menge der Funktionen, die im Intervall $a \leq x \leq b$ zusammen mit ihren ersten und zweiten Ab-

leitungen stetig sind und den Randbedingungen (2) genügen. Wir zeigen, daß der Operator $L$ symmetrisch ist. Zu diesem Zweck bilden wir das Skalarprodukt $(Lu, v)$, wobei für beide Funktionen $u, v \in D_A$ gilt, insbesondere sollen beide Funktionen den Bedingungen (2) genügen. Wir haben

$$(Lu, v) = -\int_a^b v \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) dx + \int_a^b r(x)\, u(x)\, v(x)\, dx.$$

Wir integrieren im ersten Integral partiell und benutzen die Randbedingungen (2):

$$(Lu, v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + r(x)\, uv\right] dx + \frac{\beta}{\alpha}\, p(a)\, u(a)\, v(a) + \frac{\delta}{\gamma}\, p(b)\, u(b)\, v(b); \quad (4)$$

wir nehmen dabei an, daß $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ ist. Wenn $\alpha = 0$ oder $\gamma = 0$ ist, dann ist $u(a) = 0$ oder $u(b) = 0$ und der entsprechende Summand rechts in (4) ist wegzulassen. Wenn insbesondere $\alpha = \gamma = 0$ ist, so daß die Bedingung (2) die Form

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (2_1)$$

annimmt, dann ist

$$(Lu, v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + ruv\right] dx. \quad (4_1)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (4) ist symmetrisch in $u$ und $v$; daraus ergibt sich, daß $(Lu, v) = (u, Lv)$ gilt, d.h. daß der Operator $L$ symmetrisch ist.

Wenn wir in (4) $u(x) = v(x)$ setzen, erhalten wir

$$(Lu, v) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + r(x)\, u^2(x)\right] dx + \frac{\beta}{\alpha}\, u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma}\, u^2(b). \quad (5)$$

Wir zeigen, daß der Operator $L$ positiv-definit ist, wenn mindestens eine der Zahlen $\beta$ und $\delta$ von Null verschieden ist. Wir betrachten zuerst den einfachsten Spezialfall, daß die Randbedingungen die Form $(2_1)$ haben und $p(x) \geq p_0$ ist, wo $p_0$ eine positive Konstante ist. In diesem Fall vereinfacht sich die Formel (5):

$$(Lu, u) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + r(x)\, u^2(x)\right] dx. \quad (5_1)$$

In Formel $(5_1)$ lassen wir den nicht negativen zweiten Summanden fort und ersetzen $p(x)$ durch den kleineren konstanten Wert $p_0$. Dann geht die Gleichung $(5_1)$ in die Ungleichung

$$(Lu, u) \geq p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = p_0 \left\|\frac{du}{dx}\right\|^2 \quad (6)$$

über.

Jetzt ist $\left\|\frac{du}{dx}\right\|$ abzuschätzen. Da $u(a) = 0$ ist, ist

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt, \qquad u'(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI (Formel ($8_1$), § 3), ist für $a \leq x \leq b$

$$u^2(x) \leq (x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt \leq (x-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt = (x-a)\,\|u'\|^2.$$

Integration von $a$ bis $b$ ergibt

$$\|u\|^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}\,\|u'\|^2. \tag{7}$$

Setzt man das in (5) ein, so erhält man die Ungleichung

$$(Lu, u) \geq \gamma^2\,\|u\|^2; \qquad \gamma^2 = \frac{2p_0}{(b-a)^2},$$

die besagt, daß der Operator $L$ positiv-definit ist.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück. Wir nehmen an, daß $\beta > 0$ ist. In Formel (5) streichen wir rechts den zweiten Summanden unter dem Integral und den zweiten Summanden außerhalb des Integrals. Dadurch wird die rechte Seite in (5) verkleinert, und wir erhalten die Ungleichung

$$(Lu, u) \geq \int_a^b p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{\beta}{\alpha}\,u^2(a) \geq B\left[\int_a^b p u'^2\,dx + u^2(a)\right], \tag{8}$$

wo $B$ die größere der Zahlen $\frac{\beta}{\alpha}$ und 1 ist.

Wir haben

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt.$$

Infolge der elementaren Ungleichung[1] $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ erhalten wir

$$u^2(x) \leq 2u^2(a) + 2\left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2.$$

Ferner ist

$$\left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 = \left(\int_a^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}}\sqrt{p(t)}\,u'(t)\,dt\right)^2$$

---

[1]) Es ist nämlich $(a+b)^2 \leq (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.

und nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI

$$\left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^x \frac{dt}{p(t)} \int_a^x p(t)\,u'^2(t)\,dt.$$

Durch Vergrößerung der oberen Grenze in den Integralen auf der rechten Seite können wir die Ungleichung nur verstärken, deshalb ersetzen wir rechts $x$ durch seinen größten Wert $b$. Dann erhalten wir

$$\left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b \frac{dt}{p(t)} \int_a^b p(t)\,u'^2(t)\,dt = A \int_a^b p(t)\,u'^2(t)\,dt$$

und folglich

$$u^2(x) \leq 2A \int_a^b p(t)\,u'^2(t)\,dt + 2u^2(a).$$

Wir integrieren das nach $x$ von $a$ bis $b$ und finden

$$\|u\|^2 \leq C\left[\int_a^b p(t)\,u'^2(t)\,dt + u^2(a)\right], \tag{9}$$

wo $C$ die größere der Zahlen $2A(b-a)$ und $2(b-a)$ ist. Ein Vergleich der Ungleichungen (8) und (9) besagt, daß

$$(Lu, u) \geq \frac{B}{C}\|u\|^2 \tag{10}$$

gilt, d. h. daß der Operator $L$ positiv-definit ist.

Oben wurde vorausgesetzt, daß $\alpha \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ ist. Wenn eine der Zahlen $\alpha$ und $\gamma$ oder beide verschwinden, dann bleibt die Behauptung, daß der Operator $L$ positiv-definit ist, weiter richtig, wobei sich die Überlegungen weiter vereinfachen. Es sei etwa $\alpha = 0$. Die erste der Randbedingungen (2) nimmt dann die Form $u(a) = 0$ an. Anstelle von (8) und (9) ergibt sich die einfachere Ungleichung

$$(Lu, u) \geq \int_a^b p(x)\,u'^2(x)\,dx, \quad \|u\|^2 \leq A(b-a)\int_a^b p(x)\,u'^2(x)\,dx,$$

woraus sich die Ungleichung (10) ergibt, in welcher nur $\frac{B}{C}$ durch $\frac{1}{A(b-a)}$ zu ersetzen ist.

Infolge des Satzes vom Minimalfunktional (§ 11) führt die Aufgabe, die Gleichung (1) bei den Randbedingungen (2) zu integrieren, wenn $\alpha \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ sind, auf das Problem, das Funktional

$$F(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = \frac{\beta}{\alpha}\,p(a)\,u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u^2(b)$$
$$+ \int_a^b [p(x)\,u'^2(x) + r(x)\,u^2(x) - 2f(x)\,u(x)]\,dx \tag{11}$$

zum Minimum zu machen. Wenn $\alpha \neq 0$ oder $\gamma \neq 0$ ist, dann ist die entsprechende Randbedingung (2) natürlich, wie in § 17 besprochen wurde; wenn aber $\alpha = 0$ oder $\gamma = 0$ ist, dann ist die entsprechende Randbedingung wesentlich. Auf Grund der Ergebnisse des § 19 hat unser Randwertproblem eine Lösung; sie kann, angenähert oder exakt, nach einem der in den §§ 12—15 dargelegten Verfahren gebildet werden.

$u_0(x)$ sei die exakte Lösung des Problems, $u_n(x)$ eine Näherungslösung, die auf die oben genannte Weise konstruiert worden ist. Dann gilt, wie wir wissen, $u_n \xrightarrow{E} u_0$. Wir erläutern den Charakter der Konvergenz bezüglich der Energie im gegebenen Falle. Uns ist bekannt, daß $u_0(x)$ eine Funktion mit endlicher Energie und folglich $\left(\text{wegen } \|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|\right)$ mit endlicher Norm ist, über ihre Differenzierbarkeitseigenschaften wissen wir jedoch nichts. Was die Näherungslösung $u_n(x)$ betrifft, so kann man sie stets so bilden, daß sie im Definitionsbereich des Operators liegt. In diesem Falle hat die Funktion $u_n(x)$ stetige erste (und zweite) Ableitungen.

Wir beschränken uns auf die Annahme, daß im Intervall $a \leq x \leq b$ die Ungleichung $p(x) \geq p_0$ erfüllt ist, wo $p_0$ eine positive Konstante ist. Nach Formel (5) haben wir

$$|u|^2 = \int_a^b [p(x)\, u'^2(x) + r(x)\, u^2(x)]\, dx + \frac{\beta}{\alpha} u^2(a) \frac{\delta}{\gamma} u^2(b).$$

Wie schon gesagt wurde, gilt $u_n \xrightarrow{E} u_0$ oder, was dasselbe ist,

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - u_0| = 0.$$

Nach der Dreiecksungleichung (§ 8) ist

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - u_0| + |u_m - u_0|$$

und folglich

$$\lim_{n,\, m\to\infty} |u_n - u_m|^2 = 0.$$

Unter Beachtung der Formel (11) erhält man

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \left\{\int_a^b [p(x)\,(u_n'(x) - u_m'(x))^2 + r(x)(u_n(x) - u_m(x))^2]\, dx \right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{\alpha} [u_n(a) - u_m(a)]^2 + \frac{\delta}{\gamma} [u_n(b) - u_m(b)]^2 \right\} = 0.$$

Die Summanden links sind nicht negativ und deshalb strebt jeder von ihnen einzeln gegen Null; insbesondere gilt

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \int_a^b p(x)\, [u_n'(x) - u_m'(x)]^2\, dx = 0; \; \lim\, [u_n(a) - u_m(a)] = 0. \tag{12}$$

Wir haben offensichtlich

$$\int_a^b [u_n'(x) - u_m'(x)]^2 \, dx \leq \frac{1}{p_0} \int_a^b p(x) \, [u_n'(x) - u_m'(x)]^2 \, dx;$$

daraus ergibt sich

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \int_a^b [u_n'(x) - u_m'(x)]^2 \, dx = 0. \tag{13}$$

Im betrachteten Falle folgt also aus der Konvergenz der Funktionen $u_n(x)$ bezüglich der Energie die Konvergenz im Mittel ihrer ersten Ableitungen; wenn die Funktion $f(x)$ eine endliche Norm besitzt, dann kann man zeigen, daß $u_0(x)$ eine stetige erste Ableitung $u_0'(x)$ besitzt und daß $u_n'(x) \xrightarrow{M} u_0'(x)$ gilt.

Wir betrachten jetzt die Gleichung

$$u_n(x) - u_m(x) = u_n(a) - u_m(a) + \int_a^x [u_n'(t) - u_m'(t)] \, dt.$$

Infolge der Ungleichung $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ und der Cauchyschen Ungleichung gilt

$$[u_n(x) - u_m(x)]^2 \leq 2[u_n(a) - u_m(a)]^2 + 2 \left\{ \int_a^x [u_n'(t) - u_m'(t)] \, dt \right\}^2$$

$$\leq 2[u_n(a) - u_m(a)]^2 + 2(x - a) \int_a^x [u_n'(t) - u_m'(t)]^2 \, dt.$$

Wenn wir rechts $x$ durch $b$ ersetzen, verstärken wir die Ungleichung

$$[u_n(x) - u_m(x)]^2 \leq 2[u_n(a) - u_m(a)]^2 + 2(b - a) \int_a^b [u_n'(t) - u_m'(t)]^2 \, dt. \tag{14}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Folge $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\bar{u}(x)$ konvergiert, da die rechte Seite der Ungleichung (14) nicht von $x$ abhängt und für $n \to \infty$ gegen Null geht.

Es ist leicht zu sehen, daß $u(x) = u_0(x)$ ist. Da nämlich $u_n(x) \xrightarrow{E} u_0(x)$ gilt, ist gleichzeitig $u_n(x) \xrightarrow{M} u_0(x)$. Andererseits folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auch die Konvergenz im Mittel (§ 7), so daß $u_n(x) \xrightarrow{M} \bar{u}(x)$ gilt; da aber ein und dieselbe Folge nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte im Mittel konvergieren kann, so ist $\bar{u}(x) = u_0(x)$.

Wenn also $p(x) \geq p_0 > 0$ ist, dann bedeutet die Konvergenz bezüglich der Energie die gleichmäßige Konvergenz der Funktion selbst und die Konvergenz im Mittel ihrer ersten Ableitungen.

**Anmerkung.** Wenn man auf die Forderung $p(x) \geq p_0 > 0$ verzichtet, aber $p(x)$ der Bedingung unterwirft, daß das Integral (3) konvergieren soll, dann kann man wie vorher zeigen, daß $u_n(x) \to u_0(x)$, und zwar gleichmäßig, gilt, aber anstelle der

Ungleichung (13) kann man nur die schwächere Ungleichung (12) erhalten, und aus dieser kann man wiederum

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\,[u_n'(x) - u_0'(x)]^2\,dx = 0$$

ableiten.

Wir gehen jetzt zur folgenden Gleichung mit beliebiger gerader Ordnung über:

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right] = f(x). \tag{15}$$

Wir beschränken uns auf die einfachsten Randbedingungen

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0. \tag{16}$$

Die Koeffizienten $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ nehmen wir als nicht negativ an, $p_m(x)$ als streng positiv; auch nehmen wir an, daß $f(x)$ eine endliche Norm hat. Bei partieller Integration und Beachtung der Bedingungen (16) findet man

$$(Lu, u) = \sum_{k=0}^{m} \int_a^b p_k(x)\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx \geq \int_a^b p_m(x)\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)^2 dx \geq p_0\,\|u^{(m)}\|^2, \tag{17}$$

wo diesmal

$$p_0 = \min p_m(x)$$

gilt; wir nehmen an, daß $p_0 > 0$ ist.

Die Ungleichung (7) gilt für alle Funktionen, die bei $x = a$ gleich Null sind. Die Funktionen $u(x)$, $u'(x)$, $\ldots$, $u^{m-1}(x)$ genügen dieser Forderung, daher gelten die Ungleichungen

$$\|u\| \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}}\,\|u'\|, \qquad \|u'\| \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}}\,\|u''\|, \ldots, \|u^{(m-1)}\| \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}}\,\|u^{(m)}\|,$$

woraus ohne Mühe folgt, daß $\|u^{(m)}\| \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^m \|u\|$ ist. Wenn man das in (17) einsetzt, erhält man

$$(Lu, u) \geq \gamma^2\,\|u\|^2, \qquad \gamma = \sqrt{p_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^m.$$

Die letzte Ungleichung besagt, daß bei den Bedingungen (16) der Operator (15) positiv-definit ist; daraus folgt, wie schon mehrfach erwähnt, die Existenz einer Lösung und die Konvergenz einer Minimalfolge. Wir wollen die Art der Konvergenz klären.

Man kann der Ungleichung (17) die Form

$$|u| \geq \sqrt{p_0}\,\|u^{(m)}\| \tag{18}$$

geben. $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ sei eine Minimalfolge. Nach Satz 1, § 13 gilt $|u_n - u_0| \to 0$, wo $u_0(x)$ die exakte Lösung des Problems ist. Nach der Dreiecksungleichung (§ 3), die auch für die Norm bezüglich der Energie gilt, haben wir

$$|u_n - u_k| \leq |u_n - u_0| + |u_k - u_0|$$

und folglich

$$\lim_{k, n \to \infty} |u_n - u_k| = 0. \tag{19}$$

Auf Grund der Bedingung (16) ist $u_n^{(m-1)}(a) = u_k^{(m-1)}(a) = 0$, woraus

$$u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) = \int_a^x [u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)]\, dt$$

und nach der Ungleichung von Bunjakowski

$$|u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x)|^2 \leq (x - a) \int_a^x [u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)]^2\, dt$$

$$\leq (b - a) \int_a^b [u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)]^2\, dt = (b - a)\, \| u_n^{(m)} - u_k^{(m)} \|^2$$

folgt. Jetzt folgt aus (18) und (19), daß die $(m - 1)$-te Ableitung von $u_n(x)$ gleichmäßig konvergiert. Nach dem Satz von Weierstrass über die Integration gleichmäßig konvergenter Folgen (Smirnow [1], Punkt 145) konvergieren dann sowohl die Näherungslösung $u_n(x)$ selbst, als auch ihre Ableitungen bis zur Ordnung $m - 1$ einschließlich. Aus den Beziehungen (18) und (19) folgt ferner, daß die $m$-te Ableitung von $u_n(x)$ im Mittel konvergiert.

## § 21. Die Biegung des auf einer elastischen Unterlage liegenden Balkens von veränderlichem Querschnitt

Die Gleichung für die Biegung eines auf elastischer Unterlage liegenden Balkens hat die Gestalt

$$Lw = \frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2 w}{dx^2}\right] + Kw = q(x). \tag{1}$$

Hier ist $w$ die Durchbiegung des Balkens im Querschnitt mit der Abszisse $x$, $J(x)$ das Trägheitsmoment dieses Querschnitts. $J(x)$ ist konstant oder eine Funktion von $x$, je nachdem ob der Querschnitt des Balkens konstant oder veränderlich ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß keiner der Querschnitte des Balkens in einen Punkt ausartet, so daß das Trägheitsmoment $J(x)$ nirgends verschwindet. Ferner sei $E$ der Youngsche Modul des Balkenmaterials, $K$ der Kompressionsmodul der Unterlage, $q(x)$ die Intensität der Normalbelastung. Die Länge des Balkens bezeichnen wir mit dem Buchstaben $l$. Wenn die Enden des Balkens fest eingespannt sind, dann müssen die Randbedingungen

$$w(0) = w(l) = 0; \qquad w'(0) = w'(l) = 0 \tag{2}$$

erfüllt sein.

Die Gleichungen (1) und (2) sind Spezialfälle (für $m = 2$) der Gleichungen (15) und (16) des vorigen Paragraphen. Wir schließen daraus, daß der durch die linke Seite der Gleichung (1) und die Randbedingungen (2) bestimmte Operator positiv-definit ist, und daß das Biegeproblem für den auf einer elastischen Unterlage liegenden und an den Enden fest eingespannten Balken auf das Minimalproblem für das Funktional

$$F(w) = (Lw, w) - 2(w, q)$$

führt; das Minimum ist in der den Randbedingungen (2) genügenden Funktionenklasse zu suchen. Unter Verwendung der Formel (17) des vorigen Paragraphen kann man $F(w)$ auf die Form

$$F(w) = \int_a^b [EJ(x)\, w''^2 + Kw^2 - 2q(x)\, w]\, dx \tag{3}$$

bringen. Die Lösung des Minimalproblems für das Funktional (3) kann man nach dem Ritzschen Verfahren erhalten, wofür die Wahl eines bezüglich der Energie vollständigen Systems von Koordinatenfunktionen $\varphi_n(x)$ notwendig ist; da die Bedingungen (2) wesentlich sind, müssen die Koordinatenfunktionen sie erfüllen. Wenn wir z. B. setzen

$$\varphi_k(x) = (l - x)^2\, x^{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

dann kann man zeigen, daß das System (4) bezüglich der Energie vollständig ist. Eine Näherungslösung unseres Problems erhalten wir, wenn wir

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) = (l - x)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k+1} \tag{5}$$

setzen und die Koeffizienten aus dem System (8) des § 14 bestimmen. Dieses System schreiben wir wie folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A_{ik} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Darin ist

$$b_k = (q, \varphi_k) = \int_0^l q(x)\, (l - x)^2\, x^{k+1}\, dx; \tag{7}$$

die Koeffizienten $A_{ik}$ kann man in einer der beiden Formen bilden, die den Systemen $(8_1)$ und $(8_2)$ des § 14 entsprechen:

$$A_{ik} = (L\varphi_i, \varphi_k) = \int_0^l \varphi_k \cdot L\varphi_i\, dx = \int_0^l \varphi_k \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ(x)\,\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\right) + K\varphi_i\right] dx; \tag{8}$$

$$A_{ik} = [\varphi_i, \varphi_k] = \int_0^l \left(EJ(x)\,\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\,\frac{d^2\varphi_k}{dx^2} + K\varphi_i\varphi_k\right) dx.$$

Die exakte Lösung unseres Problems bezeichnen wir mit $w_0(x)$. Aus den allgemeinen Betrachtungen am Ende des vorigen Paragraphen folgt, daß $w_n(x) \to w_0(x)$ und $w_n'(x) \to w_0'(x)$ gleichmäßig gilt, ferner $w_n''(x) \overset{M}{\to} w_0''(x)$.

Wenn eines der Enden des Balkens frei ist, dann sind die Bedingungen (2) an dem entsprechenden Ende zu ersetzen durch die Bedingung, daß die Größen $\frac{dw}{dx^2}$ und $\frac{d}{dx}\left(EJ(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right)$ verschwinden. Wenn z. B. das Ende $x = 0$ fest eingespannt und das Ende $x = l$ frei ist, dann sind die Randbedingungen dieses Problems die folgenden:

$$w(0) = 0, \qquad w'(0) = 0, \qquad w''(l) = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left[EJ(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=l}. \tag{9}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß der Operator auf der linken Seite der Gleichung (1) wie vorher positiv-definit ist. Wir überlassen es dem Leser, diese Tatsache nachzuprüfen und die Schlußfolgerungen zu ziehen, die sich für die Lösbarkeit des Problems und die Anwendung von Näherungsmethoden zur Konstruktion einer Lösung ergeben.

Die Ergebnisse des vorliegenden Paragraphen bleiben auch für den Fall gültig, daß der Kompressionsmodul $K$ der Unterlage veränderlich ist.

## § 22. Die hauptsächlichen Randwertprobleme für die Gleichungen von Poisson und Laplace

In den vorangegangenen Paragraphen haben wir schon mehrfach Randwertprobleme für die Gleichungen von Poisson und Laplace zur Illustration allgemeiner Methoden betrachtet; in diesem Paragraphen untersuchen wir diese Probleme mehr systematisch.

Es sei die Poissonsche Gleichung

$$-\Delta u = f(P) \tag{1}$$

gegeben, wo $P$ ein Punkt eines endlichen $m$-dimensionalen (man kann $m = 2$ oder $m = 3$ annehmen) Gebietes $\Omega$ ist. Wir stellen das Dirichletsche Problem für diese Gleichung: Zu finden ist eine im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$ stetige Lösung, die auf dem Rand $S$ dieses Gebietes die Randbedingung

$$u|_S = 0 \tag{2}$$

erfüllt. Als Definitionsbereich des Laplace-Operators nehmen wir die lineare Menge derjenigen Funktionen (wir bezeichnen diese Menge mit $M$), die folgende Bedingungen erfüllen: 1. Sie sind zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$; 2. sie verschwinden auf $S$. Man sieht leicht, daß der Operator $-\Delta$ auf dem Lineal $M$ positiv ist. Nach der Greenschen Formel (§ 2) ist nämlich

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\,\Delta u\,d\Omega = -\int_S u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS + \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega, \tag{3}$$

wo $\nu$ die Außennormale zu $S$ ist. Das Flächenintegral fällt fort, da auf dem Rand $u = 0$ ist. Daraus ergibt sich

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} (\text{grad}\, u)^2 \, d\Omega \geq 0. \tag{4}$$

Es muß noch gezeigt werden, daß $u \equiv 0$ ist, wenn $(-\Delta u, u) = 0$ ist. Das ist jedoch offensichtlich: Wenn $(-\Delta u, u) = 0$ ist, dann ist grad $u \equiv 0$, wie sich aus (4) ergibt, was zur Folge hat, daß $u$ konstant ist. Da diese Konstante auf $S$ gleich Null ist, verschwindet sie überhaupt.

Aus dem Gesagten folgt, daß das von uns formulierte DIRICHLETsche Problem gleichwertig ist mit dem Minimalproblem für das Funktional

$$F(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f)$$

oder, wenn man Formel (3) benutzt,

$$F(u) = \int_{\Omega} \{(\text{grad}\, u)^2 - 2uf\} \, d\Omega. \tag{5}$$

Auf die Gleichung (1) mit der Randbedingung (2) führt bekanntlich das Biegeproblem für eine fest eingespannte Membran, die unter der Wirkung einer Normalbelastung steht; die Funktion $f(P)$ ist dieser Belastung proportional. Das Funktional (5) ist der potentiellen Energie der gebogenen Membran proportional (vgl. E. TREFFTZ [2]); wir haben es hier demzufolge mit einem Spezialfall des Minimalproblems für die potentielle Energie zu tun.

Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn man statt (2) die Randbedingungen des gemischten Problems stellt,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(P)\, u\right]_S = 0, \tag{6}$$

wo $\sigma(P)$ eine nicht negative Funktion ist, die nicht identisch gleich Null ist. Diesmal muß man als Definitionsbereich des LAPLACE-Operators das Lineal $M_\sigma$ derjenigen Funktionen einführen, die der Randbedingung (6) genügen sowie denselben Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen wie die Funktionen des Lineals $M$. Man sieht leicht, daß der Operator $-\Delta u$ auch auf $M_\sigma$ positiv ist. Nach Formel (3) und der Randbedingung (6) ist nämlich

$$(-\Delta u, u) = -\int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS + \int_{\Omega} (\text{grad}\, u)^2 \, d\Omega = \int_S \sigma u^2 \, dS + \int_{\Omega} (\text{grad}\, u)^2 \, d\Omega \geq 0;$$

dabei gilt für $(-\Delta u, u) = 0$ notwendig

$$\int_S \sigma u^2 \, dS = 0, \qquad \int_{\Omega} (\text{grad}\, u)^2 \, d\Omega = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $u = C = \text{const}$. Setzt man das in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$C^2 \int_S \sigma \, dS = 0.$$

Die Funktion $\sigma(P)$ ist nicht negativ, außerdem ist $\sigma(P)$ nicht identisch gleich Null. Daraus folgt, daß $\int_S \sigma\, dS > 0$ ist, dann aber ist notwendig $C = 0$ und $u(P) \equiv 0$. Demnach ist der Operator $-\Delta u$ auf dem Lineal $M_\sigma$ positiv. Die Aufgabe, die POISSONsche Gleichung (1) bei den Randbedingungen (6) zu integrieren, kann man durch das Minimalproblem für das Funktional

$$F(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f) = \int_\Omega \{(\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\}\, d\Omega + \int_S \sigma u^2\, dS \tag{7}$$

auf dem Lineal $M_\sigma$ ersetzen. Die Randbedingung (6) ist natürlich.

Speziell betrachten wir das NEUMANNsche Problem für die Gleichung (1). Es werde eine Lösung der Gleichung (1) gesucht, die in $\Omega$ stetig und stetig differenzierbar ist und der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{8}$$

genügt. Man kann analog wie früher ein Lineal $M_0$ auswählen, das aus den Funktionen besteht, die der Randbedingung (8) genügen und denselben Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen, wie sie schon für die Funktionen des Lineals $M$ gefordert wurden. Der Operator $-\Delta u$ ist jedoch nicht positiv auf diesem Lineal. Nach den Formeln (3) und (8) ist nämlich

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega,$$

was eine nicht negative Größe darstellt. Aber aus der Ungleichung $(-\Delta u, u) = 0$ folgt nicht, daß $u \equiv 0$ ist. So gehört etwa die Funktion $u \equiv 1$ offensichtlich zum Lineal $M_0$, und es ist $(-\Delta u, u) = 0$.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, verfahren wir folgendermaßen: Vor allem bemerken wir, daß das NEUMANNsche Problem unlösbar für eine willkürliche Funktion $f(P)$ ist, und es ist nicht schwer, die Bedingung zu finden, der diese Funktion notwendig genügen muß. Wir integrieren (1) über $\Omega$:

$$-\int_\Omega \Delta u\, d\Omega = \int_\Omega f\, d\Omega;$$

wenn wir in der Formel (8) des § 2 $v \equiv 1$ setzen, erhalten wir

$$\int_\Omega \Delta u\, d\Omega = \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS,$$

was infolge von (8) gleich Null ist.

Demnach ist für die Lösbarkeit des NEUMANNschen Problems notwendig, daß

$$\int_\Omega f(P)\, d\Omega = 0$$

gilt. Ferner, wenn das NEUMANNsche Problem lösbar ist, dann besitzt es unendlich viele Lösungen, die sich untereinander nur um eine Konstante unterscheiden. Diese Konstante bestimmen wir so, daß die Funktion $u(P)$ derselben Bedingung genügt, wie die gegebene Funktion $f(P)$:

$$\int_{\Omega} u(P)\, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Offensichtlich ist diese Lösung des NEUMANNschen Problems die einzige.

Zur Betrachtung des NEUMANNschen Problems für die Gleichung (1) wählen wir als Definitionsbereich des LAPLACE-Operators eine lineare Menge von Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllen: 1. Sie sind in $\overline{\Omega}$ stetig zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen, 2. sie genügen der Randbedingung (8), 3. sie genügen der Bedingung (9). Diese Menge bezeichnen wir mit $\tilde{M}_0$. Oben wurde gesagt, daß wir stets eine der Bedingung (9) genügende Lösung des NEUMANNschen Problems suchen. Das kann man so ausdrücken, daß man sagt, wir suchen eine im Lineal $\tilde{M}_0$ liegende Lösung des NEUMANNschen Problems. Wir zeigen, daß der Operator $-\Delta$ auf dem Lineal $\tilde{M}_0$ positiv ist.

Wir finden nämlich wie vorher

$$(-\Delta u, u) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega \geq 0;$$

wenn $(-\Delta u, u) = 0$ ist, dann ist $u = \text{const}$ eine Konstante, die der Beziehung (9) genügt, muß jedoch notwendig gleich Null sein.

Das NEUMANNsche Problem kann durch folgendes Variationsproblem ersetzt werden: Auf dem Lineal $\tilde{M}_0$ ist eine Funktion zu bestimmen, die das Funktional

$$F(u) = (-\Delta u, u) - 2(f, u)$$

oder, infolge der Randbedingung (8), das Funktional

$$F(u) = \int_{\Omega} \{(\operatorname{grad} u)^2 - 2fu\}\, d\Omega \tag{10}$$

zum Minimum macht.

Die Randbedingung (8) ist natürlich, deshalb braucht sie nicht von vornherein erfüllt zu sein, wenn man das Minimum des Funktionals (10) aufsucht.

Oft hat man die LAPLACEsche Gleichung bei inhomogenen Randbedingungen zu lösen.

Wir haben schon gesehen (§ 18), daß die Integration der LAPLACE-Gleichung in Gebiet $\Omega$ bei der Randbedingung

$$u|_S = g(P) \tag{11}$$

(DIRICHLETsches Problem) auf die Bestimmung des Minimums des Funktionals

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega \tag{12}$$

führt, und zwar auf der Menge der die Bedingung (11) erfüllenden Funktionen; wenn die Randbedingung die Form

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = h(P) \tag{13}$$

(NEUMANNsches Problem) hat, dann führt das Problem auf die Bestimmung des Minimums des Funktionals

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega - 2\int_S u h\, dS \tag{14}$$

auf der Menge der Funktionen, die keinerlei Randbedingungen unterworfen sind. Wir fügen ergänzend hinzu, daß im Falle der Randbedingung des gemischten Typus

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(P)\,u\right]_S = h_1(P) \tag{15}$$

das entsprechende Funktional die Form

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega + \int_S (\sigma u^2 - 2 u h_1)\, dS \tag{16}$$

hat; das läßt sich leicht nachweisen, wenn man analoge Überlegungen zu § 18 anstellt.

Wir haben oben festgestellt, daß der Operator $-\Delta$ auf jeder der Mengen $M$, $M_\sigma$, $\tilde{M}_0$ positiv ist. Damit jedoch die Anwendung der in Kapitel III entwickelten Verfahren gerechtfertigt ist, mußte gesichert sein, daß der erwähnte Operator auf jeder der aufgezählten Mengen positiv-definit ist. Damit beschäftigen wir uns jetzt.

Wir beginnen mit dem DIRICHLETschen Problem. In diesem Falle ist

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\, d\Omega = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega, \tag{17}$$

wo $m$ die Zahl der Dimensionen des Gebietes $\Omega$ angibt. Zwecks Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, daß $\Omega$ ein ebenes Gebiet ist und zwar in der $xy$-Ebene; der Übergang zu einer beliebigen Zahl von Dimensionen bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Für $m = 2$ nimmt die Formel (17) die einfachere Form

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega$$

an. Wir erinnern noch einmal daran, daß das Gebiet $\Omega$ als endlich vorausgesetzt worden war.

Wir schließen $\Omega$ im Innern eines Rechteckes $\Omega_1$ ein. Die Koordinatenachsen seien den Seiten des Rechteckes parallel; diese Seiten bezeichnen wir mit $a$ und

$b$ (Abb. 8). $u(x, y)$ sei eine hinreichend glatte[1]) Funktion, die auf $S$ gleich Null ist. Wir erweitern die Funktion $u(x, y)$ auf das ganze Rechteck, indem wir sie außerhalb von $\Omega$ gleich Null setzen; sie wird dann in $\Omega_1$ stetig. Wir wählen in $\Omega_1$ einen willkürlichen Punkt $(x_1, y_1)$. Man hat offensichtlich

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\, dx = u(x_1, y_1) - u(0, y_1).$$

Der Punkt $(0, y_1)$ liegt jedoch außerhalb von $\Omega$ und deshalb ist $u(0, y_1) = 0$. Demnach gilt

$$u(x_1, y_1) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\, dx.$$

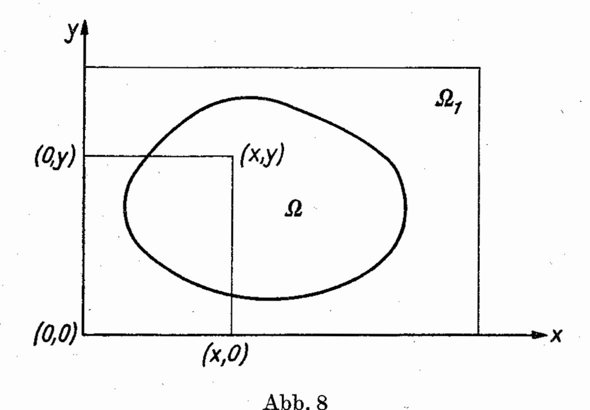



Abb. 8

Die Anwendung der Ungleichung von BUNJAKOWSKI ergibt

$$u^2(x_1, y_1) \leq x_1 \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx \leq a \int_0^{a} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx.$$

Wir integrieren diese Ungleichung zwischen den Grenzen $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq y_1 \leq b$ und erhalten

$$\int_{\Omega_1} u^2(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1 \leq a^2 \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy \leq a^2 \int_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

[1]) Unter einer „hinreichend glatten" Funktion verstehen wir eine Funktion, die im abgeschlossenen Gebiet eine hinreichende Anzahl von stetigen Ableitungen besitzt. Im vorliegenden Fall ist die Stetigkeit der ersten Ableitungen der Funktion $u(x, y)$ hinreichend.

Es genügt, die Integration über $\Omega$ zu erstrecken, weil $u \equiv 0$ außerhalb von $\Omega$ ist. Wenn wir noch die Bezeichnung $a^2 = 1/\varkappa$ einführen, kommen wir zu der Ungleichung

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega \geq \varkappa \int_\Omega u^2 \, d\Omega, \tag{18}$$

die unter der Bezeichnung *Ungleichung von* FRIEDRICHS [1] bekannt ist. Sie ist, wie wir festgestellt haben, in jedem Falle richtig, wenn die Funktion $u(x, y)$ stetig differenzierbar und auf $S$ gleich Null ist. Im allgemeinen Falle des $m$-dimensionalen Raumes hat die FRIEDRICHSsche Ungleichung die Form

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \geq \varkappa \int_\Omega u^2 \, d\Omega, \quad u|_S = 0; \tag{$18_1$}$$

für $m = 1$ geht sie im wesentlichen in die Ungleichung (8) des § 6 über.

Aus der Ungleichung (18) folgt

$$(-\Delta u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa} > 0, \tag{19}$$

woraus sich ergibt, daß der Operator $-\Delta u$ auf dem Lineal $M$ hinreichend glatter, auf $S$ verschwindender Funktionen positiv-definit ist.

Wir betrachten den Operator $-\Delta u$ jetzt auf einem Lineal von Funktionen, die der Randbedingung (6) genügen. Der Beweis der positiven Definitheit stützt sich diesmal auf eine Ungleichung, die ebenfalls von FRIEDRICHS aufgestellt worden ist:

$$\int_\Omega u^2 \, d\Omega \leq C \left\{ \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega + \int_S u^2 \, dS \right\}, \tag{20}$$

wo $C$ eine positive Konstante ist. Um diese Ungleichung herzuleiten, verfahren wir wie folgt: Wir schließen wieder $\Omega$ in ein Rechteck $\Omega_1$ ein und setzen $u = fv$, wo $f$ eine noch zu bestimmende Funktion ist. Aus der leicht zu verifizierenden Identität

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = f^2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - v^2 f \Delta f + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ergibt sich, wenn man den ersten Summanden rechts unterdrückt,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geq -v^2 f \Delta f + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Wir integrieren über $\Omega$; die Integrale des zweiten und dritten Gliedes bilden wir nach der Formel von OSTROGRADSKI (§ 2) um:

$$\int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega \geq -\int_\Omega v^2 f \Delta f \, d\Omega + \int_S v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS.$$

Daraus folgt

$$-\int_\Omega v^2 f\,\Delta f\,d\Omega \le \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega - \int_S v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS$$

und erst recht

$$-\int_\Omega v^2 f\,\Delta f\,d\Omega \le \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \left|\int_S v^2 f \frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS\right|.$$

Wir wählen $f = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$. Dann ist $\Delta f = -\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)f$, $f$ verschwindet nirgendwo in $\Omega$. In der letzten Ungleichung ändert sich dann das Integral auf der linken Seite in

$$\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_\Omega u^2\,d\Omega; \tag{21}$$

das zweite Integral auf der rechten Seite schätzen wir so ab:

$$\left|\int_S v^2 f\frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS\right| = \left|\int_S u^2\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS\right| \le \int_S u^2\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| dS.$$

Auf dem Rand $S$ ist die Größe $\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|$ offensichtlich beschränkt; es sei etwa $\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right| \le C' = \text{const}$ auf $S$. Dann wird

$$\left|\int_S u^2 f\frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS\right| \le C'\int_S u^2\,dS,$$

und die Ungleichung (20) ergibt sich aus (21), wenn man mit $C$ die kleinere der Zahlen $\pi^{-2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}$ und $C'\pi^{-2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-2}$ bezeichnet.

Wir schätzen jetzt das Skalarprodukt $(-\Delta u, u)$ ab. Man hat

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\,\Delta u\,d\Omega = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega - \int_S u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS$$

oder, wenn man die Ungleichung (6) anwendet,

$$\begin{aligned}(-\Delta u, u) &= \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \int_S \sigma u^2\,dS \\ &\ge \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \sigma_0\int_S u^2\,dS,\end{aligned}$$

wo $\sigma_0$ die untere Grenze von $\sigma(P)$ ist, wie schon gesagt wurde.

Wir setzen $\sigma_1 = \min(\sigma_0, 1)$; dann ist offensichtlich

$$(-\Delta u, u) \geq \sigma_1 \left\{ \int_\Omega \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega + \int_S u^2 \, dS \right\}. \tag{22}$$

Vergleicht man das mit (20), so erhält man schließlich

$$(-\Delta u, u) \geq \gamma^2 \| u \|^2, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{\sigma_1}{C}}. \tag{23}$$

Aus dem Bewiesenen folgt wegen der Sätze der §§ 11—15 und 19, daß die Minimalprobleme, auf welche die Integration der POISSONschen Gleichung bei den Randbedingungen (2) und (6) führt, lösbar sind und näherungsweise nach dem RITZschen Verfahren gelöst werden können, oder nach einem beliebigen anderen der Verfahren des Kapitels III.

Wir bemerken, daß beim DIRICHLETschen Problem (Bedingung (2)) für die POISSONsche Gleichung die Konvergenz bezüglich der Energie auf die Konvergenz im Mittel bezüglich des Gebietes $\Omega$ führt, und zwar sowohl für die Näherungslösung selbst, als auch für ihre ersten Ableitungen, während beim gemischten Problem (Bedingung (6)) noch die Konvergenz im Mittel der Näherungslösungen auf dem Rand $S$ hinzuzufügen ist. Dies ist aus den Formeln (17) und (22)[1]) unschwer zu ersehen.

Wir wenden uns jetzt dem NEUMANNschen Problem zu. Eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung dieser Aufgabe spielt die bekannte *Ungleichung von* POINCARÉ

$$\int_\Omega u^2 \, d\Omega \leq A \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} d\Omega + B \left( \int_\Omega u \, d\Omega \right)^2, \tag{24}$$

wo $A > 0$ und $B > 0$ konstant sind. Wir führen den Beweis dieser Ungleichung für den Fall, daß das Gebiet $\Omega$ ein Rechteck ist; den Beweis für ein Gebiet hinreichend allgemeiner Form kann man z. B. in dem Buch von COURANT und HILBERT [2], Kap. VII finden oder auch in dem Buch von S. L. SOBOLEW [2].

$\Omega$ sei das Rechteck $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Wir wählen in $\Omega$ zwei Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$. Man hat offensichtlich

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} \, dx + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y} \, dy.$$

---

[1]) Wie aus dem „Einbettungssatz" von S. L. SOBOLEW [2] folgt, ist die Konvergenz einer Funktionenfolge im Mittel auf dem Rand eines Gebietes eine Folge der Konvergenz im Mittel der ersten Ableitungen in diesem Gebiet.

Erhebt man das ins Quadrat und benutzt die Ungleichung von BUNJAKOWSKI, so erhält man

$$u^2(x_1, y_1) + u^2(x_2, y_2) - 2u(x_1, y_1)u(x_2, y_2)$$
$$\leq 2\left\{\left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\,dx\right)^2 + \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\,dy\right)^2\right\}$$
$$\leq 2\left\{|x_2 - x_1| \int_0^a \left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2 dx + |y_2 - y_1| \int_0^b \left(\frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\right)^2 dy\right\}$$
$$\leq 2\left\{a \int_0^a \left(\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right)^2 dx + b \int_0^b \left(\frac{\partial u(x_2, y)}{\partial y}\right)^2 dy\right\}.$$

Diese Ungleichung integrieren wir nach $x_1, y_1, x_2, y_2$ unter der Voraussetzung, daß jeder der Punkte $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ das Rechteck $\Omega$ durchläuft. Wir erhalten dann

$$2ab\int_\Omega u^2\,d\Omega - 2\left(\int_\Omega u\,d\Omega\right)^2 \leq 2ab\left\{a^2\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\Omega + b^2\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 d\Omega\right\}.$$

Dividiert man durch $2\,ab$ und setzt

$$A = \max(a^2, b^2), \qquad B = \frac{1}{ab},$$

so kommt man auf die POINCARÉsche Ungleichung für das Rechteck. Die Ausdehnung auf den allgemeineren Fall einer größeren Zahl von Dimensionen bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Sobald die POINCARÉsche Ungleichung bestätigt ist, macht es keine Mühe mehr, die positive Definitheit des Operators $-\Delta$ auf der Menge $\tilde{M}_0$ zu beweisen. Wir haben oben schon gesehen, daß für die Funktionen dieser Menge

$$(-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega$$

gilt. Da die Funktion $u(P)$ noch der Bedingung (9) genügt, vereinfacht sich die POINCARÉsche Ungleichung für diese Funktion und nimmt die Form

$$\int_\Omega u^2\,d\Omega \leq A\int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega = A\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,d\Omega$$

an. Jetzt ist offensichtlich, daß

$$(-\Delta u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

gilt, was auch zu beweisen war. Aus dem Bewiesenen folgt die Lösbarkeit des NEUMANNschen Problems für die Gleichung (1), wenn die Funktion $f(P)$ eine endliche Norm besitzt und der Gleichung (9) genügt, ebenso folgt aber auch die Möglichkeit, eine Näherungslösung nach einer der Methoden des Kapitels III zu finden, insbesondere nach dem RITZschen Verfahren.

## § 23. Das Torsionsproblem für einen Stab und das Problem der Biegung eines Stabes unter der Wirkung einer Querkraft[1])

Wir bezeichnen mit $\Omega$ den Normalschnitt des Stabes und mit $S$ den Rand des Schnittes. Im allgemeinen Falle führt das Torsionsproblem auf das Aufsuchen einer Funktion $\varphi_0(x, y)$, die im Schnittgebiet der LAPLACE-Gleichung

$$\Delta \varphi_0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

genügt und auf dem Rand $S$ der Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = ly - mx. \tag{2}$$

Hier ist $\nu$ die Außennormale zu $S$ und $l = \cos(\nu, x)$, $m = \cos(\nu, y)$.

Demnach ist die Funktion $\varphi_0(x, y)$ die Lösung des NEUMANNschen Problems für die LAPLACE-Gleichung bei der inhomogenen Randbedingung (2). Die Anwendung der sich auf dieses Problem beziehenden Ergebnisse des vorigen Paragraphen ergibt, daß sich das Torsionsproblem auf das Aufsuchen einer Funktion zurückführen läßt, die das Funktional

$$\iint_\Omega (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d\Omega - 2 \int_S \varphi (ly - mx) \, dS$$
$$= \iint_\Omega \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy - 2 \int_S \varphi (ly - mx) \, dS \tag{3}$$

zum Minimum macht. Die Funktion $\varphi(x, y)$ ist im voraus keinerlei Randbedingungen unterworfen, da die Bedingung (2) für das Funktional (3) natürlich ist. Im Ausdruck (3) formen wir das Randintegral nach der Formel von OSTROGRADSKI um:

$$\int_S [\varphi y \cos(\nu, x) - \varphi x \cos(\nu, y)] \, dS = \iint_\Omega \left[ \frac{\partial (\varphi y)}{\partial x} - \frac{\partial (\varphi x)}{\partial y} \right] dx \, dy$$
$$= \iint_\Omega \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

---

[1]) Wir setzen voraus, daß dem Leser die Torsions- und Biegetheorie des Stabes bekannt ist, z. B. aus den Lehrbüchern von L. S. LEIBENSON [2] oder von S. P. TIMOSCHENKO [1]. Der Anwendung der energetischen Methode auf das Torsions- und Biegeproblem ist in der Monographie von L. S. LEIBENSON [1] viel Raum gewidmet, dort sind einige der genannten Formeln zu finden sowie eine große Zahl von Beispielen.

Setzen wir das in (3) ein, so nimmt unser Funktional die Form

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+x\right)^2 dx\,dy-\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy\right.$$

an. Das zweite Integral ist gleich dem Trägheitsmoment des Schnittes bezüglich des Koordinatenanfangspunktes und eine konstante Größe, deshalb führt das Problem auf das Aufsuchen des Minimums eines einfacheren Funktionals, das wir mit $D(\varphi)$ bezeichnen:

$$D(\varphi)=\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+x\right)^2\right]dx\,dy. \tag{4}$$

Das Funktional $D(\varphi)$ hat eine einfache mechanische Bedeutung. Bekanntlich ist nämlich

$$D(\varphi_0)=\frac{C}{G}, \tag{5}$$

wo $C$ die Torsionssteifigkeit des Stabes, $G$ der Schubmodul des Stabmaterials und $\varphi_0$, wie schon oben gesagt wurde, eine Funktion ist, die das Torsionsproblem löst.[1])

Nun erteilt aber die Funktion $\varphi_0$ dem Funktional $D(\varphi)$ seinen kleinsten Wert, deshalb gilt für jede beliebige Funktion $\varphi(x, y)$ die wohlbekannte Ungleichung

$$C \leq G\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]dx\,dy. \tag{6}$$

---

[1]) Der Beweis der Formel (5) ist ziemlich einfach. Wir haben (siehe z. B. L. S. Leibenson [2] Seite 242)

$$\frac{C}{G}=\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

Andererseits findet man bei Auflösung der Klammer leicht

$$D(\varphi_0)=\frac{C}{G}+\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2-y\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+x\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

Nach der Greenschen Formel gilt

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\iint\limits_{\Omega}\varphi_0\Delta\varphi_0\,dx\,dy+\int\limits_S\varphi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}\,dS$$

oder, infolge der Gleichungen (1) und (2),

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\int\limits_S\varphi_0(ly-mx)\,dS,$$

was gleich

$$\iint\limits_{\Omega}\left(y\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-x\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)dx\,dy$$

ist, wie wir schon gesehen haben. Setzt man das in $D(\varphi_0)$ ein, so erhält man die Formel (5).

Diese Ungleichung schafft die Möglichkeit, die Torsionssteifigkeit nach oben abzuschätzen; wenn man für $\varphi$ eine Näherungslösung des Minimalproblems für das Funktional $D(\varphi)$ einsetzt (diese Funktion könnte etwa mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens gewonnen worden sein), dann kann die durch die Formel (6) gegebene Abschätzung beliebig genau gemacht werden. Eine einfache, wenn auch grobe Abschätzung für die Torsionssteifigkeit erhalten wir, wenn wir $\varphi \equiv 0$ setzen. Das liefert die Ungleichung

$$C \leq GJ, \tag{7}$$

wo $J$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bezüglich des Koordinatenanfangspunktes ist.

Man kann noch eine etwas genauere Abschätzung für die Steifigkeit $C$ erhalten. Zu diesem Zweck setzen wir in (6) $\varphi = \alpha\, xy$ ein, wo die Konstante $\alpha$ so gewählt wird, daß die rechte Seite der Ungleichung (6) ihr Minimum annimmt. Eine ganz einfache Rechnung führt auf die Abschätzung

$$C \leq \frac{4GJ_x J_y}{J}, \tag{7$_1$}$$

die viel genauer als die Abschätzung (7) ist. Mit $J_x$ und $J_y$ sind die Trägheitsmomente des Stabquerschnittes bezüglich der Koordinatenachsen $x$ und $y$ bezeichnet.

Das Torsionsproblem läßt sich auf ein anderes Variationsproblem zurückführen, welches es gestattet, die Torsionssteifigkeit nach unten abzuschätzen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, wo das Schnittgebiet $\Omega$ einfach zusammenhängend ist. Dann kann man bekanntlich das Torsionsproblem auf die Integration der Poissonschen Gleichung

$$\Delta\psi = -2G\theta$$

bei der Randbedingung

$$\psi|_S = 0$$

zurückführen; hier ist $\theta$ eine Konstante, die als Grad der Torsion bezeichnet wird. Wenn man $\psi(x, y) = 2G\theta\, u(x, y)$ setzt, dann erhält man die Differentialgleichung

$$-\Delta u = 1 \tag{8}$$

und die Randbedingung

$$u|_S = 0. \tag{9}$$

Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen folgt, daß das Problem (8)—(9) gleichbedeutend ist mit der Aufgabe, das Minimum des Funktionals

$$F(u) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right] dx\, dy \tag{10}$$

auf der Menge der der Bedingung (9) genügenden Funktionen zu bestimmen. $u_0(x, y)$ sei die exakte Lösung unseres Problems, $u_n(x, y)$ eine Näherungslösung nach Ritz. Nach Formel (15), § 14 gilt $|u_n|^2 \leq |u_0|^2$. In unserer Aufgabe ist

$f(x, y) \equiv 1$ und die Formeln (13) und (14) des § 14 liefern

$$\iint_\Omega u_0(x, y)\, dx\, dy \geq \iint_\Omega u_n(x, y)\, dx\, dy.$$

Bekanntlich unterscheidet sich die Torsionssteifigkeit nur um den Faktor $4G$ von dem Integral auf der linken Seite. Daraus ergibt sich für $C$ eine Abschätzung nach unten:

$$C \geq 4G \iint_\Omega u_n(x, y)\, dx\, dy. \tag{11}$$

Wenn man die Formel (18) des § 14 benutzt, erhält man die im allgemeinen allerdings ziemlich grobe Abschätzung

$$C \geq \frac{4G \left(\iint_\Omega u\, dx\, dy\right)^2}{\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy}. \tag{12}$$

Hier ist $u(x, y)$ eine beliebige in $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbare Funktion, die auf $S$ verschwindet.

Jetzt sei das Gebiet $\Omega$ mehrfach zusammenhängend, die Kurve $S_0$ möge dieses Gebiet von außen begrenzen, die Kurven $S_1, S_2, \ldots, S_K$ von innen. Wir bezeichnen mit $\gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ den Inhalt des von der Kurve $S_i$ eingeschlossenen Gebietes. Die Funktion $u(x, y) = \psi(x, y)/2\, G\theta$ genügt der Gleichung (8) und den Randbedingungen

$$u = \begin{cases} 0 & \text{auf } S_0, \\ \alpha_i & \text{auf } S_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{13}$$

Hier sind die $\alpha_i$ zunächst unbekannte Konstanten; infolge des bekannten Theorems von Bredt sind sie durch die Beziehungen

$$\int_{S_i} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS = -\gamma_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{14}$$

miteinander verknüpft; $\nu$ bezeichnet wie gewöhnlich die Normale zu $S_i$, die äußere in bezug auf $\Omega$ und demzufolge die innere zu den geschlossenen Kurven $S_i$.

Es sei $\tilde{u}(x, y)$ eine beliebige, den Bedingungen (13) und (14) genügende Funktion; wir nehmen noch an, daß diese Funktion zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in $\overline{\Omega}$ stetig ist. Wir setzen $u - \tilde{u} = v$. Dann genügt die Funktion $v$ der Gleichung

$$-\Delta v = 1 + \Delta \tilde{u} \tag{15}$$

und den Randbedingungen

$$v = \begin{cases} 0 & \text{auf } S_0, \\ \beta_i & \text{auf } S_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \end{cases} \tag{16}$$

$$\int_{S_i} \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{17}$$

Hier sind die $\beta_i$ willkürliche Konstanten. Die den Bedingungen (16) und (17) genügenden Funktionen bilden ein Lineal, wie man leicht einsieht. Wir zeigen, daß der Operator $-\Delta$ auf diesem Lineal positiv ist. Wenn die beliebige Funktion $v(x, y)$ den erwähnten Bedingungen genügt, gilt nämlich

$$(-\Delta v, v) = -\iint\limits_{\Omega} v\,\Delta v\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \int\limits_{S} v\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS.$$

Das Flächenintegral verschwindet wegen

$$\int\limits_{S} v\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \int\limits_{S_i} \frac{\partial v}{\partial \nu}\,dS = 0,$$

und man erhält

$$(-\Delta v, v) = \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \geq 0.$$

Analog beweist man die Symmetrie dieses Operators.

Nach dem Satz vom Minimalfunktional (§ 11) führt das Problem auf das Aufsuchen einer Funktion $v(x, y)$, die das Funktional

$$\iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2(1 + \Delta\tilde{u})v\right] dx\,dy \tag{18}$$

auf einer Menge von Funktionen zum Minimum macht, die den Bedingungen (16) und (17) genügen.

Wir kehren zur Funktion $u = v + \tilde{u}$ zurück. Wenn wir in (18) konstante Glieder unberücksichtigt lassen, finden wir, daß die Integration der Gleichung (8) mit den Bedingungen (13) und (14) gleichbedeutend ist mit dem Aufsuchen einer Funktion, die bei denselben Bedingungen das Funktional

$$Q(u) = \iint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2(1 + \Delta\tilde{u})u\right] dx\,dy$$
$$- 2\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right) dx\,dy$$

zum Minimum macht. Das zweite Integral behandeln wir nach der GREENschen Formel und erhalten unter Beachtung der Randbedingungen

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint\limits_{\Omega} u\,\Delta\tilde{u}\,dx\,dy + \int\limits_{S} u\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\,dS$$
$$= -\iint\limits_{\Omega} u\,\Delta\tilde{u}\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i.$$

Setzen wir das in $Q(u)$ ein, so erhalten wir schließlich für das Funktional $Q(u)$ den Ausdruck

$$Q(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right] dx\, dy - 2\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i. \tag{19}$$

Mit Hilfe des in § 17 genannten Verfahrens ist es nicht schwer zu zeigen, daß die Bedingung (14) für das Funktional $Q(u)$ natürlich ist, deshalb kann dessen Minimum auf einer Menge von Funktionen bestimmt werden, die nur der Bedingung (13) genügen. Wie früher bezeichnen wir mit $u_0(x, y)$ die Funktion, die das Torsionsproblem löst; sie macht $Q(u)$ zum Minimum. Wir klären den Zusammenhang zwischen $Q(u_0)$ und $C$, der Torsionssteifigkeit. Wir gehen von der bekannten Formel

$$C = 4G\left\{\iint_{\Omega} u_0\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(0)} \gamma_i\right\} \tag{20}$$

aus; mit $\alpha_i^{(0)}$ ist der Wert der Konstanten $\alpha_i$ für die Funktion $u_0$ bezeichnet. Da $\Delta u_0 = -1$ ist, nimmt das Integral in (20) folgende Gestalt an:

$$\iint_{\Omega} u_0\, dx\, dy = -\iint_{\Omega} u_0 \Delta u_0\, dx\, dy = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

$$-\iint_{\Omega} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \nu}\, dS = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(0)} \gamma_i.$$

Daraus folgt

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \iint_{\Omega} u_0\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(0)} \gamma_i.$$

Ersetzt man in (19) $u$ durch $u_0$ und benutzt die letzte Gleichung, so erhält man

$$Q(u_0) = -\iint_{\Omega} u_0\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(0)} \gamma_i.$$

Vergleicht man das mit (20), so erhält man

$$C = -4G\, Q(u_0). \tag{21}$$

$u$ sei eine beliebige der Bedingung (13) genügende Funktion. Wir wählen einen konstanten Faktor $a$ so, daß $Q(au)$ zum Minimum wird. Wir haben

$$Q(au) = a^2 \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - 2a\left[\iint_{\Omega} u\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i\right].$$

Differentiation nach $a$ und Nullsetzen der Ableitung ergibt

$$a = \frac{\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i}{\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}.$$

Jetzt findet man leicht

$$Q(au) = -\frac{\left(\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i\right)^2}{\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}. \tag{22}$$

Offensichtlich ist $Q(u_0) \leq Q(au)$, da $au$ der Bedingung (13) genügt (in welcher die Konstante $\alpha_i$ durch $a\alpha_i$ ersetzt worden ist). Jetzt folgt aus den Formeln (21) und (22) eine Abschätzung nach unten für die Torsionssteifigkeit:

$$C \geq 4G \frac{\left(\iint\limits_{\Omega} u\,dx\,dy + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i\right)^2}{\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}. \tag{23}$$

Die Abschätzung (23) wurde in der Arbeit von LIN CHUN-SUN [1] aufgestellt.

Wir wollen noch kurz über das Biegeproblem für den Stab sprechen. Es führt bekanntlich auf die Bestimmung einer Funktion $\chi(x, y)$, die im Querschnittgebiet $\Omega$ harmonisch ist und der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right|_S = -\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) y^2\right] l - (2 + \sigma)\, xym \tag{24}$$

genügt; $\sigma$ ist die POISSONsche Zahl. Nach dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen führt dieses Problem auf die Bestimmung einer Funktion, die das Funktional

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \int\limits_{S} \chi\,\{[\sigma x^2 + (2 - \sigma) y^2]\, l + 2(2 + \sigma)\, xym\}\, dS$$

zum Minimum macht; da die Bedingung (24) natürlich ist, braucht man die Funktion $\chi$ keinerlei Randbedingungen zu unterwerfen.

## § 24. Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten

Eine nicht unwichtige Rolle spielen in verschiedenen Fragen der mathematischen Physik Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. So nennt man lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten gegebene Funktionen

der unabhängigen Veränderlichen des Problems, insbesondere der Koordinaten, sind. So stellen die Gleichungen für das Gleichgewicht und ebenso auch für Schwingungen elastischer Schalen Systeme mit veränderlichen Koeffizienten dar; die Biegung einer Platte von veränderlicher Dicke wird bestimmt durch eine Gleichung vierter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten; auf eine Gleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten führt das Problem der Schwingungen des Flüssigkeitsspiegels in einem Bassin[1]). Besondere Bedeutung haben lineare Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten bei der Untersuchung nichtlinearer Gleichungen. Einerseits führen viele Linearisierungsverfahren oft auf Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten; das gilt z. B. für die in der Gasdynamik so wichtige Gleichung von TSCHAPLYGIN [1]. Andererseits führt die Anwendung verschiedener Iterationsverfahren auf nichtlineare Gleichungen häufig dahin, daß man jede Näherung als Lösung einer linearen Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten erhält; so geschieht das gewöhnlich bei Benutzung des sogenannten „NEWTONschen Verfahrens", das von L. W. KANTOROWITSCH [1] ausgearbeitet wurde.

Der Übergang von konstanten zu veränderlichen Koeffizienten bringt ernste Schwierigkeiten mit sich bei der Anwendung solcher Methoden, wie des Integralgleichungsverfahrens oder der Methode der GREENschen Funktion und besonders beim Aufsuchen elementarer Partikulärlösungen. Aber für die Mehrzahl der Variationsmethoden, darunter auch für die energetische, ist der Übergang zu veränderlichen Koeffizienten nicht mit bemerkenswerten zusätzlichen Schwierigkeiten verknüpft, und die Ergebnisse des § 22 lassen sich mit entsprechenden Änderungen auf die Gleichungen vom elliptischen Typ[2]) übertragen. Diesem Gegenstand ist der vorliegende Paragraph gewidmet.

Wir wollen die Gleichung

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)u = f(P); \quad A_{jk} = A_{kj} \tag{1}$$

bei Randbedingungen eines der drei Typen

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

$$[N(u) + \sigma(P)u]_S = 0, \tag{3}$$

$$N(u)|_S = 0 \tag{4}$$

betrachten, wo

$$N(u) = \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)$$

ist; hier bedeutet wie gewöhnlich $S$ den Rand eines endlichen Gebietes $\Omega$, $\nu$ die Außennormale zu $S$. Analog wie bei den Gleichungen von POISSON und LAPLACE nennt man das Randwertproblem für die Gleichung (1) bei den Bedingungen (2),

---

[1]) Siehe etwa L. N. SRETENSKIJ [1].

[2]) Die Definition der Gleichung vom elliptischen Typ siehe unten.

(3) oder (4) DIRICHLETsches Problem, gemischtes Problem oder NEUMANNsches Problem. Die Wahl der speziellen Form der Gleichung (1) (die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung läßt sich nicht in diese Form bringen) erklärt sich dadurch, daß bei einer beliebigen der Randbedingungen (2), (3) oder (4) der Operator $L$ symmetrisch ist. Nach der GREENschen Formel (Formel (7), § 2) ist nämlich

$$\int_\Omega (vLu - uLv)\, d\Omega = -\int_S [vN(u) - uN(v)]\, dS. \tag{5}$$

Wenn beide Funktionen der Bedingung (2) oder der Bedingung (4) genügen, dann verschwindet offensichtlich die Funktion unter dem Flächenintegral. Wenn aber beide Funktionen der Bedingung (3) genügen, dann ist auf $S$

$$N(u) + \sigma u = 0, \quad N(v) + \sigma v = 0.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $v$, die zweite mit $u$ und bilden die Differenz. Wir finden, daß

$$[vN(u) - uN(v)]_S = 0$$

gilt, so daß auch in diesem Falle die Funktion unter dem Integral über $S$ verschwindet. Demnach verschwindet in allen Fällen die rechte und folglich auch die linke Seite der Gleichung (5):

$$\int_\Omega (vLu - uLv)\, d\Omega = (Lu, v) - (u, Lv) = 0.$$

Das bedeutet, daß der Operator $L$ symmetrisch auf der entsprechenden Funktionenmenge ist.

Der Operator $L$ und mit ihm auch die Gleichung (1), heißt *elliptisch im abgeschlossenen Gebiet* $\overline{\Omega}$, wenn die Koeffizienten $A_{jk}(P)$ folgende Eigenschaften besitzen: Es existiert eine solche positive Konstante $\mu_0$, daß für beliebige reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ und einen beliebigen Punkt $P \in \overline{\Omega}$ die Ungleichung[1])

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P)\, t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2 \tag{6}$$

gilt; der Koeffizient $C$ ist keinen Beschränkungen unterworfen.

---

[1]) Diese Definition behält ihre Gültigkeit auch für den allgemeinen linearen Differentialoperator zweiter Ordnung

$$-\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu \tag{*}$$

und für die zugehörige Differentialgleichung. Der Begriff „elliptisch im abgeschlossenen Gebiet" bleibt natürlich für den Operator $L$ gültig, wenn man bei letzterem die Zeichen der Koeffizienten so ändert, daß statt (6) die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P)\, t_j t_k \leq -\mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2$$

gilt.

Als Beispiel betrachten wir den Operator

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

Hier ist $m = 2$. Wenn man $x = x_1$, $y = x_2$ setzt, ist

$$A_{11} = 1 + x_2^2,\ A_{12} = A_{21} = -x_1x_2,\ A_{22} = 1 + x_1^2.$$

Die linke Seite der Formel (6) hat im vorliegenden Fall die Form

$$(1 + x_2^2)t_1^2 - 2x_1x_2t_1t_2 + (1 + x_1^2)t_2^2 = t_1^2 + t_2^2 + (x_2t_1 - x_1t_2)^2.$$

Wenn wir den letzten Summanden rechts unterdrücken, erhalten wir

$$(1 + x_2^2)t_1^2 - 2x_1x_2t_1t_2 + (1 + x_1^2)t_2^2 \geq t_1^2 + t_2^2.$$

Unabhängig von den Werten von $x_1$ und $x_2$ ist die Ungleichung (6) mit der Konstanten $\mu_0 = 1$ erfüllt. Daraus folgt, daß unser Operator in einem beliebigen Gebiet der Veränderlichen $x$ und $y$ elliptisch ist.

Wir betrachten noch den „Operator von TRICOMI"

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Hier ist $A_{11} = x_2$, $A_{12} = A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$, und die linke Seite der Formel (6) hat die Form $x_2t_1^2 + t_2^2$. Wenn $x_2 \geq \delta > 0$ ist, dann gilt $x_2t_1^2 + t_2^2 \geq \delta t_1^2 + t_2^2 \geq \delta'(t_1^2 + t_2^2)$, wo $\delta'$ die kleinere der Zahlen 1 und $\delta$ bedeutet; die Ungleichung (6) ist mit der Konstanten $\mu_0 = \delta$ erfüllt, und der Operator $y\,\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2$ ist in einem beliebigen abgeschlossenen Gebiet elliptisch, welches einschließlich seines Randes ganz in der oberen Halbebene gelegen ist. Wenn das Gebiet ganz oder teilweise in der unteren Halbebene gelegen ist, dann ist der Operator von TRICOMI in diesem Gebiet nicht elliptisch.[1]) Wenn das Gebiet in der oberen Halbebene liegt, aber sein Rand teilweise (oder mit einem Punkt) auf der $x$-Achse liegt, dann gehört der TRICOMIsche Operator im abgeschlossenen Gebiet zur Klasse der sogenannten *entarteten* elliptischen Operatoren, von denen im folgenden Paragraphen noch zu reden sein wird.

Wir wollen voraussetzen, daß die Gleichung (1) in $\overline{\Omega}$ elliptisch ist, so daß die Ungleichung (6) für eine gewisse positive Konstante $\mu_0$ erfüllt ist. Wir klären jetzt die Bedingungen, die gewährleisten, daß der Operator (1) auf jeder Menge von den Bedingungen (2), (3) oder (4) genügenden Funktionen positiv-definit ist; wie wir wissen, garantiert das sowohl die Existenz einer Lösung des entsprechenden Randwertproblems, als auch die Möglichkeit der näherungsweisen Berechnung dieser Lösung mit Hilfe der Methoden des Kapitels III. In allen diesen Fällen wollen wir voraussetzen, daß $C(P) \geq 0$ ist. Fälle, wo $C(P)$ negative Werte annimmt, werden wir hier nicht betrachten.

---

[1]) In der unteren Halbebene ist der TRICOMIsche Operator hyperbolisch.

Nach der GREENschen Formel (Formel (5), § 2) ist

$$(Lu, u) = \int_\Omega u Lu \, d\Omega = \int_\Omega \left\{ \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right\} d\Omega - \int_S u N(u) \, dS.$$

Wenn die Randbedingungen (2) oder (4) gegeben sind, verschwindet das Flächenintegral, und man erhält

$$(Lu, u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right\} d\Omega; \tag{7}$$

wenn jedoch die Bedingung (3) gegeben ist, dann wird $N(u) = -\sigma u$ auf $S$ und

$$(Lu, u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right\} + \int_S \sigma u^2 dS; \tag{8}$$

wir wollen voraussetzen, daß die Funktion $\sigma(P)$ durch eine positive Zahl $\sigma_0$ nach unten beschränkt ist, so daß $\sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$ ist.

Wenn der Koeffizient $C(P)$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist, dann ist der Operator $L$ für eine beliebige der Bedingungen (2)—(4) positiv-definit. Nach Ungleichung (6) gilt nämlich

$$\int_\Omega \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\Omega \geq \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega, \tag{9}$$

das Integral auf der linken Seite der Formel (9) ist nicht negativ. In den Formeln (7) und (8) lassen wir dieses Integral fort, in der Formel (8) unterdrücken wir außerdem noch das nicht negative Flächenintegral. In beiden Fällen kommen wir zu der Ungleichung

$$(Lu, u) \geqq \int_\Omega C(P) u^2 \, d\Omega.$$

Nach Voraussetzung ist $C(P) \geq C_0$, wo $C_0$ eine positive Konstante ist, dann folgt aus der letzten Ungleichung jedoch

$$(Lu, u) \geq \gamma^2 \int_\Omega u^2 \, d\Omega = \gamma^2 \|u\|^2; \quad \gamma = \sqrt{C_0},$$

d. h. $L$ ist ein positiv-definiter Operator.

Wenn der Koeffizient $C(P)$ irgendwo in $\bar{\Omega}$ verschwinden kann, dann ist der oben geführte Beweis hinfällig; trotzdem bleibt für die Randbedingungen (2) und (3) der Operator $L$ positiv-definit. Wir betrachten den Fall der Randbedingung (2). Unter dem Integral in Formel (7) lassen wir den nicht negativen Summanden $Cu^2$ fort; das verbleibende Integral schätzen wir nach der Ungleichung (9) ab. Als Ergebnis erhalten wir

$$(Lu, u) \geq \mu_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega.$$

Die Funktion $u(P)$ verschwindet auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ und genügt deshalb der FRIEDRICHSschen Ungleichung (Formel $(18_1)$, § 22). Ihre Anwendung liefert

$$(Lu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa \mu_0},$$

was zu beweisen war.

Wir kehren nun zur Bedingung (3) zurück. In der Formel (8) unterdrücken wir $Cu^2$ unter dem Integralzeichen, unter dem Flächenintegral ersetzen wir $\sigma$ durch $\sigma_0$. Das verbleibende Volumenintegral schätzen wir nach der Ungleichung (9) ab. Alles das ergibt

$$(Lu, u) \geq \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega + \sigma_0 \int_S u^2 \, dS.$$

Es sei $\alpha$ die kleinere der Zahlen $\mu_0$ und $\sigma_0$. Dann ist offensichtlich

$$(Lu, u) \geq \alpha \left\{ \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + \int_S u^2 \, dS \right\}.$$

Jetzt ergibt die Ungleichung (20) des § 22, die einfach auf den Fall eines beliebigen $m$ verallgemeinert wurde,

$$(Lu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma = \sqrt{\alpha C}.$$

Bei der Behandlung der Randbedingung (3) beschränken wir uns auf den einfachsten und gleichzeitig interessantesten Fall $C(P) \equiv 0$. Das Problem führt auf die Integration der Gleichung

$$L_0 u = -\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P) \tag{10}$$

bei der Randbedingung (4). Es ist nicht schwer zu sehen, daß diese Aufgabe nicht immer eine Lösung hat. Um sich davon zu überzeugen, integrieren wir beide Seiten der Gleichung (10) über $\Omega$:

$$-\int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega = \int_\Omega f \, d\Omega.$$

Wir wenden auf die linke Seite der letzten Gleichung die Formel von OSTROGRADSKI an und finden

$$-\int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega = -\int_S \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j) \, dS = 0,$$

was infolge der Bedingung (4) verschwindet. Wenn also das NEUMANNsche Problem eine Lösung hat, dann ist notwendig

$$\int_\Omega f \, d\Omega = 0.$$

Wenn andererseits eine Lösung existiert, dann ist sie nicht eindeutig: Zusammen mit $u$ ist auch $u + C$ eine Lösung, wo $C$ eine willkürliche Konstante ist. Wir beseitigen diese Willkür, indem wir fordern, daß die gesuchte Lösung der Beziehung

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0 \tag{11}$$

genügt.

Wir betrachten jetzt die Menge der Funktionen, die in $\overline{\Omega}$ zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind und den Beziehungen (4) und (11) genügen. Wir zeigen, daß der Operator $L_0$ auf dieser Menge positiv-definit ist. Es ist nämlich

$$(L_0 u, u) = -\int_{\Omega} u \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega .$$

Partielle Integration und Anwendung der Bedingung (4) ergibt

$$(L_0 u, u) = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Omega \geq \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega . \tag{12}$$

Die allgemeine Ungleichung von Poincaré (siehe § 22)

$$\int_{\Omega} u^2 \, d\Omega \leq A \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega + B \left(\int_{\Omega} u \, d\Omega\right)^2$$

ergibt mit der Bedingung (11)

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega > \frac{1}{A} \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega = \frac{1}{A} \, \| u \|^2 .$$

Setzt man das in (12) ein, erhält man

$$(L_0 u, u) \geq \gamma^2 \| u \|^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\mu_0}{A}} .$$

## § 25. Die ausgeartete elliptische Gleichung; die Gleichung von Tschaplygin

Den Differentialoperator zweiter Ordnung

$$-\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} B_j(P) \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(P) u \tag{0}$$

wollen wir als *ausgearteten elliptischen Operator im gegebenen endlichen Gebiet* $\Omega$ bezeichnen, wenn die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P) t_j t_k > 0 \tag{1}$$

gilt, und zwar für jeden beliebigen Punkt $P \in \Omega$ und für beliebige, nicht gleichzeitig verschwindende reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$, und wenn die Ungleichung (6) des § 24

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P) t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j=1}^{m} t_j^2$$

in gewissen Punkten $P \in \Omega$ und für gewisse Werte $t_1, t_2, \ldots, t_m$ verletzt ist, und zwar für jede positive Konstante $\mu_0$. Als einer der einfachsten Operatoren dieser Art erweist sich der im vorigen Paragraphen betrachtete TRICOMIsche Operator.

Eine Differentialgleichung der Form $Lu = f(P)$, wo $f(P)$ eine gegebene Funktion und $L$ ein ausgearteter elliptischer Operator ist, wollen wir *ausgeartete elliptische Gleichung* nennen. Die allgemeine Theorie derartiger Gleichungen wurde in Arbeiten von M. W. KELDYSCH [2], M. I. WISCHIK [4—6] und dem Verfasser [13, 15, 16] entwickelt[1]); eine Reihe wichtiger Ergebnisse, die sich auf spezielle Formen ausgearteter Gleichungen beziehen, ist in den Arbeiten von S. A. TSCHAPLYGIN [1], F. TRICOMI [1] und anderer enthalten[2]). Hinsichtlich der in ihnen entwickelten Verfahren stehen vorliegendem Werke die hier erwähnten Arbeiten von M. I. WISCHIK und vom Autor nahe[3]). Im vorliegenden Paragraphen beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, der im Artikel des Verfassers [13] betrachtet wurde.

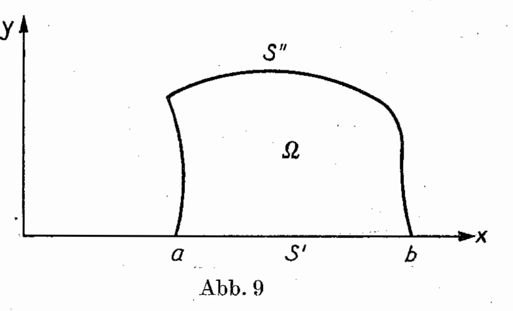


Abb. 9

Wir beschränken uns auf den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher und betrachten in der Halbebene $y > 0$ (Abb. 9) ein endliches Gebiet $\Omega$, dessen Begrenzung aus dem Abschnitt $(a, b)$ der $x$-Achse (wir bezeichnen ihn mit $S'$) und der Kurve $S''$ besteht, welche mit Ausnahme der Endpunkte $a$ und $b$ ganz in der oberen Halbebene liegt. Wir bezeichnen wie gewöhnlich den Rand des Gebietes $\Omega$ mit $S$, haben also $S = S' + S''$. Eine Funktion $\varphi(y)$ sei definiert und, sagen wir, im Intervall $0 \leq y \leq Y$ stetig, wo $Y$ nicht kleiner als die größte Ordinate der Punkte der Kurve $S''$ ist, weiter sei $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(y) > 0$ für $y > 0$. Im selben Intervall $0 \leq y \leq Y$ sei eine weitere stetige Funktion $\omega(y)$ gegeben, von der wir voraussetzen, daß $\omega(y) \geq k$ ist, wo $k$ eine positive Konstante ist.

Wir betrachten den elliptischen Differentialoperator

$$-\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. noch die Arbeiten von O. A. OLEJNIK [1] und N. D. WWEDENSKOJ [1], ferner auch die sehr interessante Arbeit von M. S. BIRMAN [4].

[2]) Wegen der Bibliographie siehe F. TRICOMI [1], ferner auch S. BERGMANN und M. SCHIFFER [1].

[3]) Wir weisen noch auf die Arbeit von E. W. MACHOWER [1] hin, in der eine ausgeartete Gleichung vierter Ordnung betrachtet wird.

der im Gebiet $\Omega$ ausgeartet ist; dieser Operator geht für $\varphi(y) \equiv y$, $\omega(y) \equiv 1$ in den TRICOMIschen Operator über. Wir stellen das Problem, die Gleichung

$$-\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y) \tag{3}$$

im Gebiet $\Omega$ zu integrieren, wobei $f(x, y)$ eine gegebene Funktion ist und homogene Randbedingungen eines der beiden Typen

$$\text{I.} \qquad u|_S = 0, \tag{4}$$

$$\text{II.} \qquad u|_{S''} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{S'} = 0 \tag{5}$$

vorliegen.

Den Operator (2), der auf einer Menge von in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ zweimal stetig differenzierbaren und den Randbedingungen (4) oder (5) genügenden Funktionen betrachtet wird, wollen wir mit $L_{\mathrm{I}}$ oder $L_{\mathrm{II}}$ bezeichnen. Wir zeigen, daß die Operatoren $L_{\mathrm{I}}$ und $L_{\mathrm{II}}$ positiv-definit sind.

$u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien zwei Funktionen, welche gleichzeitig zum Definitionsbereich $D_{L_{\mathrm{I}}}$ des Operators $L_{\mathrm{I}}$ oder zum Definitionsbereich $D_{L_{\mathrm{II}}}$ des Operators $L_{\mathrm{II}}$ gehören. Insbesondere genügen beide Funktionen gleichzeitig den Randbedingungen (4) oder (5). Wir verstehen unter $i$ einen beliebigen der Indizes I und II und bilden das Skalarprodukt

$$(L_i u, v) = -\iint\limits_{\Omega} v\left[\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dx\, dy.$$

Wendet man auf das letzte Integral die GREENsche Formel an, so erhält man

$$(L_i u, v) = \iint\limits_{\Omega}\left[\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy$$
$$- \int\limits_S v\left[\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu, x) + \omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu, y)\right] dS; \tag{6}$$

$\nu$ ist wie gewöhnlich die Außennormale zu $S$. Es ist leicht zu sehen, daß das Randintegral gleich Null ist. Denn sowohl bei der Bedingung (4) als auch bei der Bedingung (5) verschwindet die Funktion $v$ auf der Kurve $S''$, und man braucht das Randintegral in (6) nur über das Intervall $S'$ der $x$-Achse zu erstrecken. Wenn die Bedingung (4) gegeben ist, dann ist $v|_{S'} = 0$, und das Integral über $S'$ verschwindet; wenn aber die Bedingung (5) gegeben ist, dann ist $\partial u/\partial y = 0$ und außerdem $\cos(\nu, x) = 0$, und wie zuvor verschwindet das Integral über $S'$. Jetzt ist

$$(L_i u, v) = \iint\limits_{\Omega}\left[\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy; \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}; \tag{7}$$

Formel (7) besagt, daß die Operatoren $L_{\mathrm{I}}$ und $L_{\mathrm{II}}$ symmetrisch sind, da sich die rechte Seite der genannten Formel bei Vertauschung der Funktionen $u$ und $v$ nicht ändert. Wir setzen in (7) $v \equiv u$ und finden

$$(L_i u, u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy; \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}. \tag{8}$$

Aus den Formeln (8) folgt sofort, daß die Operatoren $L_{\mathrm{I}}$ und $L_{\mathrm{II}}$ positiv sind. Um ihre positive Definitheit zu beweisen, schließen wir $\Omega$ in ein Rechteck ein (Abb. 10), das durch die Ungleichung $a' \leq x \leq b'$, $0 \leq y \leq Y$ definiert ist; offensichtlich ist $a' \leq a$ und $b' \geq b$. Dieses Rechteck bezeichnen wir mit dem Buchstaben $R$. Eine Funktion $u(x, y)$ sei aus den Definitionsbereichen des Operators $L_{\mathrm{I}}$ oder des Operators $L_{\mathrm{II}}$ gegeben, d. h. sie sei zweimal stetig differenzierbar in $\Omega$ und genüge auf $S$ entweder der Bedingung (4) oder der Bedingung (5). Wir definieren die Funktion $u(x, y)$ im Rechteck $R$, indem wir sie außerhalb von $\overline{\Omega}$ gleich Null setzen. Bei dieser Definition ist die Funktion im Rechteck stetig, während ihre erste Ableitung nur auf der Kurve $S''$ unstetig wird, wo sie einen endlichen Sprung erleidet. $(x, y)$ sei ein Punkt innerhalb des Rechtecks. Wir haben

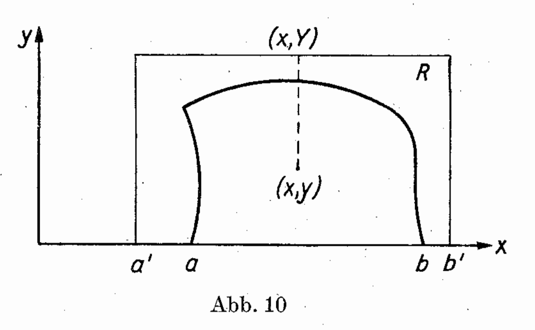


Abb. 10

$$\int\limits_{y}^{Y} \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\, d\eta = u(x, Y) - u(x, y).$$

Der Punkt $(x, Y)$ liegt jedoch außerhalb von $\Omega$, und deshalb verschwindet die Funktion $u$ in diesem Punkt. Daraus ergibt sich

$$u(x, y) = -\int\limits_{y}^{Y} \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\, d\eta.$$

Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI ist

$$u^2(x, y) \leq (Y - y)\int\limits_{y}^{Y}\left(\frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \leq Y\int\limits_{0}^{Y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

$$\leq \frac{Y}{k}\int\limits_{0}^{Y}\left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dy.$$

Integration dieser Ungleichung über das Rechteck $R$ liefert

$$\iint_R u^2\,dx\,dy \leq \frac{Y^2}{k}\iint_R \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Im Gebiet $R - \Omega$ haben wir $u(x, y) \equiv 0$; indem wir die verschwindenden Integrale über dieses Gebiet fortlassen, kommen wir zu der Ungleichung

$$\iint_\Omega u^2\,d\Omega \leq \frac{Y^2}{k}\iint_\Omega \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \tag{9}$$

Der Vergleich der Formeln (8) und (9) ergibt

$$(L_i u, u) \geq \frac{k}{Y^2}\iint_\Omega u^2\,dx\,dy = \frac{k}{Y^2}\,\|u\|^2; \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II},$$

und das bedeutet, daß die Operatoren $L_{\mathrm{I}}$ und $L_{\mathrm{II}}$ positiv-definit sind.

Gestützt auf die Ergebnisse der §§ 11, 18 und 19 kann man folgende Behauptungen aufstellen:

1. Die Lösung der ausgearteten elliptischen Gleichung (3) bei den Randbedingungen (4) oder (5) existiert (mindestens im verallgemeinerten Sinne) und kann als Lösung des Minimalproblems für das Funktional

$$F(u) = \iint_\Omega \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf\right] dx\,dy \tag{10}$$

erhalten werden, wobei das Minimum auf einer Menge von Funktionen zu suchen ist, die der Bedingung $u|_S = 0$ genügen, wenn die Randbedingung (4) gegeben ist, der Bedingung $u|_{S''} = 0$, wenn (5) gegeben ist; im letzteren Falle ist die Bedingung $\partial u/\partial y\,|_{S'} = 0$ natürlich.

2. Die Lösung der homogenen Gleichung

$$\varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{11}$$

bei der inhomogenen Randbedingung

$$u\,|_S = g_1(s), \tag{12}$$

wo $s$ die Bogenlänge auf dem Rand $S$ ist, führt auf die Bestimmung des Minimums des Funktionals

$$\iint_\Omega \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \tag{13}$$

auf der Menge der Funktionen, die der Bedingung (12) genügen, wenn wenigstens eine Funktion existiert, die der Bedingung (12) genügt und dem Integral (13) einen endlichen Wert erteilt.

3. Die Lösung der Gleichung (11) bei den Randbedingungen

$$u|_{S''} = g_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{S'} = g_2(x) \tag{14}$$

führt auf die Bestimmung des Minimums des Funktionals

$$\iint_\Omega \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \omega(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy - 2\int_a^b u(x)\,g_2(x)\,dx \tag{15}$$

auf der Menge der Funktionen, die der Bedingung $u|_{S''} = g_1(x)$ genügen, wenn mindestens eine Funktion existiert, die dieser Bedingung genügt und dem Funktional (15) einen endlichen Wert erteilt; die Bedingung $\partial u/\partial y|_{S'} = g_2(x)$ ist für dieses Funktional natürlich.

Einen besonders wichtigen Spezialfall der Gleichung (11) stellt die Gleichung von TSCHAPLYGIN [1] dar:

$$\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right] = 0. \tag{16}$$

Hier ist $\beta$ eine positive Konstante, die durch die Beziehung $\beta = (\gamma-1)^{-1}$ mit der relativen Wärmekapazität $\gamma$ verknüpft ist. Dem Sinn der Aufgabe entsprechend ist die Größe $\tau$ positiv im engeren Sinne; den Werten $\tau < (2\beta+1)^{-1}$ entsprechen Geschwindigkeiten der Gaspartikel unterhalb der Schallgeschwindigkeit; bei $\tau = (2\beta+1)^{-1}$ fällt die Geschwindigkeit der entsprechenden Gaspartikel mit der Schallgeschwindigkeit zusammen. Die Gleichung von TSCHAPLYGIN ist im Bereich der Unterschallgeschwindigkeit vom elliptischen Typ; sie artet in der $\theta\tau$-Ebene auf der Geraden $\tau = (2\beta+1)^{-1}$ aus, d. h. dort, wo die Geschwindigkeit der Gaspartikel die Schallgeschwindigkeit erreicht. Die Gleichung (16) nimmt die Form (11) an, wenn man

$$x = \theta, \quad y = \frac{1}{2\beta+1} - \tau$$

setzt.

Aus dem oben Gesagten folgt, daß man die Gleichung von TSCHAPLYGIN durch Anwendung der energetischen Methode lösen kann, wenn es sich um eine Unterschallströmung handelt (wobei wir das Erreichen der Schallgeschwindigkeit zulassen), und wenn der Schwankungsbereich der Veränderlichen $\theta$ und $\tau$ gegeben ist sowie, sagen wir, die Werte der unbekannten Funktion $\psi$ auf dem Rand dieses Gebietes. Wie gewöhnlich muß dabei die Existenz einer Funktion gesichert sein, die auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ die vorgegebenen Werte annimmt und dem Integral

$$\iint_\Omega \left[\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2\right] d\theta\,d\tau$$

einen endlichen Wert erteilt.

Wir wenden uns wieder dem Operator (2) zu. Das Bild wird etwas komplizierter, wenn die Ausartung dieses Operators durch das Verschwinden der Funktion $\omega(y)$

hervorgerufen wird. Ohne uns auf Einzelheiten einzulassen, wegen derer wir den Leser auf die oben zitierten Arbeiten von M. I. WISCHIK und dem Verfasser verweisen, merken wir hier nur die grundlegenden Ergebnisse an. Wie zuvor wollen wir annehmen, daß das Gebiet die in Abb. 9 dargestellte Form hat. Wir nehmen an, daß die Funktion $\varphi(y) \geq 0$ für $0 \leq y \leq Y$ ist, ferner gelte $\omega(y) = y^\alpha \omega_1(y)$, $\omega_1(y) \geq k$; $\alpha$ und $k$ sind positive Konstanten. Wenn $\alpha < 1$ ist, dann kann man die Werte der gesuchten Funktion auf dem ganzen Rand $S$ vorgeben; dabei wird der Operator (2) positiv-definit und demzufolge hat das zugehörige Randwertproblem eine eindeutige Lösung, die man mit Hilfe der energetischen Methode finden kann. Wenn $\alpha \geq 1$ ist, dann darf man auf der Linie $S'$, wo der Operator ausgeartet ist, nichts vorgeben. Dabei erweist sich für $1 \leq \alpha \leq 2$ der Operator (2) als positiv-definit auf der Menge der auf $S''$ verschwindenden Funktionen, und das Problem, die Gleichung (3) bei der Randbedingung

$$u\,|_{S''} = 0 \tag{17}$$

zu integrieren, hat immer eine Lösung, und zwar eine eindeutige; wenn jedoch $\alpha > 2$ ist, dann ist der Operator (2) bei der Randbedingung (17) nur positiv, aber nicht positiv-definit, und die Aufgabe, die Gleichung (3) bei der Randbedingung (17) zu integrieren, ist im allgemeinen unlösbar, wenn man fordert, daß das gesuchte Integral eine endliche Energie besitzt.

## § 26. Das Minimalprinzip für die potentielle Energie in der Elastizitätstheorie

Wir wollen folgende Bezeichnungen verwenden: $\mathfrak{u}(u_x, u_y, u_z)$ ist der Verschiebungsvektor, $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$ sind die Spannungskomponenten, $\mathfrak{K}(X, Y, Z)$ ist der Vektor der Volumenkräfte. Ferner wollen wir mit $\varepsilon_x$ die relative Längenänderung in Richtung der $x$-Achse bezeichnen und mit $\gamma_{xy}$ den Schub in der $xy$-Ebene; analog bestimmen sich $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Die Größen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ wollen wir als Deformationskomponenten bezeichnen, obgleich das nicht ganz korrekt ist. Sie hängen mit dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ durch die Beziehungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{1}$$

und vier ihnen analoge zusammen. In einem elastischen Körper sind die Spannungs- und Deformationskomponenten durch die Gleichungen des verallgemeinerten HOOKEschen Gesetzes

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz},\\
\sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{xz} + a_{26}\gamma_{yz},\\
\sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{xz} + a_{36}\gamma_{yz},\\
\tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{xz} + a_{46}\gamma_{yz},\\
\tau_{xz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{xz} + a_{56}\gamma_{yz},\\
\tau_{yz} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{xz} + a_{66}\gamma_{yz}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

miteinander verknüpft. Die Größen $a_{jk}$ hängen nicht vom Deformationszustand des Körpers ab, sondern stellen mechanische Charakteristiken des Materials dar. Sie werden als *elastische Konstanten* des gegebenen Materials bezeichnet.

Zunächst muß bemerkt werden, daß die $a_{jk}$ nur für homogene Körper konstant sind, im allgemeinen Fall eines inhomogenen Körpers sind sie Funktionen der Koordinaten $x, y, z$.

Die Größen $a_{jk}$ hängen durch die wichtige Beziehung

$$a_{jk} = a_{kj}, \tag{3}$$

miteinander zusammen, welche aus der Existenz eines elastischen Potentials folgt, d. h. aus der Existenz einer solchen Funktion der Deformationskomponenten $W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{yz})$, daß

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \ldots, \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}$$

gilt. Aus den Formeln (2) und (3) ist leicht zu entnehmen, daß

$$2W = \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz} \tag{4}$$

gilt.

Im folgenden werden wir das elastische Potential mit $W(u)$ bezeichnen. Wenn man die Spannungskomponenten nach Formel (2) ersetzt, findet man, daß $W$ eine quadratische Form[1]) in den Deformationskomponenten ist. In der Elastizitätstheorie wird gezeigt, daß diese Form positiv-definit ist, d. h. daß $W \geq 0$ ist, wobei dann und nur dann $W = 0$ ist, wenn alle Deformationskomponenten gleich Null sind.[2]) Die Gleichungen (2) gelten für den allgemeinsten anisotropen Fall. Wenn der elastische Körper isotrop ist, vereinfachen sich die Gleichungen (2) stark und gehen in die bekannte Form der LAMÉ*schen Gleichungen* über:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}. \end{aligned}$$
$$\theta = \operatorname{div} \mathfrak{u}.$$

Hier sind $\lambda$ und $\mu$ die sogenannten LAMÉschen Konstanten.

Die bekannten Gleichgewichtsbedingungen, die wir in der etwas ungewöhnlichen Form

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) &= X, \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) &= Y, \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) &= Z \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) Die nötige Einführung in die Theorie der quadratischen Formen kann man z. B. im Buch von I. M. GELFAND [1] finden.

[2]) Eine ausführliche Erörterung der hier angeschnittenen Fragen siehe z. B. bei L. S. LEIBENSON [2].

schreiben, kann man als eine Vektorgleichung für den Vektor $\mathfrak{u}$ auffassen. Dazu genügt es, auf der linken Seite der Gleichungen (5), die als Komponenten eines Vektors aufgefaßt werden, statt $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$ ihre Ausdrücke (2) einzusetzen und weiter die Deformationskomponenten nach der Formel (1) zu ersetzen. Den genannten Vektor bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}\mathfrak{u}$, seine Komponenten mit $A_x\mathfrak{u}$, $A_y\mathfrak{u}$, $A_z\mathfrak{u}$. Das System (5) schreibt sich jetzt in der Form der Vektorgleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{K}. \tag{6}$$

Wir bemerken, daß im wichtigsten Fall, einem isotropen Medium, der Operator $\mathfrak{A}$ eine überaus einfache Form hat, nämlich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}.$$

Es seien $\mathfrak{u}'$ und $\mathfrak{u}''$ zwei Verschiebungsvektoren, die den Volumenkräften $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ entsprechen. Wir erwähnen die bekannten Formeln von BETTI[1])

$$\int_\Omega \mathfrak{u}'\,\mathfrak{A}\mathfrak{u}''\,d\Omega = 2\int_\Omega W(\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'')\,d\Omega - \int_S \mathfrak{u}'\mathfrak{t}''^{(\nu)}\,dS, \tag{7}$$

$$\int_\Omega \mathfrak{u}\,\mathfrak{A}\mathfrak{u}\,d\Omega = 2\int_\Omega W(\mathfrak{u})\,d\Omega - \int_S \mathfrak{u}\mathfrak{t}^{(\nu)}\,dS, \tag{8}$$

$$\int_\Omega (\mathfrak{u}'\,\mathfrak{A}\mathfrak{u}'' - \mathfrak{u}''\,\mathfrak{A}\mathfrak{u}')\,d\Omega = -\int_S (\mathfrak{u}'\mathfrak{t}''^{(\nu)} - \mathfrak{u}''\mathfrak{t}'^{(\nu)})\,dS. \tag{9}$$

Hier haben wir folgende Bezeichnungen benutzt:

1. Ein einfacher Strich (bzw. ein zweifacher Strich) bezeichnen Größen, die sich auf den Vektor $\mathfrak{u}'$ (bzw. auf den Vektor $\mathfrak{u}''$) beziehen;

2. $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ ist der Spannungsvektor, der auf die Oberfläche des Körpers wirkt;

3. $W(\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'') = \frac{1}{2}(\varepsilon'_x\sigma''_x + \varepsilon'_y\sigma''_y + \varepsilon'_z + \gamma'_{xy}\tau''_{xy} + \gamma'_{xz}\tau''_{xz} + \gamma'_{yz}\tau''_{yz})$;

wie bekannt, ist $W(\mathfrak{u}',\mathfrak{u}'') = W(\mathfrak{u}'',\mathfrak{u}')$.

Wir wenden uns jetzt dem Problem zu, die Gleichungen der Elastizitätstheorie zu integrieren. Die diesen Gleichungen zugeordneten Randbedingungen nehmen wir als homogen an.

Die einfachsten und wichtigsten Typen von Randbedingungen in der Elastizitätstheorie sind die folgenden:

a) Der Rand $S$ ist eingespannt:

$$\mathfrak{u}|_S = 0; \tag{10}$$

b) der Rand des Körpers ist frei von der Wirkung äußerer Kräfte:

$$\mathfrak{t}^{(\nu)}|_S = 0; \tag{11}$$

c) der Rand des Körpers besteht aus zwei Teilen $S_1$ und $S_2$, auf dem ersten Teil ist der Rand eingespannt, auf dem zweiten ist er frei von der Wirkung äußerer Kräfte:

$$\mathfrak{u}|_{S_1} = 0, \quad \mathfrak{t}^{(\nu)}|_{S_2} = 0. \tag{12}$$

Die Aufgabe c) wird oft als gemischtes Problem der Elastizitätstheorie bezeichnet.

---

[1]) Siehe z. B. E. TREFFTZ [2].

Wir zeigen, daß alle angeführten Aufgaben gleichbedeutend mit dem Minimalproblem für das Integral

$$\int_\Omega \{W(\mathfrak{u}) - \mathfrak{u}\,\mathfrak{K}\}\,d\Omega \tag{13}$$

bei dieser oder jener Randbedingung sind. Diese Formulierung stellt das bekannte Minimalprinzip für die potentielle Energie in der Elastizitätstheorie dar, da das Integral (13) gleich der potentiellen Energie eines elastischen Körpers ist, der unter der Wirkung der Volumenkraft $\mathfrak{K}$ steht.

Wir bilden den Ausdruck

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = \int_\Omega \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{u}\,d\Omega.$$

Wir wenden auf dieses Integral die Formel (8) an und bemerken, daß bei einer beliebigen der Bedingungen (10) oder (12) der Integrand im Flächenintegral verschwindet. Demnach ist

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 2\int_\Omega W(\mathfrak{u})\,d\Omega \geq 0. \tag{14}$$

Ferner, wenn $(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 0$ ist, dann ist $W(\mathfrak{u}) \equiv 0$, und da $W$ eine positiv-definite quadratische Form in den Deformationskomponenten ist, sind diese letzteren identisch gleich Null. Dann aber ist $\mathfrak{u}$ der Vektor einer kleinen starren Verschiebung des Körpers; wenn der Rand des Körpers [Bedingung (10)] oder ein Teil des Randes [Bedingung (12)] eingespannt ist, dann ist eine starre Verschiebung unmöglich und $\mathfrak{u} \equiv 0$. Demnach ist der Operator $\mathfrak{A}$ positiv auf jeder der durch die Bedingungen (10) oder (12) definierten Mengen. Nach dem Satz vom Minimalfunktional (§ 11) ist das Aufsuchen eines Integrals der Gleichungen (6) (oder, was dasselbe ist, des Systems der Gleichungen der Elastizitätstheorie) bei einer der Bedingungen (10) oder (12) gleichbedeutend mit der Bestimmung eines Vektors, der denselben Randbedingungen genügt und das Funktional

$$F(\mathfrak{u}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) - 2(\mathfrak{K}, \mathfrak{u}) = 2\int_\Omega \{W(\mathfrak{u}) - \mathfrak{K}\mathfrak{u}\}\,d\Omega$$

zum Minimum macht. Damit ist das Minimalprinzip für die potentielle Energie in Anwendung auf die Aufgaben a) und c) bewiesen.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Aufgabe b), die in der Elastizitätstheorie dieselbe Rolle spielt wie das NEUMANNsche Problem in der Theorie der harmonischen Funktionen. Auf dem Lineal der Funktionen, die einschließlich ihrer ersten und zweiten Ableitungen in $\overline{\Omega}$ stetig sind und der Randbedingung (11) genügen, ist der Operator $\mathfrak{A}$ nicht positiv. Die Formel (14) bleibt zwar auch jetzt gültig, so daß $(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) \geq 0$ ist. Jedoch kann $(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u})$ nicht nur für $\mathfrak{u} \equiv 0$ verschwinden, sondern auch, wenn man für $\mathfrak{u}$ eine willkürliche kleine starre Verschiebung wählt. Wie schon beim NEUMANNschen Problem machen wir $\mathfrak{A}$ positiv, indem wir es auf einer engeren Funktionenmenge betrachten.

Die Aufgabe b) hat nicht immer eine Lösung, und es ist nicht schwer, die notwendige Bedingung für ihre Lösbarkeit zu finden. Sie besteht darin, daß die Resultierende der Kräfte, die auf den elastischen Körper wirken, statisch äquivalent Null sein muß. Da Oberflächenkräfte fehlen [Bedingung (11)], müssen die Volumenkräfte statisch äquivalent Null sein:

$$\int_\Omega \mathfrak{K}\, d\Omega = 0; \quad \int_\Omega \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}\, d\Omega = 0.$$

Hier ist $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor eines veränderlichen Punktes im Gebiet $\Omega$, das schräge Kreuz bezeichnet die vektorielle Multiplikation von Vektoren. Nach Bedingung (11) ist der Verschiebungsvektor nicht eindeutig bestimmt, zwei denselben Volumenkräften und derselben Randbedingung (11) entsprechende Verschiebungsvektoren können sich um den Vektor einer beliebigen kleinen starren Verschiebung unterscheiden. Dieser willkürliche Vektor kann festgelegt werden, indem man die gesuchte Lösung z. B. den Beziehungen

$$\int_\Omega \mathfrak{u}\, d\Omega = 0; \quad \int_\Omega \mathfrak{r} \times \mathfrak{u}\, d\Omega = 0 \tag{15}$$

unterwirft. Um sich davon zu überzeugen, genügt die Feststellung, daß der Vektor der kleinen starren Verschiebung, der den Gleichungen (15) genügt, gleich Null ist. Die Komponenten $u_x^0$, $u_y^0$, $u_z^0$ des Vektors der kleinen starren Verschiebung haben nämlich die Form

$$u_x^{(0)} = a + \alpha y - \beta z,$$
$$u_y^{(0)} = b - \alpha x + \gamma z,$$
$$u_z^{(0)} = c + \beta x - \gamma y,$$

wo $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Konstanten sind. Bekanntlich gilt folgendes, wenn ein Vektor den Gleichungen (15) in einem Koordinatensystem genügt, dann genügt er ihnen auch in einem beliebigen anderen Koordinatensystem. Wir nehmen deshalb die Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt des Körpers als Koordinatenachsen. Bei einer solchen Festlegung sind die statischen Momente gleich Null, und die erste Gleichung (15) liefert sofort $a = b = c = 0$.

Projiziert man die zweite Gleichung (15) auf die $x$-Achse, so erhält man

$$0 = \int_\Omega (y u_z^{(0)} - z u_y^{(0)})\, d\Omega = \beta J_{xy} - \gamma J_{yy} - \alpha J_{xz} - \gamma J_{zz}.$$

Die Trägheitsmomente $J_{xy}$, $J_{xz}$ sind gleich Null, und aus der letzten Gleichung folgt, daß $\gamma = 0$ ist. Ebenso beweist man, daß $\alpha = \beta = 0$ ist.

Wir betrachten jetzt ein Lineal von Verschiebungsvektoren, die nicht nur der Bedingung (11) genügen, sondern auch den Bedingungen (15). Es ist nicht schwer zu sehen, daß auf diesem Lineal der Operator $\mathfrak{A}$ positiv ist. Es genügt zu zeigen, daß hier aus der Beziehung $(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 0$ folgt, daß $\mathfrak{u} = 0$ ist. Wie jedoch schon oben gesagt wurde, folgt aus dieser Beziehung, daß $\mathfrak{u}$ der Vektor einer kleinen starren Verschiebung ist, und da dieser Vektor den Gleichungen (15) genügt, ist er gleich Null.

Demnach behält das Minimalprinzip für die potentielle Energie seine Gültigkeit auch für die Aufgabe b), wenn man annimmt, daß sowohl die Lösung der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie, als auch der Vektor, der das Funktional (13) zum Minimum macht, den Gleichungen (15) genügen.

Die Randbedingungen (11) sind natürlich, und sie brauchen beim Aufsuchen des Minimums nicht im voraus erfüllt zu sein.

Durch Überlegungen wie in § 18 kann man leicht die Form des Minimalintegrals auch im Fall inhomogener Randbedingungen finden.

Im allgemeinen Fall des gemischten Problems hat dieses Integral die Form

$$\int_{\Omega} \{W(\mathfrak{u}) - \mathfrak{u}\mathfrak{K}\}\, d\Omega - \int_{S_2} \mathfrak{u}\mathfrak{t}^{(\nu)}\, dS. \tag{16}$$

Hier ist $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ der auf dem Teil $S_2$ der Oberfläche $S$ vorgegebene Spannungsvektor. Wenn insbesondere auf der ganzen Oberfläche die Verschiebungen gegeben sind, dann hat das Minimalintegral die Form

$$\int_{\Omega} \{W(\mathfrak{u}) - \mathfrak{u}\mathfrak{K}\}\, d\Omega, \tag{17}$$

wenn jedoch auf der ganzen Oberfläche der Spannungsvektor gegeben ist, dann geht das Integral (16) in das folgende über:

$$\int_{\Omega} \{W(\mathfrak{u}) - \mathfrak{u}\mathfrak{K}\}\, d\Omega - \int_{S} \mathfrak{u}\mathfrak{t}^{(\nu)}\, dS. \tag{18}$$

Die Randbedingungen müssen im voraus nur auf dem Teil der Oberfläche erfüllt werden, auf dem die Verschiebungen vorgegeben sind.

Oben wurde festgestellt, daß der in den Gleichungen der Elastizitätstheorie auftretende Operator $\mathfrak{A}$ positiv auf der Menge der Verschiebungsvektoren ist, die den Bedingungen (10), (12) oder (11) und (15) genügen. Man kann beweisen, daß der Operator $\mathfrak{A}$ auf jeder dieser Mengen positiv-definit ist. Eine ausführliche Formulierung und den Beweis des entsprechenden Satzes, aber auch bibliographische Hinweise findet der Leser in dem Buch des Verfassers [11]. Für den Fall des eingespannten Randes wird die positive Definitheit des Operators $\mathfrak{A}$ in § 39 bewiesen.

## § 27. Biegung dünner Platten

1. In den vorangegangenen Paragraphen dieses Kapitels gingen wir von den Differentialgleichungen und Randbedingungen eines gegebenen Problems aus und überführten es in ein Minimalproblem für ein bestimmtes Funktional. Im vorliegenden Paragraphen behandeln wir die Frage, wie man die Differentialgleichung und natürliche Randbedingungen erhält, wenn man von dem Variationsproblem ausgeht.

Man kann die Theorie dünner Platten aufbauen, indem man sich auf die unten formulierten Hypothesen stützt.[1])

---

[1]) Diese Hypothesen wurden in etwas anderen Ausdrücken von KIRCHHOFF [1] formuliert.

Wie es üblich ist, nehmen wir an, daß die $xy$-Ebene in der Mittelebene der Platte liegt; mit $h$ bezeichnet man die Dicke der Platte.

Die Hypothesen: 1. Die Punkte der Mittelebene der Platte erleiden nur Normalverschiebungen; 2. infolge der Kleinheit der Plattendicke kann man die Verschiebungen $u_x$ und $u_y$ als lineare Funktionen von $z$ annehmen, die Verschiebung $u_z$ als unabhängig von $z$; 3. in den Punkten der Mittelebene ist der Schub in den Vertikalebenen gleich Null; 4. im Vergleich mit $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ sind die Spannungen $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$, $\sigma_z$ vernachlässigbar klein; 5. für die gebogene Platte behält das Minimalprinzip für die potentielle Energie seine Gültigkeit in der unten noch zu beschreibenden Form.

Wir bezeichnen mit $w(x, y)$ die Normalverschiebung im Punkt $(x, y)$ der Mittelebene. Infolge der Hypothesen 1 und 2 ist $u_x = z\tilde{u}(x, y)$, $u_y = z\tilde{v}(x, y)$, wo $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ gewisse Funktionen von $x$ und $y$ sind. Nach Hypothese 3 gilt $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ für $z = 0$; daraus folgt $\tilde{u} = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\tilde{v} = -\dfrac{\partial w}{\partial y}$, und demzufolge ist

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Gestützt auf die Hypothese 4 setzen wir $\sigma_z \equiv 0$. Aus den LAMÉschen Gleichungen ergibt sich dann $\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = 0$, woraus

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

folgt. Wir setzen dies in die ersten zwei LAMÉschen Gleichungen ein und erhalten, wenn wir die bekannten Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten des isotropen Körpers benutzen,

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_x + \sigma\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\sigma^2}(\varepsilon_y + \sigma\varepsilon_x), \tag{2}$$

wo $E$ der YOUNGsche Modul und $\sigma$ die POISSONsche Zahl des Plattenmaterials ist. Wir geben noch die LAMÉsche Gleichung, die $\tau_{xy}$ und $\gamma_{xy}$ verknüpft:

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\gamma_{xy}. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit $\Omega$ das von der Platte eingenommene Raumgebiet, mit $S$ und $S_1$ ihre obere und untere Grundfläche und mit $\Sigma$ ihre Seitenfläche. Wie es üblich ist, nehmen wir an, daß auf die obere Grundfläche $S$ eine Normalbelastung der Intensität $q(x, y)$ wirkt, während die untere Grundfläche $S_1$ frei von der Wirkung äußerer Kräfte ist. Die Wirkung der Volumenkräfte auf die Platte vernachlässigen wir. Wenn der Rand $\Sigma$ der Platte fest eingespannt ist, dann schließen wir in Übereinstimmung mit der Formel (16) des vorigen Paragraphen, daß das Problem der Plattenbiegung auf das Minimalproblem für das Funktional

$$\iiint\limits_{\Omega} W(\mathfrak{u})\, d\Omega - \iint\limits_{S} q u_z\, dS \tag{4}$$

bei entsprechenden Randbedingungen führt. Wir finden, daß *die Form* (4) *für das Minimalfunktional auch dann erhalten bleibt, wenn ein Teil des Randes oder der ganze Rand der Platte frei oder frei gestützt ist*; wir wollen uns im weiteren zur Vereinfachung der Untersuchungen auf den Fall beschränken, daß ein Teil des Randes der Platte fest eingespannt ist, während der andere Teil des Randes frei gestützt ist.

Wir vereinfachen das Funktional (4). Wir haben

$$W(\mathfrak{u}) = \tfrac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}).$$

Die Hypothese 4 erlaubt es, die letzten drei Summanden im Vergleich zu den ersten drei zu vernachlässigen; unter Verwendung der Formeln (1)—(3) erhält man

$$W(\mathfrak{u}) = \frac{E_z^2}{2(1-\sigma^2)}\left\{(\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}.$$

Daraus ergibt sich

$$\iiint\limits_{\Omega} W(\mathfrak{u})\,d\Omega = \iint\limits_{S} dS \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W(\mathfrak{u})\,dz$$

$$= \frac{D}{2}\iint\limits_{S}\left\{(\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\} dS; \qquad (5)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Für das weitere ist es wichtig, daß sich das Integral

$$\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS$$

in ein über den Rand des Gebietes $S$ erstreckendes Integral umformen läßt; diesen Rand bezeichnen wir mit $L$. Bei partieller Integration finden wir

$$\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dS = -\iint\limits_{S}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\,dS - \int\limits_{L}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dx,$$

$$\iint\limits_{S}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dS = -\iint\limits_{S}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\,dS + \int\limits_{L}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy.$$

Durch Subtraktion der letzten Gleichungen erhalten wir

$$\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS = -\int\limits_{L}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) ds; \qquad (6)$$

$ds$ ist das Differential des Bogens des Randes $L$.

Wir integrieren das Randintegral partiell. Da der Rand $L$ geschlossen ist und die Funktion $w$ und ihre Ableitungen offensichtlich eindeutig sind, so verschwindet das ausintegrierte Glied, und wir erhalten

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS = \int_L \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) ds.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt, daß

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS = \frac{1}{2}\int_L \left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] ds \qquad (6_1)$$

ist. Wir bemerken, daß

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS = 0 \qquad (6_2)$$

gilt, wenn die Funktion $w(x, y)$ auf dem Rand $L$ den Bedingungen (8) (siehe unten) genügt. Auf Grund der Hypothese 2 kann man im zweiten Integral in (4) $u_z = w(x, y)$ setzen. Bei Berücksichtigung der Formeln (5) und (6) erhalten wir für die potentielle Energie der gebogenen Platte den Ausdruck

$$\frac{D}{2}\iint_S \left[(\Delta w)^2 - \frac{2q}{D}w\right] dS - \frac{D(1-\sigma)}{2}\int_L \left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] ds. \qquad (7)$$

Wir klären jetzt, welchen Randbedingungen die Funktion $w$ unterworfen werden muß. Wenn die Seitenfläche der Platte fest eingespannt ist, dann ist auf dieser Fläche

$$u_x = u_y = u_z = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Formel (1) und der oben vermerkten Identität $u_z \equiv w$ findet man, daß die Bedingungen auf dem fest eingespannten Rand der Platte die Form

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

haben, was man durch zwei gleichwertige Bedingungen, nämlich

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \qquad (8)$$

ersetzen kann; diese Bedingungen müssen auf dem fest eingespannten Teil des Randes erfüllt sein; auf dem frei gestützten Teil des Randes $L$ hat die eine Randbedingung die Form

$$w = 0, \qquad (9)$$

die andere Randbedingung erhalten wir als die für das Funktional (7) natürliche Randbedingung. Wir bemerken noch, ohne ausführlich darauf einzugehen, daß man auf dem freien Teil des Randes zwei natürliche Randbedingungen erhält.

Wir leiten die Gleichgewichtsbedingung für die gebogene Platte her. Wir nehmen an, daß der Teil $L_1$ des Randes $L$ fest eingespannt ist und daß der verbleibende Teil $L_2$ frei gestützt ist. Dann ist auf dem ganzen Rand $L$ die Bedingung $w = 0$ erfüllt; außerdem ist $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ auf $L_1$.

Möge die Funktion $w(x, y)$ das Funktional (7) zum Minimum machen, dieses Funktional bezeichnen wir der Kürze halber mit $\Psi(w)$. Ferner sei $\eta$ eine hinreichend oft differenzierbare und den Bedingungen (8) und (9) genügende, aber im übrigen willkürliche Funktion und $t$ eine willkürliche reelle Zahl. Die Funktion $w + t\eta$ genügt ebenfalls den Bedingungen (8) und (9), deshalb ist

$$\Psi(w + t\eta) \geq \Psi(w).$$

Wenn man die Funktion $\eta(x, y)$ festhält, dann ist $\Psi(w + t\eta)$ eine Funktion von $t$, die, wie die letzte Ungleichung zeigt, ein Minimum bei $t = 0$ besitzt. Dann gilt jedoch notwendig

$$\frac{d}{dt} \Psi(w + t\eta)|_{t=0} = 0;$$

durch einfache Rechnungen läßt sich diese Gleichung in die Form

$$\iint_S \left(\Delta w \, \Delta\eta - \frac{q}{D}\eta\right) dS + \frac{1-\sigma}{2} \int_L \left\{\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right\} ds = 0$$

bringen. Weiter gilt nach der GREENschen Formel

$$\iint_S \Delta w \, \Delta\eta \, dS = \iint_S \eta \Delta^2 w \, dS + \int_L \left(\Delta w \frac{\partial\eta}{\partial\nu} - \eta \frac{\partial\Delta w}{\partial\nu}\right) ds$$
$$= \iint_S \eta\Delta^2 w \, dS + \int_L \Delta w \frac{\partial\eta}{\partial\nu} ds,$$

da $\eta|_L = 0$ ist. Schließlich erhalten wir

$$\iint_S \eta\left(\Delta^2 w - \frac{q}{D}\right) dS + \int_L \Delta w \frac{\partial\eta}{\partial\nu} ds + \frac{1-\sigma}{2} \int_L \left\{\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right\} ds = 0. \tag{10}$$

Das Randintegral in (10) braucht man nur über $L_2$ zu nehmen, da das Integral über $L_1$ infolge der Bedingung (8) verschwindet, nach der die Funktionen $w$ und $\eta$ beide verschwinden. Wenn der ganze Rand fest eingespannt ist, dann entfällt

das Randintegral in (10). Wir nehmen an, daß $\eta(x, y)$ die Bedingung (8) nicht nur auf $L_1$ erfüllt, sondern auch auf dem ganzen Rand $L$. Dann verschwindet das Randintegral in (10), und diese Beziehung ergibt

$$\int\int_S \eta\left(\Delta^2 w - \frac{q}{D}\right) dS = 0 .$$

Indem wir die Überlegungen des § 11 wiederholen, erhalten wir hieraus die bekannte Differentialgleichung für das Gleichgewicht der gebogenen Platte

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \tag{11}$$

die zuerst im Jahre 1815 von SOPHIE GERMAIN gewonnen wurde.

2. Wir befassen uns jetzt mit der zweiten Randbedingung auf dem frei gestützten Teil des Randes der gebogenen Platte. Infolge der Gleichung (11) verschwindet in (10) das Doppelintegral, während man das Randintegral nur über $L_2$ zu nehmen braucht, wie schon gesagt wurde. Die Gleichung (10) nimmt die Form

$$\int_{L_2} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \Delta w\, ds + \frac{1-\sigma}{2} \int_{L_2} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \right\} ds = 0 \tag{12}$$

an. In einem willkürlich gewählten Punkt der Kurve $L_2$ ziehen wir an diese die Tangente, die wir so richten, daß die Achsen $\nu$ und $s$ ebenso orientiert sind wie die $x$- und $y$-Achse (Abb. 11), mit $\vartheta$ bezeichnen wir den Winkel zwischen den Achsen $x$ und $s$. Wir setzen noch

$$\alpha = \cos\vartheta = \cos(s, x) = -\cos(\nu, y),$$
$$\beta = \sin\vartheta = \cos(s, y) = \cos(\nu, x).$$

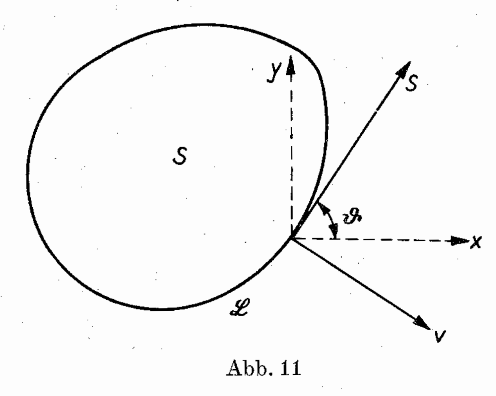


Abb. 11

Auf der Kurve $L_2$ verschwindet die Funktion $w$, deshalb wird auf dieser Kurve

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(s, x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(s, y) = 0 .$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(\nu, x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(\nu, y) .$$

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen nach $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ ergibt sich, daß auf $L_2$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \beta \frac{\partial w}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial w}{\partial \nu}$$

gilt.

Analog gilt auf $L_2$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \beta \frac{\partial \eta}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial \eta}{\partial \nu}.$$

Setzt man das in (12) ein und führt die Differentiation unter dem zweiten Integralzeichen aus, so erhält man

$$\int_{L_2} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \left\{ \Delta w + (1-\sigma) \frac{\partial w}{\partial \nu} \left( \beta \frac{d\alpha}{ds} - \alpha \frac{d\beta}{ds} \right) \right\} ds = 0.$$

Nun ist aber

$$\beta \frac{d\alpha}{ds} - \alpha \frac{d\beta}{ds} = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{\varrho},$$

wo $\varrho$ der Krümmungsradius der Kurve $L_2$ ist. Daraus folgt

$$\int_{L_2} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \left( \Delta w - \frac{1-\sigma}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) ds = 0.$$

Nutzt man die Willkür von $\dfrac{\partial \eta}{\partial \nu}$ auf $L_2$ aus und wendet die Überlegungen des § 11 auf den vorliegenden Fall an, so findet man die hier interessierende Randbedingung in der Form

$$\Delta w - \frac{1-\sigma}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf} \quad L_2. \tag{13}$$

Man kann zeigen, womit wir uns nicht aufhalten wollen, daß die Bedingung (13) gleichbedeutend mit der Bedingung verschwindender Biegemomente am frei gestützten Rand ist.

Auf analoge Weise, ausgehend vom Minimalprinzip für die potentielle Energie, kann man die Differentialgleichungen für das Gleichgewicht elastischer Schalen und die zugehörigen Randbedingungen erhalten.[1] Die Überlegungen komplizieren sich dabei natürlich. Das Minimalprinzip für die potentielle Energie kann auch einer Reihe anderer Näherungstheorien für elastische Zustände zugrunde gelegt werden.

Ohne uns mit der Herleitung aufzuhalten[2]), wenden wir uns der Randbedingung auf dem freien Rand der Platte zu. Wir führen die zweidimensionalen Vektoren

$$U = \left\{ w|_L ; \; -\frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_L \right\}, \quad U_\nu = \left\{ \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu}\bigg|_L ; \; \Delta w|_L \right\}$$

---

[1]) Siehe die Arbeit des Verfassers [17].

[2]) Siehe M. S. Birman [6].

in die Betrachtung ein. Ausgedrückt durch die Vektoren $U$ und $U_\nu$ nimmt die Bedingung auf dem freien Rand der Platte die Form

$$U_\nu - (1-\sigma)\begin{pmatrix} \frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}\frac{d}{ds}, & \frac{d^2}{ds^2} \\ \frac{d^2}{ds^2}, & -\frac{1}{\varrho} \end{pmatrix} U = 0$$

an.

3. Man kann beweisen, daß der in der Gleichung von SOPHIE GERMAIN auftretende Operator symmetrisch und positiv-definit auf der Menge der Funktionen ist, die auf $L_1$ den Bedingungen (8) für feste Einspannung, auf $L_2$ den Bedingungen (9) und (13) für freie Stützung genügen. Hier beschränken wir uns auf die beiden Fälle, daß der Rand $L$ der Platte entweder vollständig eingespannt oder vollständig frei gestützt ist.

Der Rand $L$ sei fest eingespannt. Um die Symmetrie des biharmonischen Operators in diesem Falle zu prüfen, nehmen wir an, daß die Funktionen $w_1(x, y)$ und $w_2(x, y)$ beide den Bedingungen (8) genügen. Nach Formel (10), § 2 ist

$$(\varDelta^2 w_1, w_2) = \int_S\int w_2 \varDelta^2 w_1 \, dS$$
$$= \int_S\int \varDelta w_2 \varDelta w_1 \, dS + \int_L \left(w_2 \frac{\partial \varDelta w_1}{\partial \nu} - \varDelta w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \nu}\right) ds.$$

Das Randintegral verschwindet infolge der Bedingungen (8), deshalb gilt

$$(\varDelta^2 w_1, w_2) = \int_S\int \varDelta w_2 \, \varDelta w_1 \, dS. \tag{14}$$

Da die rechte Seite der Formel (14) in $w_1$ und $w_2$ symmetrisch ist, ist $(\varDelta^2 w_1, w_2) = (w_1, \varDelta^2 w_2)$, d. h. der Operator $\varDelta^2$ ist auf der Menge der den Bedingungen (8) genügenden Funktionen symmetrisch. Wir setzen in (14) $w_1 = w_2 = w$. Das gibt

$$(\varDelta^2 w, w) = \int_S\int (\varDelta w)^2 \, dS. \tag{15}$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung $(6_2)$ mit 2 und vergleichen dann mit (15), so erhalten wir

$$(\varDelta^2 w, w) = \int_S\int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dS. \tag{16}$$

Wie wir schon festgestellt haben, ist die Bedingung (8) der folgenden gleichwertig:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{auf} \quad L.$$

In diesem Falle kann man auf die beiden ersten Ableitungen die Ungleichung von FRIEDRICHS (siehe § 22) anwenden:

$$\left.\begin{aligned}\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS &\le \frac{1}{\varkappa}\iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} dS,\\ \iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS &\le \frac{1}{\varkappa}\iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right\} dS.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die FRIEDRICHSsche Ungleichung kann man auf die Funktion $w$ selbst anwenden, da $w|_L = 0$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\iint_S w^2\, dS &\le \frac{1}{\varkappa}\iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS\\ &\le \frac{1}{\varkappa^2}\iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS\end{aligned}$$

oder

$$(\Delta^2 w, w) \ge \varkappa^2 \| w \|^2,$$

was die positive Definitheit des Operators $\Delta^2$ bedeutet. Daraus folgt, daß das Gleichgewichtsproblem für die fest eingespannte Platte eine (sogar eindeutige) Lösung besitzt, die man durch Anwendung der Verfahren des Kap. III konstruieren kann. Wenn insbesondere $w_n$, $n = 1, 2, \ldots$ eine beliebige Minimalfolge[1]) ist, dann konvergiert sie bezüglich der Energie gegen die exakte Lösung. Wir erläutern den Charakter der Konvergenz bezüglich der Energie für den gegebenen Fall genauer. Aus Formel (16) folgt, daß

$$|w|^2 = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS \tag{18}$$

gilt. Da die Folge der Funktionen $w_n$ bezüglich der Energie konvergiert, so ist

$$|w_n - w_m| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

oder ausführlicher

$$\iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

---

[1]) Sie sei etwa nach dem RITZschen Verfahren gebildet.

Hieraus folgt offensichtlich

$$\begin{aligned} &\iint_S \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right)^2 dS \underset{n,m\to\infty}{\to} 0, \\ &\iint_S \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dS \underset{n,m\to\infty}{\to} 0, \\ &\iint_S \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}\right)^2 dS \underset{n,m\to\infty}{\to} 0, \end{aligned} \tag{19}$$

d. h. die Folgen der zweiten Ableitungen der Näherungslösungen konvergieren im Mittel. Die Ungleichungen (17) besagen jetzt, daß die Folgen der ersten Ableitungen von $w_n$ sowie die Folge der $w_n$ selbst im Mittel konvergieren. Wir zeigen jetzt, daß *die Folge* $\{w_n\}$ *im abgeschlossenen Gebiet* $\overline{\Omega}$ *gleichmäßig*[1]) *konvergiert.*

Die Bedingung (8) ist nicht natürlich, wohl aber wesentlich, deshalb genügen die Funktionen $w_n$ dieser Bedingung notwendig. Wir wollen ferner annehmen, daß diese Funktionen stetig sind und stetige erste und zweite Ableitungen in $\overline{S} = S + L$ besitzen, das kann man immer erreichen. Wir schließen $S$ in ein Rechteck $R$ ein (Abb. 8) und definieren die Funktionen $w_n(x, y)$ in $R$, indem wir sie außerhalb von $S$ gleich Null setzen. Dann sind diese Funktionen einschließlich ihrer ersten Ableitungen in $R$ stetig. Wir wählen in $\overline{S}$ einen willkürlichen Punkt $(x, y)$ und berechnen das Integral

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u\,(\xi, \eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}\, d\xi\, d\eta, \quad u = w_n - w_m.$$

Ausführung der Integration ergibt

$$\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u\,(\xi, \eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}\, d\xi\, d\eta = u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0).$$

Die Punkte $(x, 0)$, $(0, y)$ und $(0, 0)$ liegen auf den Seiten des Rechtecks $R$, wo $u = 0$ und deshalb $u(x, 0) = u(0, y) = u(0,0) = 0$ ist, folglich wird

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\, d\xi\, d\eta.$$

---

[1]) Dieser Satz ist ein Spezialfall des sogenannten „Einbettungssatzes“ von S. L. Sobolew; siehe S. L. Sobolew [2].

Daraus ergibt sich

$$|u(x, y)| = \left|\int_0^x\int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta\right| \leq \int_S \left|\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right| d\xi\,d\eta$$

oder, da $u \equiv 0$ außerhalb von $S$ ist,

$$|u(x, y)| \leq \int_S \left|\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right| d\xi\,d\eta.$$

Jetzt wird nach der Ungleichung von Bunjakowski

$$u^2(x, y) \leq |S| \int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 dS,$$

wo mit $|S|$ der Inhalt des Gebietes $S$ bezeichnet wurde. Nun ist aber $u = w_n - w_m$ deshalb ist

$$|w_n(x, y) - w_m(x, y)| \leq \sqrt{|S|}\left\{\int_S \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2 w_m}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 dS\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen der Ungleichung (19) strebt der Ausdruck auf der rechten Seite für $m, n \to \infty$ gegen Null. Nach der Definition (Smirnow [1], Punkt 144) konvergiert die Folge $w_n$, $n = 1, 2, \ldots$ gleichmäßig gegen $\overline{S}$.

4. Wir nehmen jetzt an, daß der Rand $L$ frei gestützt ist, so daß die Ausbiegung der Platte den Bedingungen (9) und (13) genügt. Wir betrachten den Operator $\Delta^2$, der auf einer den genannten Bedingungen genügenden Menge von Funktionen definiert sei und zeigen, daß dieser Operator symmetrisch und positiv-definit ist.

Mögen $w_1(x, y)$ und $w_2(x, y)$ den Bedingungen (9) und (13) genügen, so daß auf $L$

$$w_1 = w_2 = 0, \quad \Delta w_1 - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial w_1}{\partial\nu} = \Delta w_2 - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial w_2}{\partial\nu} = 0$$

gilt. Dann gilt, wie schon unter Punkt 3 des vorliegenden Paragraphen

$$(\Delta^2 w_1, w_2) = \int_S\int w_2 \Delta^2 w_1\,dS = \int_S\int \Delta w_2\,\Delta w_1\,dS + \int_L \left(w_2\frac{\partial\Delta w_1}{\partial\nu} - \Delta\,\omega_1\frac{\partial w_2}{\partial\nu}\right) ds,$$

was infolge der Randbedingungen die Form

$$(\Delta^2 w_1, w_2) = \int_S\int \Delta w_2\,\Delta w_1\,dS - (1-\sigma)\int_L \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w_1}{\partial\nu}\frac{\partial w_2}{\partial\nu}\,ds \tag{20}$$

annimmt. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man von dem Skalarprodukt $(\Delta^2 w_2, w_1)$ ausgeht. Daraus ergibt sich $(\Delta^2 w_1, w_2) = (\Delta^2 w_2, w_1)$, d. h. der betrachtete Operator ist symmetrisch. Um seine positive Definitheit festzustellen, verfahren wir folgendermaßen:

a) Wir führen die Überlegungen des Punktes 2 in umgekehrter Reihenfolge aus, indem wir $\eta$ durch $w_1$ und $w$ durch $w_2$ ersetzen. Dann finden wir

$$\int_L \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \frac{\partial w_2}{\partial \nu} ds = -\frac{1}{2} \int_L \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) - \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right\} ds.$$

Wir setzen dies in (20) ein und setzen dort $w_1 = w_2 = w$. Das führt uns auf die Gleichung

$$(\Delta^2 w, w) = \iint_S (\Delta w)^2 dS + (1 - \sigma) \int_L \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} ds$$

oder, wenn man Formel $(6_1)$ benutzt,

$$(\Delta^2 w, w) = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right\} dS. \quad (21)$$

Es ist von Interesse, zu bemerken, daß das Integral in (21) sich nur durch den konstanten Faktor $\frac{D}{2}$ von dem Ausdruck [Formel (5)]

$$\iiint_\Omega W(\mathfrak{u}) \, d\Omega$$

unterscheidet, der gleich der potentiellen Deformationsenergie der Platte ist.

b) Es gilt die Identität

$$\xi^2 + 2\sigma\xi\eta + \eta^2 - (1 - \sigma)(\xi^2 + \eta^2) = \sigma(\xi + \eta)^2.$$

Unter der Annahme $\sigma \geq 0$ ergibt sich daraus

$$\xi^2 + 2\sigma\xi\eta = \eta^2 \geq (1 - \sigma)(\xi^2 + \eta^2).$$

Mit der Substitution $\xi = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\eta = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ erhalten wir aus (21) die Ungleichung[1])

$$(\Delta^2 w, w) \geq (1 - \sigma) \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} dS. \quad (22)$$

---

[1]) Wenn $\sigma < 0$ wäre, dann erhielten wir eine analoge Ungleichung mit dem Faktor $1 + \sigma$ statt $1 - \sigma$.

c) Auf die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial x}$ wenden wir die POINCARÉsche Ungleichung [Formel (24), § 22] an, die in diesem Falle

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS \le A \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dS + B \left(\iint_S \frac{\partial w}{\partial x}\, dS\right)^2 \tag{23}$$

ergibt. Nach der Formel von OSTROGRADSKI ist

$$\iint_S \frac{\partial w}{\partial x}\, dS = \int_L w \cos(\nu, x)\, ds = 0, \tag{24}$$

und die Ungleichung (23) nimmt die Form

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS \le A \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dS$$

an. Analog findet man

$$\iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS \le A \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS.$$

Durch Addition der letzten Ungleichung erhält man

$$\iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS \le A \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS.$$

Vergleich mit der Ungleichung (22) ergibt

$$(\Delta^2 w, w) \ge \frac{1-\sigma}{A} \iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS. \tag{25}$$

Die Bedingung (9) erlaubt es, auf die Funktion $w$ die FRIEDRICHSsche Ungleichung anzuwenden:

$$\iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS \ge \varkappa \iint_S w^2\, dS = \varkappa \|w\|^2.$$

Wenn wir das in (25) einsetzen, kommen wir zu der Ungleichung

$$(\Delta^2 w, w) \ge \gamma^2 \|w\|^2, \quad \gamma^2 = \frac{(1-\sigma)\varkappa}{A}, \tag{26}$$

die besagt, daß der betrachtete Operator positiv-definit ist.

Wir überlassen dem Leser die Formulierung der sich hieraus ergebenden Folgerungen. Wir bemerken nur, daß man auch in diesem Falle die gleichmäßige Konvergenz der Minimalfolgen beweisen kann, wenn man den oben erwähnten Einbettungssatz von S. L. Sobolew benutzt. Doch führt dieser Beweis über den Rahmen dieses Buches hinaus.

5. Auf eine ähnliche Aufgabe wie das Variationsproblem für die am Rand fest eingespannte Platte führt das ebene Problem der Elastizitätstheorie bei gegebenen äußeren Kräften in dem Fall, daß das von dem elastischen Medium eingenommene Gebiet endlich und einfach zusammenhängend ist. In diesem Falle kann man das Problem bekanntlich auf die Integration der biharmonischen Gleichung

$$\Delta^2 u = 0 \tag{27}$$

bei den Randbedingungen

$$u\Big|_L = f_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_L = f_2(s) \tag{28}$$

zurückführen, wo $f_1(s)$ und $f_2(s)$ bekannte Funktionen sind. Wenn $\psi(x, y)$ eine willkürliche viermal stetig differenzierbare Funktion ist, die den Bedingungen (28) genügt, dann findet man mit Hilfe der Substitution $u - \psi = w$, daß $w$ den Randbedingungen (8) und der Gleichung (11) genügt, in der $\frac{q}{D} = -\Delta^2\psi$ ist. Die Funktion $w$ kann man finden, indem man das Minimalproblem für das Funktional

$$F(w) = (\Delta^2 w, w) + 2(\Delta^2\psi, w)$$

löst. Wir setzen hier $w = u - \psi$ und finden leicht, daß

$$F(w) = \Phi(u) + \Phi(\psi) - 2\iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) dS + 2\iint\limits_S u\Delta^2\psi\, dS - 2\iint\limits_S \psi\Delta\psi\, dS \tag{29}$$

gilt, wobei wir zur Abkürzung

$$\Phi(u) = \iint\limits_S \left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS$$

gesetzt haben. Wir bemerken, daß auf der rechten Seite der Beziehung (29) das zweite und das fünfte Glied konstant sind. Das dritte Glied integrieren wir zweimal partiell. Aus Formel (28) folgt, daß $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_L$ und $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_L$ bekannt sind, deshalb sind die Randintegrale, die sich bei der partiellen Integration ergeben, bekannte Konstanten. Wenn wir das berücksichtigen, erhalten wir

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) dS = \iint\limits_S u\,\Delta^2\psi\, dS + \text{const.}$$

Setzen wir das in (29) ein, so finden wir, daß

$$F(w) = \Phi(u) + \text{const}$$

gilt. Demnach führt das ebene Problem der Elastizitätstheorie bei den oben erwähnten Bedingungen auf das Minimalproblem für das Funktional $\Phi(u)$, das Minimum ist auf der Menge der Funktionen $u(x, y)$ zu bestimmen, die zusammen mit ihren Normalableitungen die vorgegebenen Werte (28) annehmen. Bei der Bestimmung des Minimums kann man $\Phi(u)$ durch das einfache Funktional

$$\Phi_0(u) = \iint\limits_S (\varDelta u)^2 \, dS$$

ersetzen. Nach Formel (6) ist nämlich

$$\Phi_0(u) - \Phi(u) = 2 \int\limits_L \frac{\partial u}{\partial x} \, d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

was infolge der Randbedingungen (28) eine bekannte Konstante ist.

## § 28. Biegung dünner Platten, auf die sowohl Normalkräfte wirken als auch Kräfte in der Mittelfläche

Eine Platte möge unter der gleichzeitigen Wirkung der Normalbelastung $g(x, y)$ und der in der Mittelfläche der Platte wirkenden Spannung $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ stehen. Wir wollen annehmen, daß keine Volumenkräfte vorhanden sind. Dann sind $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ durch die homogenen Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 \tag{*}$$

miteinander verknüpft. Wenn die Ausbiegung der Platte klein ist, dann kann man näherungsweise annehmen, daß die Ausbiegung der bekannten Gleichung[1])

$$\varDelta^2 w - \frac{h}{D}\left[T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = \frac{q}{D} \tag{1}$$

genügt; wie schon im vorigen Paragraphen, bedeutet $h$ hier die Dicke der Platte und $D$ ihre Steifheit. Ebenso wie schon in § 27 haben die Randbedingungen auf dem fest eingespannten Teil des Randes die Form

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \tag{2}$$

und auf dem frei gestützten Teil des Randes die Form

$$w = 0, \quad \varDelta w - \frac{1 - \sigma}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Siehe etwa P. F. Papkowitsch [1], S. 522, oder S. P. Timoschenko [2], S. 289.

Wir zeigen, daß der Operator auf der linken Seite der Gleichung (1) auf jeder der Mengen symmetrisch ist, deren Funktionen entweder den Bedingungen (2) oder den Bedingungen (3) genügen.[1]) Die Symmetrie des biharmonischen Operators wurde in § 27 festgestellt; um unsere Behauptung zu beweisen, genügt es, sich zu überzeugen, daß der Operator

$$T w = T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{4}$$

auf der Menge der Funktionen symmetrisch ist, die der Randbedingung

$$w \,|_L = 0 \tag{5}$$

genügen, die in den beiden oben genannten Fällen erfüllt ist. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß der Operator $T$ unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen (*) in die Form

$$T w = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

gebracht werden kann. Wir bilden jetzt das Skalarprodukt $(T w_1, w_2)$ und beachten dabei, daß die Funktionen $w_1$ und $w_2$ beide der Randbedingung (5) genügen. Wir integrieren partiell und beachten, daß das Randintegral der genannten Randbedingungen wegen verschwindet. Wir finden

$$(T w_1, w_2) = \iint_S w^2 \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial w_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{xy} \frac{\partial w_1}{\partial x} + T_y \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\right] dS$$

$$= -\iint_S \left[T_x \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} + T_{xy}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) + T_y \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y}\right] dS. \tag{6}$$

Da im letzten Integral $w_1$ und $w_2$ symmetrisch auftreten, so erhält man offensichtlich dasselbe Ergebnis, wenn man vom Skalarprodukt $(w_1, T w_2)$ ausgeht. Daraus folgt $(T w_1, w_2) = (w_1, T w_2)$, was zu beweisen war.

**Satz 1.** *Wenn die Spannungen $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind, dann ist der Operator auf der linken Seite der Gleichung* (1) *positiv-definit auf jeder der Mengen der Funktionen, die auf dem ganzen Rand entweder den Bedingungen* (2) *oder den Bedingungen* (3) *genügen.*

Wir bilden das Skalarprodukt

$$\left(\Delta^2 w - \frac{h}{D} T w, w\right) = (\Delta^2 w, w) - \frac{h}{D} (T w, w). \tag{7}$$

[1]) Auf diesen Umstand machte S. M. Birman den Verfasser aufmerksam.

Wenn der ganze Rand der Platte fest eingespannt ist [Bedingung (2)], dann gilt nach den Formeln (16) und (18) des § 27

$$(\Delta^2 w, w) \geq \varkappa \int_S\int \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS,$$

wenn hingegen der ganze Rand frei gestützt ist [Bedingung (3)], dann gilt nach Formel (25) des § 27

$$(\Delta^2 w, w) \geq \frac{1-\sigma}{A} \int_S\int \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS.$$

Wir bezeichnen mit $C$ die Größe $\varkappa$ im Falle des fest eingespannten Randes und die Größe $\frac{1-\sigma}{A}$ im Falle des frei gestützten Randes; in beiden Fällen haben wir

$$(\Delta^2 w, w) \geq C \int_S\int \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS. \tag{8}$$

Wir schätzen jetzt die Größe $(Tw, w)$ ab. In Formel (6) setzen wir $w_1 = w_2 = w$. Wir erhalten dann

$$(Tw, w) = -\int_S\int \left[T_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS. \tag{9}$$

$N$ sei das größte der Maxima der Größen $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$, so daß

$$|T_x| \leq N, \quad |T_{xy}| \leq N, \quad T_y \leq N$$

ist. Dann gilt

$$(Tw, w)| \leq N \int_S\int \left\{\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|\right\}^2 dS$$

oder, unter Beachtung der Ungleichung $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

$$|(Tw, w)| \leq 2N \int_S\int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS.^{1)} \tag{10}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (8) und (10) erhalten wir aus der Formel (7)

$$\left(\Delta^2 w - \frac{h}{D}\, Tw, w\right) \geq \left(C - \frac{2Nh}{D}\right) \int_S\int \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS. \tag{11}$$

---

[1]) Die Ungleichung (10) behält ihre Gültigkeit, wenn man unter $2N$ das Maximum der Hauptnormalspannungen versteht, die in der Plattenebene wirken.

Da $w|_L = 0$ ist, gilt die FRIEDRICHSsche Ungleichung

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS \geq \varkappa \, \| w \|^2 .$$

Die Spannungen $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ seien so klein, daß

$$N < \frac{CD}{2h} \tag{12}$$

gilt. Dann ist die rechte Seite der Ungleichung (11) positiv, und wir verstärken die Ungleichung, wenn wir das Integral rechts durch $\varkappa \, \| w \|^2$ ersetzen. Jetzt ist

$$\left( \Delta^2 w - \frac{h}{D} \, T w, w \right) \geq \left( C - \frac{2Nh}{D} \right) \varkappa \, \| w \|^2 , \tag{13}$$

und Satz 1 ist richtig, wenn das Maximum der Spannungen der Ungleichung (12) genügt.

Aus dem eben bewiesenen Satz und aus den Ergebnissen des § 27 des Kapitels III, sowie aus den §§ 11, 19, 12—15 ergibt sich folgender Schluß:

*Eine Platte stehe unter der gleichzeitigen Wirkung einer Normalbelastung* $q(x, y)$ *und der in der Mittelfläche der Platte wirkenden Spannungen* $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$. *Ferner sei der ganze Rand der Platte entweder fest eingespannt oder frei gestützt. Wenn das Maximum der Spannungen* $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ *der Ungleichung* (12) *genügt, dann hat das Gleichgewichtsproblem eine Lösung*[1]), *und zwar eine eindeutige, die man als die Funktion erhalten kann, die das Funktional*

$$F(w) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right. ,$$

$$\left. + \frac{h}{D} \left[ T_x \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2 T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{2q}{D} w \right\} dS \tag{14}$$

*zum Minimum macht.* Wenn der Rand der Platte fest eingespannt ist, dann kann man das Funktional (14) vereinfachen und auf eine beliebige der beiden Formen

$$F(w) = \iint_S \left\{ (\Delta w)^2 + \frac{h}{D} \left[ T_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2 T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \right.$$

$$\left. \left. + T_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{2q}{D} w \right\} dS; \tag{15$_1$}$$

$$F(w) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{h}{D} \left[ T_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2 T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{2q}{D} w \right\} dS \tag{15$_2$}$$

---

[1]) Wie in § 38 gezeigt wird, braucht das Problem im allgemeinen keine Lösung zu haben.

überführen.[1]) Die Lösung des Minimalproblems für das Funktional $F(w)$ kann man als Grenzwert einer Minimalfolge erhalten, insbesondere als Folge der Näherungslösungen nach dem RITZschen Verfahren, aber auch in Form einer Orthogonalreihe (§ 12). Wenn $w_n$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Minimalfolge und $w$ die exakte Lösung ist, dann gilt $w_n \to w$ gleichmäßig in $\bar{S} = S + L$, während die ersten und die zweiten Ableitungen von $w_n$ im Mittel gegen die entsprechenden Ableitungen von $w$ konvergieren.

Gestützt auf den oben mehrfach erwähnten „Einbettungssatz" kann man beweisen, daß der Operator $\Delta^2 - \frac{h}{D} T$ positiv-definit ist, wenn eine Bedingung der Form (12) erfüllt ist, auch in dem Falle, daß der Rand der Platte zum Teil fest eingespannt, zum Teil frei gestützt ist, und auch bei einigen anderen Einspannungsbedingungen.

Wir vermerken den einfachen und wichtigen Fall, daß der Operator $\Delta^2 - \frac{h}{D} T$ positiv-definit ist, und alle eben erst aufgezählten Schlüsse gelten mit der Ausnahme, daß die Ungleichung (12) nicht erfüllt zu sein braucht. Dies ist dann der Fall, wenn in einem beliebigen Punkt der Platte die *Spannungen* $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ *in den beiden Hauptrichtungen Zugkräfte sind*. Wie früher setzen wir voraus, daß der Rand der Platte entweder ganz eingespannt oder ganz frei gestützt ist. Um unsere Behauptung zu beweisen, genügt die Feststellung, daß $(-Tw, w) \geq 0$ ist, sofern $w|_L = 0$ ist.

Zuerst bemerken wir, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen in (9) invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems ist; davon kann man sich durch eine einfache, wenn auch etwas langwierige, Umformung überzeugen. Dies beachtend, wählen wir einen willkürlichen Punkt in $S$ und richten die Koordinatenachsen so, daß sie in dem gewählten Punkt mit den Hauptachsen der Spannungen $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ zusammenfallen. Dann hat der Integrand in (9) die Form

$$T_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + T_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2,$$

wo $x_1$, $x_2$ die Hauptspannungsrichtungen und $T_1$, $T_2$ die Hauptnormalspannungen sind. Nach Voraussetzung sind die Spannungen $T_1$, $T_2$ Zugspannungen und demzufolge positiv; daraus ergibt sich, daß in dem gewählten Punkt des Gebietes $S$ der Integrand in (9) nicht negativ ist; da der Punkt willkürlich gewählt war, ist die genannte Funktion im ganzen Gebiet $S$ nicht negativ. Daraus folgt, daß

$$(-Tw, w) \geq 0$$

und

$$\left(\Delta^2 w - \frac{h}{D} Tw, w\right) \geq (\Delta^2 w, w) \geq C \, \|w\|^2$$

gilt, was zu beweisen war.

---

[1]) Die Identität der Funktionale (14), ($15_1$) und ($15_2$) im Falle des fest eingespannten Randes folgt aus den Formeln ($6_2$) des § 27.

KAPITEL V

# EIGENWERTPROBLEME

## § 29. Die Eigenwertprobleme; ihr Zusammenhang mit Eigenschwingungs- und Stabilitätsproblemen

In der mathematischen Physik spielen die Begriffe des *Eigenwertes* und der *Eigenfunktion* einer Gleichung eine wichtige Rolle. Es sei die Gleichung

$$Au - \lambda Bu = 0 \tag{1}$$

gegeben, wo $A$ und $B$ gewisse lineare Operatoren sind und $\lambda$ ein Zahlenfaktor ist. Infolge der Eigenschaften linearer Operatoren (vgl. § 4) gilt $A0 = 0$ und $B0 = 0$; daraus folgt, daß die Funktion $u \equiv 0$ der Gleichung (1) genügt und zwar für jeden beliebigen Faktor $\lambda$. Die Funktion $u \equiv 0$ bezeichnet man als *triviale Lösung* der Gleichung (1). Wir stellen jetzt die Aufgabe, diejenigen Werte des Parameters $\lambda$ zu finden, bei welchen die Gleichung (1) eine nicht identisch verschwindende Lösung hat. Wenn solche Werte von $\lambda$ existieren, dann nennen wir sie *Eigenwert* der Gleichung (1), während die ihnen entsprechenden nichttrivialen Lösungen[1] dieser Gleichung als *Eigenfunktionen* dieser Gleichung bezeichnet werden. Wenn also eine Zahl $\lambda_0$ und eine Funktion $u_0(P)$ gegeben sind, und wenn $u_0(P) \not\equiv 0$ und

$$Au_0 - \lambda_0 Bu_0 = 0$$

gilt, dann ist $\lambda_0$ ein Eigenwert der Gleichung (1), und $u_0(P)$ eine ihrer Eigenfunktionen. Man sagt, daß die Eigenfunktion $u_0(P)$ dem Eigenwert $\lambda_0$ *entspricht* oder *zu ihm gehört.*

Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall, daß $B$ der identische Operator ist: $Bu \equiv u$. In diesem Falle nimmt die Gleichung (1) die Form

$$Au - \lambda u = 0 \tag{2}$$

an. Die Eigenfunktionen und Eigenwerte der Gleichung (2) heißen auch *Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators $A$*. Die Gesamtheit aller Eigenwerte eines Operators heißt sein *Eigenspektrum.*

**Beispiel.** Es sei $Au = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$, $0 < x < l$, wobei die Funktionen aus dem Definitionsbereich des Operators $A$ der Randbedingung

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{3}$$

unterworfen seien. Eigenwerte des Operators $A$ sind im gegebenen Falle diejenigen Werte von $\lambda$, für welche die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \tag{4}$$

---

[1]) Das heißt nicht identisch verschwindende Lösungen.

eine Lösung hat, welche den Bedingungen (3) genügt und die nicht identisch gleich Null ist; eine solche Lösung ist eine Eigenfunktion unseres Operators. Im vorliegenden Beispiel ist es nicht schwer, die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators zu finden. Die Eigenfunktionen genügen der Differentialgleichung (4), deren allgemeines Integral die Form

$$u(x) = C \sin \sqrt{\lambda} x + C_1 \cos \sqrt{\lambda} x$$

hat. Aus der Bedingung $u(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$ und $u(x) = C \sin \sqrt{\lambda} x$; die Bedingung $u(l) = 0$ ergibt $C \sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Wenn $C = 0$ ist, ist $u \equiv 0$, und wir erhalten keine Eigenfunktion, weshalb notwendig

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

gilt, woraus man leicht die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

und die ihnen entsprechenden Eigenfunktionen

$$u_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

erhält; die Werte $C_n$ sind von Null verschieden, aber sonst willkürlich, insbesondere können sie für verschiedene $n$ verschieden sein.

Wenn $u(P)$ eine Eigenfunktion der Gleichung (1) ist und $C$ eine beliebige nicht verschwindende Konstante, dann ist $C u(P)$ ebenfalls eine Eigenfunktion; allgemein gilt: Wenn $u_1(P)$, $u_2(P)$, ..., $u_k(P)$ Eigenfunktionen der Gleichung (1) sind, dann ist ihre Linearkombination

$$C_1 u_1(P) + C_2 u_2(P) + \cdots + C_k u_k(P)$$

eine Eigenfunktion derselben Gleichung[1]), und zwar für beliebige Konstanten $C_1$, $C_2$, ..., $C_k$. Dafür genügt es, wenn die dem gegebenen Eigenwert entsprechenden Eigenfunktionen linear unabhängig sind.

Die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen, die zu einem gegebenen Eigenwert gehören, heißt der *Rang* des Eigenwertes. Der Rang eines Eigenwertes kann auch unendlich sein.

Auf das Aufsuchen von Eigenwerten und Eigenfunktionen führt gewöhnlich das Problem der Eigenschwingungen mechanischer Systeme. Wir betrachten als Beispiel eine homogene gespannte Saite der Länge $l$, welche im Gleichgewichtszustand das Intervall $0 \leq x \leq l$ der $x$-Achse einnimmt. Die Querschwingungen dieser Saite genügen der Gleichung (Smirnow [2], Punkt 163)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \qquad a = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}. \tag{5}$$

[1]) Wenn diese Kombination nicht identisch verschwindet.

Hier ist $U(x, t)$ die Auslenkung der Saite aus der Gleichgewichtslage im Punkte $x$ und zur Zeit $t$, $T$ ist die Spannung der Saite und $\varrho$ ihre Masse pro Längeneinheit; es wird vorausgesetzt, daß auf die Saite keinerlei äußere Kräfte wirken, so daß die Schwingungen nur von dem der Saite erteilten Anfangsimpuls bzw. der Anfangsauslenkung abhängen. Wenn die Enden der Saite fest eingespannt sind, dann ist

$$U(0, t) = U(l, t) = 0. \tag{6}$$

Als Eigenschwingungen der Saite bezeichnet man Schwingungen, bei denen die Auslenkung $U(x, t)$ die Form

$$U(x, t) = u(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \omega t, \qquad \omega = \text{const}$$

hat. Setzt man das in (5) und (6) ein, so zeigt sich, daß $u(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0; \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\omega^2 \varrho}{T}$$

und der Randbedingung

$$u(0) = u(l) = 0$$

genügt. Dem Sinn der Aufgabe entsprechend ist $u(x) \not\equiv 0$, andernfalls fände gar keine Schwingung der Saite statt, und das Problem der Eigenschwingungen der Saite führt auf die von uns schon behandelte Aufgabe, Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $-\frac{d^2}{dx^2}$ bei den Randbedingungen (3) zu ermitteln. Die Eigenschwingungen der Saite werden bis auf einen konstanten Faktor durch die Formel

$$U_n(x, t) = \sin \frac{\pi n x}{l} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \frac{a \pi n t}{l}$$

bestimmt. Wenn die Saite inhomogen ist, dann ist $\varrho = \varrho(x)$ eine Funktion von $x$. In diesem Falle führt das Problem der Eigenschwingungen der Saite wiederum zu den Randbedingungen (3) und zu der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda \varrho(x)\, u = 0, \tag{7}$$

doch ist jetzt $\lambda = \frac{\omega^2}{T}$. Die Gleichung (7) ist ein Sonderfall der Gleichung (2), in welcher $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ ist und $B$ der Operator der Multiplikation mit der Funktion $\varrho(x)$; beide Operatoren sind für die Funktionen definiert, die an den Endpunkten der Saite verschwinden.

Wir betrachten noch die Eigenschwingungen einer Membran. Wenn die Membran nicht unter der Wirkung äußerer Kräfte steht, dann hat die Gleichung ihrer Querschwingungen die Form (SMIRNOW [2], Punkt 176)

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Die Membran möge im Gleichgewichtszustand das Gebiet $\Omega$ der $xy$-Ebene einnehmen, das von dem Rand $S$ begrenzt werde. Wenn der Rand der Membran fest eingespannt ist, dann gilt

$$U|_S = 0. \tag{9}$$

Die Eigenschwingungen der Membran haben die Form

$$U(x, y, t) = u(x, y) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \omega t;$$

ihre Bestimmung führt auf die Integration der Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{10}$$

im Gebiet $\Omega$ und bei der Randbedingung

$$u|_S = 0. \tag{11}$$

Da notwendig $u(x, y) \not\equiv 0$ ist, führt unser Problem auf die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $-\Delta$ bei der Randbedingung (11). Dieses Problem ist bedeutend schwieriger als das analoge Problem für die Saite, in manchen Fällen ist es jedoch verhältnismäßig einfach, eine Lösung zu erhalten; solche Fälle sind zum Beispiel die der rechteckigen und der kreisförmigen Membran (SMIRNOW [2], Punkt 177 und Punkt 178).

Es ist noch eine weitere Klasse von Aufgaben bekannt, die ebenfalls auf Eigenwert- und Eigenfunktionsprobleme führen. Das sind die Stabilitätsprobleme mechanischer Systeme. Wir wollen diese Probleme nicht in voller Allgemeinheit formulieren, sondern erläutern sie an einem Beispiel. Wir betrachten die Biegung einer dünnen Platte, auf welche Kräfte wirken, die in ihrer Mittelebene gelegen sind und einem Parameter $\lambda$ proportional sind; diese Kräfte mögen die Komponenten $\lambda T_x$, $\lambda T_{xy}$, $\lambda T_y$ haben. Normalbelastungen mögen fehlen und der Rand der Platte sei definitionsgemäß fest eingespannt. Die Ausbiegung der Platte wird bestimmt (siehe § 28) durch die homogene [da $q(x, y) \equiv 0$ ist] Differentialgleichung

$$\Delta^2 w - \frac{\lambda h}{D}\left[T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{12}$$

und die ebenfalls homogenen Randbedingungen

$$w|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0. \tag{13}$$

Das System der Gleichungen (12) und (13) hat die triviale Lösung $\omega \equiv 0$; ihr Vorhandensein bedeutet, daß die nicht ausgebogene Platte eine mögliche Gleichgewichtslage ist. Wenn $\lambda$ hinreichend klein ist, nämlich [siehe Formel (12), § 28] wenn

$$|\lambda| < \frac{CD}{2Nh} \tag{14}$$

gilt, wo $N$ das größte der Maxima der Spannungen $T_x$, $T_{xy}$, $T_y$ ist, dann ist die triviale Lösung die einzige und demnach die ungebogene Form die einzige Gleichgewichtslage; dabei ist offensichtlich, daß eine hinreichend kleine Änderung von $\lambda$ die Ungleichung (14) nicht beeinträchtigt und demzufolge auch die nicht ausgebogene ebene Gleichgewichtslage nicht beeinträchtigt, die sich als *stabil* in bezug auf eine kleine Veränderung des Parameters $\lambda$ erweist. Wenn $\lambda$ der Ungleichung (14) jedoch nicht genügt, dann ist es nicht ausgeschlossen, daß für gewisse Werte von $\lambda$, die als *kritische* bezeichnet werden, die Gleichung (12) eine nichttriviale Lösung hat, die den Randbedingungen (13) genügt. In diesem Falle ist außer der ebenen auch eine gebogene Gleichgewichtslage möglich; bei Werten von $\lambda$, die nahe bei den kritischen liegen, wird die ebene Gleichgewichtslage instabil. Im Zusammenhang damit ist die Bestimmung der kritischen Werte des Parameters (besonders des kleinsten kritischen Wertes) von Wichtigkeit, was seinerseits auf die Bestimmung der Eigenwerte der Gleichung (12) bei den Randbedingungen (13) führt.

Im allgemeinen führt ein Stabilitätsproblem auf ein Eigenwertproblem für eine lineare Gleichung, ausgehend von den nichtlinearen Gleichungen des gegebenen Problems. Die strenge mathematische Begründung dieses Verfahrens wurde in den Arbeiten von M. A. Krasnoselski [2, 3] gegeben. Für elastische Systeme werden in dem Buch von W. W. Nowoshilow [1] solche Stabilitätsprobleme ausführlich behandelt, welche, ausgehend von den nichtlinearen Gleichungen der Elastizitätstheorie, auf ein Eigenwertproblem für eine gewisse nichtlineare Gleichung (oder ein System von Gleichungen) führen.

## § 30. Eigenwerte und Eigenfunktionen symmetrischer Operatoren

Bei Anwendungen zeigt sich, daß die Untersuchung der Eigenwerte und Eigenfunktionen symmetrischer Operatoren besonders wichtig ist; einige einfache und wichtige Eigenschaften werden im vorliegenden Paragraphen hergeleitet.

**Satz 1.** *Die Eigenwerte eines symmetrischen Operators sind reelle Zahlen.*

Es sei $\lambda_0$ ein Eigenwert und $\varphi_0(P)$ eine zugehörige Eigenfunktion des symmetrischen Operators $A$.

Dann gilt identisch $$A\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0.$$

Die Funktion $\varphi_0$ sei reell, dann multiplizieren wir diese Identität skalar mit $\varphi_0$ und dividieren durch die positive Größe $(\varphi_0, \varphi_0) = \|\varphi_0\|^2$; wir erhalten

$$\lambda_0 = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2}, \tag{1}$$

und es ist offensichtlich, daß die Zahl $\lambda_0$ reell ist.

Jetzt sei $\varphi_0(P)$ komplex, $\varphi_0(P) = \psi(P) + i\,\omega(P)$, wo $\psi(P)$ und $\omega(P)$ reell sind. Dann gilt

$$A(\psi + i\,\omega) = \lambda_0(\psi(P) + i\,\omega(P)) \tag{2}$$

oder

$$A\,\psi + i\,A\,\omega = \lambda_0(\psi(P) + i\,\omega(P)).$$

Die letzte Gleichung multiplizieren (im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes) wir mit $\psi(P) - i\,\omega(P)$ und integrieren dann über das gegebene Gebiet $\Omega$. Das führt uns auf die Gleichung

$$\int_\Omega [\psi \cdot A\,\psi + \omega \cdot A\,\omega + i(\psi \cdot A\,\omega - \omega \cdot A\,\psi)]\,d\Omega = \lambda_0 \int_\Omega [\psi^2(P) + \omega^2(P)]\,d\Omega,$$

der man auch die folgende Form geben kann:

$$(A\,\psi, \psi) + (A\,\omega, \omega) + i[(A\,\omega, \psi) - (\omega, A\,\psi)] = \lambda_0(\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2).$$

Da der Operator $A$ symmetrisch ist, gilt

$$(A\,\omega, \psi) = (\omega, A\,\psi),$$

und die linke Seite der letzten Gleichung ist reell. Weiter ist $\varphi_0(P) \not\equiv 0$. Daraus folgt $\psi^2(P) + \omega^2(P) = |\varphi_0(P)|^2 \not\equiv 0$ und demnach gilt

$$\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2 = \int_\Omega |\varphi_0(P)|^2\,d\Omega > 0.$$

Jetzt wird

$$\lambda_0 = \frac{(A\,\psi, \psi) + (A\,\omega, \omega)}{\|\psi\|^2 + \|\omega\|^2},$$

und es ist klar, daß $\lambda_0$ eine reelle Zahl ist.

Wir bemerken, daß man die Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators als reell ansehen kann. Wenn nämlich $\varphi_0(P) = \psi(P) + i\,\omega(P)$ ist, dann erhält man durch Aufspaltung von (2) in Real- und Imaginärteil

$$A\,\psi = \lambda_0\psi, \qquad A\,\omega = \lambda_0\,\omega,$$

und dem Eigenwert $\lambda_0$ entsprechen die reellen Eigenfunktionen $\psi$ und $\omega$. Im folgenden werden wir die Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators immer als reell annehmen.

**Anmerkung.** Da es einmal möglich ist, die Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators als reell anzunehmen, ist für die Eigenwerte eines solchen Operators stets die Formel (1) richtig. Daraus folgt u. a. sofort, daß alle Eigenwerte eines positiven und demzufolge auch eines positiv-definiten Operators positiv sind.

**Satz 2.** *Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal zueinander.*

Es seien $\lambda_1$ und $\lambda_2$ zwei verschiedene Eigenwerte des symmetrischen Operators $A$, $\varphi_1(P)$ und $\varphi_2(P)$ seien ihnen entsprechende Eigenfunktionen. Dann ist

$$A\,\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \qquad A\,\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2.$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir skalar mit $\varphi_2$, die zweite mit $\varphi_1$. Die Ausrechnung ergibt

$$(A\varphi_1, \varphi_2) - (\varphi_1, A\varphi_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2).$$

Die linke Seite der letzten Ungleichung ist gleich Null, da der Operator symmetrisch ist; da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ist, gilt $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Wenn einem gegebenen Eigenwert mehrere Eigenfunktionen entsprechen, dann kann man diese unter Verwendung des Orthogonalisierungsverfahresn (§ 10) orthogonal machen. Das erlaubt uns, im folgenden ohne Einschränkung anzunehmen, daß *die Menge aller Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators ein Orthonormalsystem bildet.*

**Satz 3.** *Das System der Eigenfunktionen eines positiven Operators ist orthogonal bezüglich der Energie.*

Es seien $\lambda_1$ und $\varphi_1$ ein Eigenwert und eine Eigenfunktion des positiven Operators $A$, so daß

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \tag{3}$$

gilt, ferner sei $\varphi_2$ eine von $\varphi_1$ verschiedene Eigenfunktion desselben Operators. Nach dem oben Gesagten sind $\varphi_1$ und $\varphi_2$ orthogonal im gewöhnlichen Sinne: $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Wir multiplizieren die Beziehung (3) skalar mit $\varphi_2$ und finden $(A\varphi_1, \varphi_2) = 0$, was zu beweisen war.

**Anmerkung.** Oft zeigt es sich, daß das System der Eigenfunktionen nicht nur orthogonal, sondern auch vollständig bezüglich der Energie ist. Dann kann man dieses System verwenden, um eine Lösung der Gleichung

$$Au = f \tag{4}$$

in Form einer Orthogonalreihe zu bilden, wie in § 12 besprochen wurde.

Das System der Eigenfunktionen eines positiv-definiten Operators $A$ sei vollständig bezüglich der Energie und, in Übereinstimmung mit dem oben Gesagten, orthonormal im gewöhnlichen Sinne. Wenn wir mit $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ die Eigenfunktionen des Operators $A$ und mit $\lambda_n$ die entsprechenden Eigenwerte[1]) bezeichnen, dann haben wir

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m; \end{cases} \qquad [\varphi_m, \varphi_n] = 0, \quad n \neq m,$$

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n.$$

Wenn wir die letzte Beziehung skalar mit $\varphi_n$ multiplizieren, erhalten wir noch

$$(A\varphi_n, \varphi_n) = |\varphi_n|^2 = \lambda_n. \tag{5}$$

---

[1]) Wenn dem einen oder anderen Eigenwert mehrere Eigenfunktionen entsprechen, dann kommen unter den Zahlen $\lambda_n$ solche vor, die einander gleich sind.

Die Beziehung (5) besagt, daß die Funktionen $\varphi_n(P)$ bezüglich der Energie nicht normiert sind. Wenn wir

$$\psi_n(P) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\, \varphi_n(P)$$

setzen, erhalten wir ein System von Funktionen, die bezüglich der Energie orthonormiert und folglich auch vollständig bezüglich der Energie sind. In Übereinstimmung mit Formel (2), § 12 kann man die Lösung der Gleichung (4) in der Form

$$u_0(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n)\, \psi_n(P)$$

darstellen oder, wenn man die $\psi_n(P)$ durch die $\varphi_n(P)$ ausdrückt, in der Form

$$u_0(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\, \varphi_n(P). \tag{6}$$

Die Entwicklung (6) in eine Reihe nach Eigenfunktionen des gegebenen Operators hat einen Vorteil gegenüber der allgemeinen Reihe (2), § 12. Wir beschränken uns in einer beliebigen dieser Reihen auf die $N$ ersten Glieder und bezeichnen die so erhaltene endliche Summe mit $u_N(P)$. Da die genannten Reihen bezüglich der Energie konvergieren, so konvergiert in beiden Fällen $u_N(P)$ gegen $u_0(P)$ sowohl im Mittel, als auch bezüglich der Energie. Wenn man jedoch $u_N(P)$ in die Gleichung (4) einsetzt, dann weicht, allgemein gesprochen, deren linke Seite erheblich von der rechten ab; genauer gesagt, ist es im allgemeinen Fall nicht möglich zu behaupten[1]), daß $A u_N \xrightarrow[n\to\infty]{M} f(P)$ gilt. Wenn man aber von der Reihe (6) ausgeht und

$$u_N(P) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\, \varphi_n(P)$$

setzt, dann gilt $A u_N \xrightarrow[N\to\infty]{M} f(P)$. Der Beweis beruht auf folgender Feststellung: Wenn die Energie mit Hilfe eines positiv-definiten Operators definiert ist, und ein gewisses Funktionensystem bezüglich der Energie vollständig ist, dann ist es auch im Sinne der Konvergenz im Mittel[2]) vollständig. Daraus folgt, daß das Funktionensystem $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, das nach Voraussetzung bezüglich der Energie vollständig ist, auch im Sinne der Konvergenz im Mittel vollständig ist. Da dieses System auch noch orthonormiert ist, läßt sich eine beliebige Funktion mit endlicher Norm in eine Orthogonalreihe nach den Funktionen $\varphi_n(P)$ entwickeln; es gilt

$$f(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(P),$$

wobei die Reihe im Mittel konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{N} (f, \varphi_n)\, \varphi_n(P) \xrightarrow[N\to\infty]{M} f(P).$$

---

[1]) Siehe das Buch des Verfassers [11], § 8, S. 47.
[2]) [11], § 12, S. 58.

Andererseits gilt

$$A u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} A \varphi_n;$$

da $\varphi_n(P)$ eine Eigenfunktion des Operators $A$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_n$ ist, so hat man $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n(P)$ und folglich

$$A u_N = \sum_{n=1}^{N} (f, \varphi_n) \varphi_n(P);$$

daraus folgt, daß $A u_N \xrightarrow{M} f(P)$ gilt. Wenn man also von der Reihe (6) ausgehend eine Näherungslösung der Gleichung (4) bildet, dann genügt diese Näherungslösung bei hinreichend großem $N$ im Mittel der Gleichung (4) mit einem beliebigen vorgegebenen Grad von Genauigkeit.

## § 31. Energetische Sätze bei Eigenwertproblemen

Das Eigenwertproblem kann unter bestimmten Bedingungen auf ein Variationsproblem zurückgeführt werden. Der symmetrische Operator $A$ möge der Ungleichung

$$(Au, u) \geq k \, \|u\|^2 \tag{1}$$

genügen, wo $k$ eine reelle, nicht notwendig positive, Zahl ist; ein derartiger Operator heißt *nach unten beschränkt*. Insbesondere ist jeder positive Operator nach unten beschränkt, da er der Ungleichung (1) für $k = 0$ genügt.

Wenn $A$ ein nach unten beschränkter Operator ist, dann gilt

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)} \geq k.$$

Die nach unten beschränkte Größe $(Au, u)/(u, u)$ hat eine untere Grenze $d$. Offensichtlich ist $d \geq k$.

Wir beweisen folgenden Satz:

**Satz 1.** *$A$ sei ein nach unten beschränkter symmetrischer Operator, ferner sei $d$ die genaue untere Grenze des Wertes des Funktionals*

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{2}$$

*Wenn eine solche Funktion $u_0 \not\equiv 0$ existiert, daß*

$$\frac{(Au_0, u_0)}{(u_0, u_0)} = d \tag{3}$$

*gilt, dann ist $d$ der kleinste Eigenwert des Operators $A$ und $u_0$ die zu diesem Wert gehörende Eigenfunktion.*

Es sei $\eta$ eine willkürliche Funktion aus dem Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ und $t$ eine willkürliche reelle Zahl. Offensichtlich ist $u_0 + t\eta \in D_A$. Die Funktion

$$\varphi(t) = \frac{(A(u_0 + t\eta), u_0 + t\eta)}{(u_0 + t\eta, u_0 + t\eta)} = \frac{t^2(A\eta, \eta) + 2t(Au_0, \eta) + (Au_0, u_0)}{t^2(\eta, \eta) + 2t(u_0, \eta) + (u_0, u_0)}$$

nimmt ihr Minimum für $t = 0$ an. Dann aber ist $\varphi'(0) = 0$. Die Berechnung von $\varphi'(0)$ führt ohne Mühe auf die Beziehung

$$(u_0, u_0)(Au_0, \eta) - (Au_0, u_0)(u_0, \eta) = 0$$

oder, wenn man die Gleichung (3) benutzt, auf

$$(Au_0 - du_0, \eta) = 0. \tag{4}$$

Wenn wir die Überlegung des § 11 (S. 70) wiederholen, finden wir, daß $Au_0 - du_0 = 0$ ist, d. h. daß $d$ und $u_0$ ein Eigenwert und eine Eigenfunktion des Operators $A$ sind.

Daß $d$ der kleinste Eigenwert des Operators $A$ ist, ergibt sich aus der Formel (1) des § 30. Wenn nämlich $\lambda_1$ und $u_1$ ein beliebiger Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion des Operators $A$ sind, dann gilt

$$\lambda_1 = \frac{(Au_1, u_1)}{(u_1, u_1)} \geq \min \frac{(Au, u)}{(u, u)} = d.$$

Der hier bewiesene Satz 1 überführt das Problem, den kleinsten Eigenwert eines nach unten beschränkten symmetrischen Operators zu bestimmen, in folgendes Variationsproblem: *Es ist eine Funktion zu bestimmen, die das Funktional*

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)} \tag{5}$$

*zum Minimum macht.*

Wir geben dieser Aufgabe noch eine andere Formulierung, die sich vielfach als günstiger erweist. Wir setzen $\psi = u/\|u\|$. Dann wird

$$\|\psi\| = 1$$

und

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)} = (A\psi, \psi). \tag{6}$$

Wir ersetzen den Buchstaben $\psi$ wieder durch $u$ und können unser Variationsproblem so formulieren: *Es ist das Minimum des Funktionals*

$$(Au, u) \tag{7}$$

*bei der Nebenbedingung*

$$(u, u) = 1 \tag{8}$$

*zu bestimmen.*

Wir sprechen jetzt über Verfahren zur Bestimmung der höheren Eigenwerte.

**Satz 2.** *Es seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ n unmittelbar aufeinanderfolgende Eigenwerte des nach unten beschränkten symmetrischen Operators $A$ und $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die ihnen entsprechenden orthonormierten Eigenfunktionen. Es existiere eine Funktion $u = u_{n+1} \not\equiv 0$, die das Funktional* (5) *bei den Nebenbedingungen*

$$(u, u_1) = 0, \quad (u, u_2) = 0, \quad \ldots, \quad (u, u_n) = 0 \tag{9}$$

*zum Minimum macht. Dann ist $u_{n+1}$ eine Eigenfunktion des Operators $A$, die zu dem Eigenwert*

$$\lambda_{n+1} = \frac{(A u_{n+1}, u_{n+1})}{(u_{n+1}, u_{n+1})} \tag{10}$$

*gehört. Dieser Eigenwert ist der nächste, der auf $\lambda_n$ folgt.*

$\zeta$ sei eine willkürliche Funktion aus dem Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$. Wir setzen

$$\eta = \zeta - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, u_k)\, u_k.$$

Dann genügt $\eta$ den Bedingungen (9). Es ist nämlich

$$(\eta, u_m) = (\zeta, u_m) - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, u_k)(u_k, u_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Nach dem in § 30 Bewiesenen sind die $u_k$ orthogonal als Eigenfunktionen eines symmetrischen Operators. Weiter sind nach den Bedingungen des Satzes die $u_k$ normiert. Deshalb gilt

$$(u_k, u_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m \end{cases}$$

und folglich

$$(\eta, u_m) = (\zeta, u_m) - (\zeta, u_m) = 0.$$

Zusammen mit $\eta$ genügt auch das Produkt $t\eta$ den Bedingungen (9), wo $t$ eine beliebige Zahl ist, und ebenso auch die Summe $u_{n+1} + t\eta$. Die Funktion

$$\frac{(A(u_{n+1} + t\eta), u_{n+1} + t\eta)}{(u_{n+1} + t\eta, u_{n+1} + t\eta)}$$

von $t$ nimmt ihr Minimum bei $t = 0$ an. Indem wir dieselben Überlegungen anwenden, wie schon beim Beweis von Satz 1, finden wir

$$(A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \eta) = 0. \tag{12}$$

Wir betrachten die Größe

$$(A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \zeta).$$

Nach den Formeln (11) und (12) ist

$$\begin{aligned} (A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \zeta) &= (A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \eta) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} (u_k, \zeta)\, (A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u_k, \zeta)\, (A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, u_k). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$(A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, u_k) = (A u_{n+1}, u_k) - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, u_k).$$

Es ist unschwer zu sehen, daß dieser Ausdruck gleich Null ist. Das zweite Glied rechts verschwindet nämlich infolge der Bedingungen (9). Das erste aber ist gleich

$$(A u_{n+1}, u_k) = (u_{n+1}, A u_k).$$

Nun genügt aber $u_k$ als Eigenfunktion des Operators $A$ der Gleichung $A u_k - \lambda_k u_k = 0$. Deshalb ist $A u_k = \lambda_k u_k$ und

$$(A u_{n+1}, u_k) = \lambda_k (u_{n+1}, u_k) = 0.$$

Daraus folgt, daß $(A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1}, \zeta) = 0$ ist. Indem wir die Überlegungen des § 11 wiederholen, finden wir wieder, daß $A u_{n+1} - \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0$ ist, d. h. $\lambda_{n+1}$ ist ein Eigenwert des Operators und $u_{n+1}$ die zugehörige Eigenfunktion. Es bleibt zu zeigen, daß $\lambda_{n+1}$ der kleinste auf $\lambda_n$ folgende Eigenwert ist. Es sei $\lambda'$ ein Eigenwert des Operators $A$, der größer als $\lambda_n$ ist und $u'$ die zugehörige Eigenfunktion. Nach Satz 2, § 30 erfüllt $u'$ die Bedingungen (9). Ferner ist nach Formel (1), § 30

$$\lambda' = \frac{(A u', u')}{(u', u')} \geq \lambda_{n+1},$$

da $\lambda_{n+1}$ das Minimum des Funktionals (4) bei den Bedingungen (9) ist.

Wie im Falle des kleinsten Eigenwertes kann die Bestimmung von $\lambda_{n+1}$ in folgendes Variationsproblem überführt werden: *Es ist das Minimum des Funktionals* (7) *bei den Nebenbedingungen* (8) *und* (9) *zu bestimmen.*

Die vorstehenden Sätze tragen konditionalen Charakter: Sie geben ein Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte, wenn deren Existenz mit anderen Mitteln festgestellt ist. Unten wird ein Satz formuliert, in dem Bedingungen aufgestellt werden für die Existenz von Eigenwerten bei positiv-definiten Operatoren.

Einleitend führen wir einen wichtigen Begriff ein.

Eine Menge von Funktionen wollen wir als *kompakt* im Sinne der Konvergenz von gegebenem Typ bezeichnen, wenn aus einer beliebigen unendlichen Teilmenge eine Folge herausgegriffen werden kann, welche gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert im Sinne der Konvergenz des besagten Typus. So ist es möglich, Funktionenmengen zu unterscheiden, die kompakt im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie, der gleichmäßigen Konvergenz usw. sind.

Der Begriff der Kompaktheit wird verwendet bei der Formulierung des folgenden Satzes:

**Satz 3.** *Es existiere ein positiv-definiter Operator von der Art, daß jede Menge von Funktionen, deren Normen bezüglich der Energie sämtlich beschränkt sind, kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel ist. Dann gilt:* a) *Der Operator hat eine unendliche Menge von Eigenwerten*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots; \qquad \lim \lambda_n = +\infty;$$

b) *die zugehörigen Eigenfunktionen bilden ein System, das sowohl bezüglich der Energie als auch im Sinne der Konvergenz im Mittel vollständig ist.*

**Beweis.** 1. Wir setzen

$$\varphi(u) = \frac{(Au, u)}{(u, u)} = \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \tag{13}$$

und bezeichnen mit $\lambda_1$ die genaue untere Grenze des Funktionals $\varphi(u)$. Offensichtlich gilt $\lambda_1 \geq \gamma^2$, wo $\gamma^2$ die Konstante der Ungleichung (7) des § 6 ist. Wir zeigen, daß eine Funktion $u_1$ existiert, die der Beziehung $\varphi(u_1) = \lambda_1$ genügt.

Nach Definition der genauen unteren Grenze kann man zu jeder beliebig vorgegebenen positiven Zahl $n$ eine solche Funktion $v_n \in D_A$ finden, daß

$$\lambda_1 \leq \varphi(v_n) \leq \lambda_1 + \frac{1}{n}$$

gilt. Offensichtlich ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) = \lambda_1.$$

Das Funktional $\varphi(u)$ ändert sich bei Multiplikation mit einer Konstanten nicht. Durch Multiplikation der Funktion $v_n$ mit $\|v_n\|^{-1}$ kann man erreichen, daß $\|v_n\| = 1$ wird. Dann aber gilt $\varphi(v_n) = |v_n|^2$ und

$$|v_n|^2 \to \lambda_1. \tag{14}$$

Jetzt sei $\eta$ eine willkürliche Funktion aus dem Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ und $t$ eine willkürliche reelle Zahl. Offensichtlich ist

$$\frac{|v_n + t\eta|^2}{\|v_n + t\eta\|^2} \geq \lambda_1.$$

Wir ersetzen jetzt das Quadrat der Normen durch das Skalarprodukt (bzw. durch das Produkt bezüglich der Energie) und nutzen aus, daß $\|v_n\| = 1$ ist. Dann läßt sich die letzte Ungleichung leicht in die Form

$$t^2 \{|\eta|^2 - \lambda_1 \|\eta\|^2\} + 2t \{[v_n, \eta] - \lambda_1(v_n, \eta)\} + \{|v_n|^2 - \lambda_1\} \geq 0$$

bringen. Wenn der dreigliedrige quadratische Ausdruck das Zeichen nicht wechselt, dann ist seine Diskriminante nicht positiv. Deshalb hat man

$$|[v_n, \eta] - \lambda_1(v_n, \eta)| \leq \sqrt{|\eta|^2 - \lambda_1 \|\eta\|^2}\,\sqrt{|v_n|^2 - \lambda_1} \leq |\eta|\,\sqrt{|v_n|^2 - \lambda_1}. \tag{15}$$

Es sei $\|\eta\| < C = \text{const}$, aber im übrigen $\eta$ willkürlich. Aus (14) und (15) folgt dann, daß

$$[v_n, \eta] - \lambda_1(v_n, \eta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{16}$$

gilt. Da $|v_n|^2 \to \lambda_1$ gilt, ist $|v_n| < C$, wo $C$ eine Konstante ist. Wenn wir

$$\eta = v_n - v_m$$

setzen, ist deshalb $|\eta| \leq |v_n| + |v_m| < 2C$ und infolge der Ungleichung (16)

$$[v_n, v_n - v_m] - \lambda_1(v_n, v_n - v_m) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Wenn wir $m$ und $n$ vertauschen und addieren, erhalten wir

$$|v_n - v_m|^2 - \lambda_1 \|v_n - v_m\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \tag{17}$$

Die Ungleichung $|v_n| < C$ bedeutet, daß die Folge $v_n$, $n = 1, 2, \ldots$ beschränkt durch die Norm bezüglich der Energie ist. Nach den Bedingungen des Satzes ist diese Folge kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel. Wir sondern aus ihr eine Folge aus, die im Mittel konvergent ist; um keine neuen Symbole einzuführen, bezeichnen wir diese Folge wie vorher mit $v_n$. Es sei $v_n \xrightarrow{M} u_1$. Dann gilt $\|v_n - v_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Aus (17) folgt, daß $|v_n - v_m| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Das bedeutet aber, daß die Folge $v_n$ auch bezüglich der Energie gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert. Offensichtlich ist dieser Grenzwert ebenfalls gleich $u_1$, so daß $|v_n - u_1| \to 0$ gilt. Ebenfalls offensichtlich ist, daß $\|u_1\| = \lim \|v_n\| = 1$ und $|u_1| = \lim |u_n| = \lambda_1$ ist, so daß $\varphi(u_1) = \lambda_1$ ist.

Wir zeigen jetzt, daß $A u_1 = \lambda_1 u_1$ ist. Wenn wir in (16) durch $n \to \infty$ zur Grenze übergehen, erhalten wir

$$[u_1, \eta] - \lambda_1 (u_1, \eta) = 0, \qquad \eta \in D_A. \tag{18}$$

Wir bestimmen die Funktion $u$, die das Funktional

$$[u, u] - 2(u, \lambda_1 u_1) \tag{19}$$

zum Minimum macht; wie wir wissen, stellt eine solche Funktion eine Lösung (möglicherweise eine verallgemeinerte) der Gleichung $A u = \lambda_1 u_1$ dar. Aus der Gleichung (18) folgt, wenn man in ihr den Buchstaben $\eta$ durch $u$ ersetzt, daß das letzte Funktional gleich

$$[u, u] - 2[u, u_1] = |u - u_1|^2 - |u_1|^2$$

ist. Daraus ist ersichtlich, daß die Funktion $u_1$ das Minimum des Funktionals (19) liefert. Wie soeben bemerkt wurde, genügt diese Funktion dann aber der Gleichung $A u_1 = \lambda_1 u_1$. Damit ist gezeigt, daß $\lambda_1$ und $u_1$ ein Eigenwert und eine Eigenfunktion des Operators $A$ sind. Aus Satz 1 folgt, daß $\lambda_1$ dessen kleinster Eigenwert ist.

2. Wir bezeichnen jetzt mit $\lambda_2$ die genaue untere Grenze des Funktionals $\varphi(u)$ bei der Nebenbedingung $(u, u_1) = 0$. Diese Bedingung verengt die Klasse der Funktionen, in welcher das Minimum zu suchen ist. Deshalb ist $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Wenn wir die vorangegangenen Überlegungen mit einigen Änderungen anstellen, finden wir, daß $\lambda_2$ der zweite Eigenwert des Operators $A$ ist, und diesem Eigenwert entspricht eine normierte Eigenfunktion $u_2$, die orthogonal zu $u_1$ ist. Setzt man diesen Prozeß fort, so gewinnt man die wachsende Folge von Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$, die offensichtlich positiv sind, und eine ihr entsprechende orthonormierte Folge von Eigenfunktionen $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P), \ldots$.

3. Wir zeigen, daß $\lambda_n \to \infty$ gilt. Wir nehmen das Gegenteil an, es sei $\lambda_n \leq C = \text{const}$. Nach Formel (5) des § 30 ist $|u_n| = \lambda_n \leq C$, d. h. die zugehörige Eigenfunktion ist bezüglich der Energie beschränkt. Nach den Bedingungen des Satzes ist die Folge der Eigenfunktionen dann kompakt, und man kann aus ihr eine Folge $u_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ aussondern, die im Mittel konvergiert. Und dann gilt

$$\lim_{k,l\to\infty} \|u_{n_k} - u_{n_l}\|^2 = 0.$$

Das ist jedoch unmöglich, da die Eigenfunktionen orthonormiert sind und deshalb

$$\|u_{nk} - u_{nl}\|^2 = (u_{nk} - u_{nl}, u_{nk} - u_{nl}) = \|u_{nk}\|^2 - 2(u_{nk}, u_{nl}) + \|u_{nl}\|^2 = 2$$

gilt.

4. Das System der Funktionen $u_n$ ist vollständig bezüglich der Energie. Um uns davon zu überzeugen, bemerken wir, daß $\lambda_n$ als genaue untere Grenze von $\varphi(u)$ auf der den Bedingungen

$$[u, u_1] = 0, \quad [u, u_2] = 0, \ldots, [u, u_{n-1}] = 0$$

genügenden Funktionenmenge bestimmt werden kann, sofern die Eigenfunktionen bezüglich der Energie orthogonal sind (Satz 3, § 30). Wenn unser System bezüglich der Energie unvollständig wäre, dann könnte man von Null verschiedene Funktionen finden, die orthogonal bezüglich der Energie zu allen $u_n$ wären. Bezeichnet man die genaue untere Grenze von $\varphi(u)$ auf den genannten Funktionen mit $\bar{\lambda}$, dann fände man, daß $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert des Operators $A$ wäre, der größer als alle $\lambda_n$ ist, und das ist unmöglich, da $\lambda_n \to \infty$ geht.

5. Den Beweis dafür, daß das System der Eigenfunktionen $u_n$ vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel ist, führen wir unter der Annahme durch, daß eine beliebige Funktion mit endlicher Norm im Mittel mit einem beliebigen Grad von Genauigkeit approximiert werden kann durch Funktionen mit endlicher Energie.[1] Wir machen diese Annahme, geben eine Funktion $f(P)$ mit endlicher Norm vor und wählen eine Funktion $g(P)$ mit endlicher Energie, so daß $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, wo $\varepsilon$ eine willkürlich gegebene positive Zahl ist. Die Funktion $g(P)$ approximieren wir durch eine Summe der Gestalt $a_1 u_1(P) + a_2 u_2(P) + \cdots + a_n u_n(P)$, so daß $|g - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n)| < \frac{\varepsilon\gamma}{2}$ ist, wo $\gamma$ die Konstante der Ungleichung (7) des § 6 ist. Jetzt wird

$$\|f - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n)\| \leq \|f - g\| + \|g - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\|$$

$$\leq \|f - g\| + \frac{1}{\gamma}\left|g - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right| < \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

**Anmerkung 1.** Wenn der Operator die Eigenschaften a) und b) des Satzes 3 besitzt, so sagt man, dieser Operator besitze ein *diskretes Spektrum.*

**Anmerkung 2.** Man kann zeigen, daß für positiv-definite Operatoren die Bedingungen des Satzes 3 nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür sind, daß dieser Operator ein diskretes Spektrum besitzt.

[1]) Für positiv-definite Operatoren kann diese Annahme bewiesen werden. Siehe das Buch des Verfassers [11].

## § 32. Das RITZsche Verfahren bei Eigenwertproblemen

$A$ sei ein nach unten beschränkter Operator:

$$(Au, u) \geq k \|u\|^2.$$

Die Auffindung der Eigenwerte des Operators $A$ läßt sich leicht auf die Bestimmung der Eigenwerte eines positiv-definiten Operators zurückführen. $c$ sei nämlich eine beliebige Zahl, die größer als $|k|$ ist. Die Gleichung

$$Au - \lambda u = 0,$$

welche Eigenwerte des Operators $A$ definiert, schreiben wir in der Form

$$\tilde{A}u - \tilde{\lambda}u = 0,$$

wo $\tilde{A}u = Au + cu$, $\tilde{\lambda} = \lambda + c$ ist. Der Operator $\tilde{A}$ ist positiv-definit, da

$$(\tilde{A}u, u) = (Au, u) + c(u, u) \geq (c + k) \|u\|^2$$

und $c + k > 0$ ist. Wenn $\tilde{\lambda}$ ein Eigenwert des Operators $\tilde{A}$ ist, dann ist $\lambda = \tilde{\lambda} - c$ ein Eigenwert des Operators $A$ und umgekehrt. Deshalb wollen wir im folgenden annehmen, daß $A$ ein positiv-definiter Operator ist. Wir setzen[1])

$$d = \inf \frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{1}$$

Nach Satz 1, § 31 ist $d$ der kleinste Eigenwert des Operators $A$, wenn eine solche Funktion $u_0$ existiert, daß

$$d = \frac{(Au_0, u_0)}{(u_0, u_0)}$$

gilt. Wenn wir annehmen, daß eine solche Funktion existiert, dann führt die Bestimmung des kleinsten Eigenwertes des Operators $A$ auf die Bestimmung der genauen unteren Grenze des Funktionals (1) oder, was dasselbe ist, auf die Bestimmung der genauen unteren Grenze des Funktionals

$$(Au, u) \tag{2}$$

bei der Nebenbedingung

$$(u, u) = 1. \tag{3}$$

Wir zeigen, daß sich dieses Problem mit Hilfe des RITZschen Verfahrens lösen läßt. Wir nehmen eine Folge von Koordinatenfunktionen $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, die folgenden drei Forderungen unterworfen seien: 1. Die Funktionen $\varphi_n(P)$ liegen im Definitionsbereich des Operators $A$; 2. das System dieser Funktionen ist vollständig bezüglich der Energie; 3. bei beliebigem $n$ sind die Funktionen $\varphi_1(P)$,

---

[1]) Das Symbol inf bezeichnet die genaue untere Grenze.

$\varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ linear unabhängig. Wir setzen

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P),$$

wo $a_k$ konstante Koeffizienten sind. Wir wählen diese Koeffizienten so, daß $u_n$ der Beziehung (3) genügt und daß die Größe $(A u_n, u_n)$ minimal wird. Das ganze läuft darauf hinaus, das Minimum der Funktion von $n$ Veränderlichen

$$(A u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (A \varphi_k, \varphi_m) a_k a_m \tag{4}$$

zu finden, die durch die Bedingungen

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k a_m = 1 \tag{5}$$

verknüpft sind. Zur Lösung dieses Problems benutzen wir die Methode der unbestimmten Multiplikatoren von LAGRANGE.[1] Wir bilden die Funktion $\Phi = (A u_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$, wo $\lambda$ ein zunächst unbestimmter Zahlenfaktor ist und setzen ihre partiellen Ableitungen nach den Koeffizienten $a_m$ gleich Null. Das führt auf das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [(A \varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Das System (6) ist linear und homogen bezüglich der Unbekannten $a_k$, die nicht gleichzeitig verschwinden können, andernfalls wäre die Gleichung (5) verletzt. Daraus folgt, daß die Determinante des Systems (6) verschwinden muß; das liefert uns eine Gleichung für $\lambda$:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1), & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1), & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2), & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2), & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n), & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n), & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Wenn die Folge $\{\varphi_n\}$ orthonormiert ist, dann vereinfacht sich die Gleichung (7) und nimmt die Form

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda, & (A\varphi_2, \varphi_1), & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2), & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda, & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n), & (A\varphi_2, \varphi_n), & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

an. Wie schon bemerkt wurde, sind die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ für beliebiges $n$ linear unabhängig; dann ist die Gleichung (7) genau vom $n$-ten Grade, da der Koeffizient bei $(-1)^n \lambda^n$ die GRAMsche Determinante der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$

[1]) Man vgl. etwa SMIRNOW [1], Punkt 167.

$\varphi_n$ ist. Daraus folgt, daß die Gleichung (7) gerade $n$ Wurzeln hat. $\lambda_0$ sei irgendeine dieser Wurzeln. Setzen wir diese in das System (6) ein, so bringen wir dessen Determinante zum Verschwinden, und dieses System hat dann eine nichttriviale Lösung. Es sei $a_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ eine solche Lösung. Dann ist $\mu a_k^{(0)}$, wo $\mu$ ein beliebiger Zahlenfaktor ist, ebenfalls eine Lösung des Systems (6). Setzt man $\mu a_k^{(0)}$ in (5) ein, so erhält man den Wert $\mu$. Wir ersetzen jetzt die Bezeichnung $\mu a_k^{(0)}$ durch $a_k^{(0)}$ und wollen im folgenden unter $a_k^{(0)}$ diejenige Lösung von (6) verstehen, welche der Gleichung (5) genügt. Wenn wir in (6) $\lambda = \lambda_0$ und $a_k = a_k^{(0)}$ setzen, erhalten wir eine Identität, welche wir in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} (A\varphi_k, \varphi_m) = \lambda_0 \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

schreiben. Wir multiplizieren sie mit $a_m^{(0)}$ und summieren über alle $m$. Wir erhalten dann

$$\sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} a_m^{(0)} = \lambda_0 \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} a_m^{(0)}.$$

Wegen Gleichung (5) ist die rechte Seite der letzten Ungleichung gleich $\lambda_0$; ihre linke Seite ist gleich $(A u_n^{(0)}, u_n^{(0)})$, wo

$$u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{k} a_k^{(0)} \varphi_k$$

ist. So erhält man

$$\lambda_0 = (A u_n^{(0)}, u_n^{(0)}). \tag{10}$$

Formel (10) besagt, daß *die Gleichung* (7) *nur reelle Wurzeln hat, wenn der Operator A symmetrisch ist. Ferner macht eine der Funktionen $u_n^{(0)}$ die Größe* (4) *zum Minimum. Die Formel* (10) *besagt jetzt, daß dieses Minimum gleich der kleinsten Wurzel der Gleichung* (7) *ist.*

Mit wachsendem $n$ wächst das genannte Minimum, das wir mit $\lambda_n^{(0)}$ bezeichnen werden, nicht; gleichzeitig ist es nicht kleiner als $d$. Daraus folgt, daß für $n \to \infty$ die Größe $\lambda_n^{(0)}$ einem Grenzwert zustrebt, welcher größer oder gleich $d$ ist. Wir zeigen, daß dieser Grenzwert gleich $d$ ist; dadurch wird die Anwendung des RITZschen Verfahrens bei Eigenwertproblemen wenigstens in dem Falle gerechtfertigt, wo es sich um die Bestimmung des kleinsten Eigenwertes handelt. Wir führen das energetische Produkt und die Norm bezüglich der Energie ein, indem wir wie gewöhnlich

$$[u, v] = (Au, v); \quad |u|^2 = (Au, u)$$

setzen. Nach der Definition der genauen unteren Grenze existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u' \in D_A$ derart, daß $(u', u') = 1$ und

$$d \leq (Au', u') < d + \varepsilon$$

gilt oder, was dasselbe ist,

$$\sqrt{d} \leq |u'| < \sqrt{d + \varepsilon}.$$

Da die Folge $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ vollständig bezüglich der Energie ist, kann man eine Funktion $u'_N$ der Gestalt

$$u'_N = \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_k, \quad b_k = \text{const}$$

finden, so daß $|u' - u'_N| < \sqrt{\varepsilon}$ ist.

Daraus folgt

$$|u'_N| \leq |u'| + \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}$$

oder

$$(A u'_N, u'_N) < \left(\sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\right)^2.$$

Aus (1) folgt, daß $\|u'_N - u'\| \leq \frac{1}{\sqrt{d}} |u'_N - u'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$ ist. Damit ergibt sich $\|u'_N\| \geq \|u'\| - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}} = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$ und demzufolge

$$d \leq \frac{(A u'_N, u'_N)}{(u'_N, u'_N)} = \frac{|u'_N|^2}{\|u'_N\|^2} < \frac{\left(\sqrt{d+\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\right)^2}{\left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}\right)^2} = d + \eta,$$

wo $\eta$ mit $\varepsilon$ gegen Null geht. Ferner ist $\lambda_N^{(0)}$ das Minimum des Ausdrucks

$$\frac{(A u_N, u_N)}{(u_N, u_N)}; \quad u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k,$$

deshalb gilt insbesondere

$$d \leq \lambda_N^{(0)} \leq \frac{(A u'_N, u'_N)}{(u'_N, u'_N)} < d + \eta.$$

Wenn $n \geq N$ ist, dann ist $\lambda_n^{(0)} \leq \lambda_N^{(0)}$ und demnach $d \leq \lambda_n^{(0)} < d + \eta$. Die letzte Ungleichung besagt, daß

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{(0)} = d \tag{11}$$

gilt, was zu beweisen war.

Wir befassen uns jetzt mit der Bestimmung der folgenden Eigenwerte. Um einen Näherungswert für den zweiten Eigenwert zu bekommen, suchen wir das Minimum des Skalarproduktes (4) bei den Nebenbedingungen

$$(u_n, u_n) = 1 \tag{5}$$

und

$$(u_n^{(0)}, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} = 0, \tag{12}$$

wo $u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k$ ein Näherungswert für die erste normierte Eigenfunktion

des Operators $A$ ist. Nach dem Verfahren von Lagrange bilden wir den Ausdruck

$$(A u_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n) - 2\mu(u_n, u_n^{(0)})$$

und setzen seine partiellen Ableitungen nach $a_k$ gleich Null. Das liefert uns das System

$$\sum_{k=1}^{n} \{a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] - \mu(\varphi_k, \varphi_m)\, a_k^{(0)}\} = 0. \tag{13}$$

Beide Seiten der Gleichung (13) multiplizieren wir mit $a_m^{(0)}$ und summieren über $m$. Wir erhalten

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m^{(0)} [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] - \mu \sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(0)} a_m^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m) = 0. \tag{14}$$

Die zweite Summe ist, wie man unschwer erkennt, gleich $(u_n^{(0)}, u_n^{(0)}) = 1$. In der ersten Summe ersetzen wir den Index $m$ durch $k$ und umgekehrt und summieren dann zuerst über $k$, dann über $m$. Damit geht die erste Summe in die Form

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} [(A\varphi_m, \varphi_k) - \lambda(\varphi_m, \varphi_k)] \tag{15}$$

über.

Die innere Summe ist gleich

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} [(\varphi_k, A\varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)]$$

oder, da der Operator $A$ symmetrisch ist, gleich

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)].$$

Wegen Gleichung (6), welcher die Zahlen $a_k^{(0)}$ für $\lambda = \lambda_n^{(0)}$ genügen, ist der letzte Ausdruck gleich

$$(\lambda_n^{(0)} - \lambda) \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} (\varphi_k, \varphi_m) = (\lambda_n^{(0)} - \lambda) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k, \varphi_m\right)$$
$$= (\lambda_k^{(0)} - \lambda)\, (u_n^{(0)}, \varphi_m) = (\lambda_n^{(0)} - \lambda)(\varphi_m, u_n^{(0)}).$$

Der Ausdruck (15) nimmt die Form

$$(\lambda_n^{(0)} - \lambda) \sum_{m=1}^{n} a_m (\varphi_m, u_n^{(0)}) = (\lambda_n^{(0)} - \lambda)(u_n, u_n^{(0)})$$

an, was gleich Null ist wegen (12). Jetzt folgt aus (14), daß $\mu = 0$ ist, und das System (13) fällt mit dem System (6) zusammen. Daraus schließen wir wie schon oben, daß das gesuchte Minimum gleich $\lambda$ ist, was eine Wurzel der Gleichung (7) darstellt. Es ist nicht schwer zu sehen, daß man diesmal die der Größe nach zweite Wurzel der genannten Gleichung nehmen muß.

Analog kann man Näherungswerte für die folgenden Eigenwerte bilden; alle diese sind Wurzeln der Gleichung (7).

Die Frage der Konvergenz der Näherungswerte der folgenden Eigenwerte gegen ihre exakten Werte wird unten in § 78 untersucht.

## § 33. Eine andere Form des RITZschen Verfahrens; der Fall natürlicher Randbedingungen

Wir gehen aus von einem positiv-definiten Operator mit diskretem Spektrum. Dessen kleinster Eigenwert $\lambda_1$ ist in Übereinstimmung mit Satz 1, § 31 gleich

$$\lambda_1 = \inf \frac{(Au, u)}{(u, u)}; \tag{0}$$

die genaue untere Grenze bezieht sich auf die Menge aller Funktionen, die im Definitionsbereich des Operators $A$ liegen, so daß man die vorige Formel genauer so schreiben kann:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D_A} \frac{(Au, u)}{(u, u)}, \tag{1}$$

und das kann man auch noch in folgender Form schreiben:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2}. \tag{2}$$

Der Quotient in Formel (1) hat nur Sinn für Funktionen aus dem Definitionsbereich des Operators $A$, während der Quotient in Formel (2) auch auf der größeren Klasse der Funktionen mit endlicher Energie definiert werden kann. Wir zeigen, daß sich in diesem Falle die genaue untere Grenze des erwähnten Quotienten nicht ändert, so daß

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \tag{3}$$

gilt, wenn man die Menge der Funktionen mit endlicher Energie mit $H_A$ bezeichnet.

Bei Erweiterung der Funktionenklasse kann die genaue untere Grenze möglicherweise kleiner werden, deshalb gilt jedenfalls

$$\inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2} \leq \lambda_1.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\delta = \inf_{u \in H_A} \frac{|u|^2}{\|u\|^2}$$

und nehmen an, daß $\delta < \lambda_1$ ist. Nach Definition der genauen unteren Grenze kann man zu jeder beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u(P) \in H_A$ derart finden, daß

$$\delta \leq \frac{|\bar{u}|^2}{\|\bar{u}\|^2} < \delta + \varepsilon$$

gilt. Der Quotient $|\bar{u}|^2/\|\bar{u}\|^2$ ändert sich nicht, wenn man $\bar{u}$ mit einer beliebigen Konstanten multipliziert, deshalb kann man $\|\bar{u}\| = 1$ annehmen und dann ist

$$\delta \leq |\bar{u}|^2 < \delta + \varepsilon.$$

Andererseits existiert nach Definition der Funktion mit endlicher Energie eine solche Funktion $u' \in D_A$, daß $|u' - \bar{u}| < \varepsilon$ und demzufolge $\|u' - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{\gamma}$ ist, wo $\gamma$ die Konstante der Ungleichung (7) des § 6 ist.

Wir schätzen den Quotienten

$$\frac{|u'|^2}{\|u'\|^2}$$

ab. Nach der Dreiecksungleichung haben wir

$$\frac{|u'|^2}{\|u'\|^2} \leq \left\{\frac{|\bar{u}| + |u' - \bar{u}|}{\|\bar{u}\| - \|u' - \bar{u}\|}\right\}^2 < \left\{\frac{\sqrt{\delta + \varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon/\gamma}}\right\}^2 = \delta + \eta,$$

wo $\eta$ mit $\varepsilon$ gegen Null strebt. Wir wählen $\varepsilon$ so klein, daß $\delta + \eta < \lambda_1$ wird und erhalten einen Widerspruch zur Formel (2). Dann ist jedoch die Ungleichung $\delta < \lambda_1$ unmöglich, und die Gleichung (3) ist bewiesen. Es ist offensichtlich, daß die exakte untere Grenze in (3) angenommen wird, wenn $u = u_1$ ist, wo $u_1$ die dem Eigenwert $\lambda_1$ entsprechende Eigenfunktion des Operators $A$ ist.

Das Ritzsche Verfahren läßt sich auch auf die Bestimmung des Minimums des Quotienten $\frac{|u|^2}{\|u\|^2}$, $u \in H_A$ anwenden. Dazu wählen wir eine Folge von Koordinatenfunktionen $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, die den Bedingungen 2 und 3 des § 32 unterworfen sind; die Bedingung 1 des § 32 ersetzen wir durch 1 a), die Funktionen $\varphi_n(P)$ haben endliche Energie. Wie schon in § 32 setzen wir

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P),$$

wobei wir fordern, daß

$$\|u_n\|^2 = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1$$

und

$$|u_n|^2 = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m [\varphi_k, \varphi_m] = \min$$

erfüllt sei.

Wenn wir die Überlegungen aus § 32 wiederholen, kommen wir zu der Gleichung

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] - \lambda(\varphi_1, \varphi_1), & [\varphi_2, \varphi_1] - \lambda(\varphi_2, \varphi_1), & \ldots, & [\varphi_n, \varphi_1] - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ [\varphi_1, \varphi_2] - \lambda(\varphi_1, \varphi_2), & [\varphi_2, \varphi_2] - \lambda(\varphi_2, \varphi_2), & \ldots, & [\varphi_n, \varphi_2] - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\varphi_1, \varphi_n] - \lambda(\varphi_1, \varphi_n), & [\varphi_2, \varphi_n] - \lambda(\varphi_2, \varphi_n), & \ldots, & [\varphi_n, \varphi_n] - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Wir bemerken, daß die Gleichung (4) mit der Gleichung (7) des § 32 zusammenfällt, wenn wir Koordinatenfunktionen aus dem Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ wählen.

Wie im vorangegangenen Paragraphen kann man zeigen, daß die Wurzeln der Gleichung (4) Näherungswerte für die Eigenwerte des Operators liefern und daß für $n \to \infty$ die kleinste Wurzel der Gleichung (4) gegen den kleinsten Eigenwert des Operators strebt.

Die Form (4) der Gleichung für die Näherungswerte der Eigenwerte nimmt eine spezielle Gestalt in dem Falle an, wo die zum Definitionsbereich $D_A$ des Operators gehörenden Fnnktionen neben anderen auch den natürlichen Randbedingungen genügen. Wie uns bereits bekannt ist (§ 17), genügen die Funktionen mit endlicher Energie diesen Bedingungen nicht notwendig. Daraus ergibt sich folgendes praktisch wichtige Resultat: Wenn man die Gleichung für die näherungsweise Bestimmung der Eigenwerte in der Form (4) schreibt, aber nicht in der Form (7), § 32, dann braucht man nicht unbedingt dafür zu sorgen, daß die Koordinatenfunktionen den natürlichen Randbedingungen genügen.

## § 34. Gleichungen der Form $Au - \lambda Bu = 0$

Wir betrachten die Gleichung

$$Au - \lambda Bu = 0, \tag{1}$$

wir wollen voraussetzen, daß die Operatoren $A$ und $B$ beide positiv-definit sind und daß $D_A$ eine Teilmenge von $D_B$ bildet. Für jede Funktion, die zu $D_A$ gehört, kann man dann die Energie zweifach definieren, entweder indem man sie auf den Operator $A$ bezieht, oder indem man sie auf den Operator $B$ bezieht. Wir wollen diese beiden Formen der Energie unterscheiden, indem wir von der „Energie der Operators $A$" oder der „Energie des Operators $B$" sprechen.

Im vorliegenden Paragraphen formulieren wir eine Reihe von Sätzen, die sich auf die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Gleichung (1) beziehen. Die Beweise erbringen wir nicht, da sie nahezu wörtlich mit den Beweisen für die Gleichung $Au - \lambda u = 0$ übereinstimmen.

**Satz 1:** *Die Eigenwerte der Gleichung* (1) *sind reell.*

Wir bemerken folgendes: Wenn $\lambda_0$ und $u_0$ ein Eigenwert und eine Eigenfunktion der Gleichung (1) sind, dann gilt

$$\lambda_0 = \frac{(Au_0, u_0)}{(Bu_0, u_0)} = \frac{|u_0|_A^2}{|u_0|_B^2}. \tag{2}$$

Daraus folgt unter anderem, daß die Eigenwerte der Gleichung (1) nicht nur reell sind, sondern auch positiv.

**Satz 2.** *Eigenfunktionen der Gleichung* (1), *die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal bezüglich der Energie des Operators B.*

Wenn also $\lambda_1$ und $\lambda_2$ verschiedene Eigenwerte der Gleichung (1) sind und $u_1$ und $u_2$ die ihnen entsprechenden Eigenfunktionen, dann gilt

$$(Bu_1, u_2) = [u_1, u_2]_B = 0. \tag{3}$$

Ebenso wie in § 30 folgt daraus, daß *man die Gesamtheit aller Eigenfunktionen der Gleichung* (1) *als orthonormiert bezüglich der Energie des Operators B ansehen kann.* Dann gilt der

**Satz 3.** *Das System der Eigenfunktionen der Gleichung* (1) *ist orthogonal bezüglich der Energie des Operators A.*

**Satz 4.** *Die Operatoren A und B mögen folgende Eigenschaft haben: Jede Menge von Funktionen, für die die energetische Norm bezüglich des Operators A gemeinsam beschränkt ist, sei kompakt im Sinne der energetischen Norm des Operators B. Dann gilt:*

a) *Die Gleichung (1) hat eine unendliche Menge von Eigenwerten*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_r \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots,$$

*wobei $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt;*

b) *die zugehörigen Eigenfunktionen bilden ein System, das vollständig bezüglich der Energie sowohl des Operators A als auch des Operators B ist.*

**Satz 5.** *Es sei d die untere Grenze des Funktionals*

$$\frac{(Au, u)}{(Bu, u)}. \tag{4}$$

*Es existiere eine Funktion $u_0$ derart, daß*

$$\frac{(Au_0, u_0)}{(Bu_0, u_0)} = d$$

*gilt, dann ist d der kleinste Eigenwert der Gleichung (1), während $u_0$ die entsprechende Eigenfunktion dieser Gleichung ist.*

**Satz 6.** *Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die n ersten (der Größe nach) Eigenwerte der Gleichung (1) und $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$ die ihnen entsprechenden Eigenfunktionen. Es existiere eine Funktion $u_{n+1}(P)$, die das Funktional* (4) *bei den Nebenbedingungen*

$$(Bu, u_1,) = (Bu, u_2) = \cdots = (Bu, u_n) = 0 \tag{5}$$

*zum Minimum macht. Dann ist $u_{n+1}$ eine Eigenfunktion der Gleichung* (1), *die zum Eigenwert*

$$\lambda_{n+1} = \frac{(Au_{n+1}, u_{n+1})}{(Bu_{n+1}, u_{n+1})} \tag{6}$$

*gehört. Dieser Eigenwert ist der nächste auf $\lambda_n$ folgende.*

Satz 5 führt die Bestimmung des kleinsten Eigenwertes der Gleichung (1) auf folgendes Variationsproblem zurück:

*Zu bestimmen ist das Minimum des Funktionals $(Au, u)$ bei der Nebenbedingung*

$$(Bu, u) = 1. \tag{7}$$

Ebenso führt die Bestimmung des $(n+1)$-ten Eigenwertes auf folgende Aufgabe:

*Zu bestimmen ist das Minimum des Funktionals* $(Au, u)$ *bei den Nebenbedingungen* (7) *und* (5).

Wir wollen nicht ausführlich bei der Anwendung des RITZschen Verfahrens auf die Gleichung (1) verweilen. Wir erwähnen nur, daß die Koordinatenfunktionen drei Forderungen zu unterwerfen sind, von denen die Bedingungen 1 und 3 dieselben sind wie in § 32, während die Bedingung 2 so lautet: Das System der Koordinatenfunktionen sei vollständig bezüglich der Energie des Operators $A$. Die Gleichung (6) und (7) des § 32 sind dann durch die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k [(Au_k, u_m) - \lambda(Bu_k, u_m)] = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n; \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} (Au_1, u_1) - \lambda(Bu_1, u_1), & (Au_2, u_1) - \lambda(Bu_2, u_1), & \ldots, & (Au_n, u_1) - \lambda(Bu_n, u_1) \\ (Au_1, u_2) - \lambda(Bu_1, u_2), & (Au_2, u_2) - \lambda(Bu_2, u_2), & \ldots, & (Au_n, u_2) - \lambda(Bu_n, u_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (Au_1, u_n) - \lambda(Bu_1, u_n), & (Au_2, u_n) - \lambda(Bu_2, u_n), & \ldots, & (Au_n, u_n) - \lambda(Bu_n, u_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

zu ersetzen. Die Bedingung 1 kann man abschwächen, indem man lediglich fordert, daß die Koordinatenfunktionen endliche Energie bezüglich des Operators $A$ besitzen. Man kann zeigen, daß sie dann auch endliche Energie bezüglich des Operators $B$ besitzen. Folglich hat man an Stelle der Gleichungen (8) und (9) jetzt zu schreiben

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \{[u_k, u_m]_A - \lambda[u_k, u_m]_B\} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{8$_1$}$$

$$\begin{vmatrix} [u_1, u_1]_A - \lambda[u_1, u_1]_B, & [u_2, u_1]_A - \lambda[u_2, u_1]_B, & \ldots, & [u_n, u_1]_A - \lambda[u_n, u_1]_B \\ [u_1, u_2]_A - \lambda[u_1, u_2]_B, & [u_2, u_2]_A - \lambda[u_2, u_2]_B, & \ldots, & [u_n, u_2]_A - \lambda[u_n, u_2]_B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [u_1, u_n]_A - \lambda[u_1, u_n]_B, & [u_2, u_n]_A - \lambda[u_2, u_n]_B, & \ldots, & [u_n, u_n]_A - \lambda[u_n, u_n]_B \end{vmatrix} = 0. \tag{9$_1$}$$

Die Bemerkung über die natürlichen Randbedingungen (§ 33) behält ihre Gültigkeit.

## § 35. Eigenwerte gewöhnlicher Differentialgleichungen

Im vorliegenden Paragraphen wird die Frage der Eigenwerte einer gewöhnlichen Differentialgleichung untersucht. Wir betrachten den Fall der Gleichung zweiter Ordnung ausführlich, wir untersuchen sie bei verschiedenen Typen von Randbedingungen. Für Gleichungen höherer als zweiter Ordnung beschränken wir uns auf die einfachsten Typen der Randbedingungen (siehe unten, Formel (28)); Randbedingungen anderer Typen werden im folgenden Paragraphen betrachtet für den Spezialfall des Stabilitätsproblems eines Stabes unter Längsdruck.

1. Wir betrachten den Differentialoperator zweiter Ordnung

$$Au = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + r(x)u, \tag{1}$$

wo die Funktion $u(x)$ auf dem Segment $a \leq x \leq b$ gegeben ist.

Wir nehmen an, daß die Koeffizienten $p(x)$ und $r(x)$ den Bedingungen des § 20 unterworfen seien, insbesondere sei

$$p(x) \geq 0, r(x) \geq 0, \qquad A = \int_a^b \frac{dx}{p(x)} < \infty, \tag{2}$$

und $u(x)$ genüge (siehe § 20) solchen Randbedingungen, daß die positive Definitheit des Operators (1) gesichert ist. Wir stellen das Problem der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $A$.

2. Wir untersuchen zuerst den einfachsten Fall, wenn an einem Ende des Segments $a \leq x \leq b$, sagen wir am linken Ende, die Randbedingung

$$u(a) = 0 \tag{3}$$

erfüllt ist, während am rechten Ende die allgemeine Randbedingung

$$\gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \tag{4}$$

gilt, wobei $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$ und mindestens eine der Größen $\gamma$ und $\delta$ von Null verschieden ist.

Zur Lösung unseres Problems ist es zunächst von Nutzen, eine Abschätzung für die durch den Operator $A$ bestimmte Energie zu geben. Wir haben (siehe Formel (5), § 20)

$$|u|^2 = \int_a^b (pu'^2 + ru^2)\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,u^2(b);$$

wenn $\gamma = 0$ ist, muß der letzte Summand unterdrückt werden. In jedem Falle ist er nicht negativ. Wir lassen ihn fort, ebenso den nicht negativen Summanden unter dem Integralzeichen und erhalten die gesuchte Abschätzung

$$|u|^2 \geq \int_a^b p(x)u'^2(x)\,dx. \tag{5}$$

Der zweite Schritt ist mit der Anwendung des folgenden Satzes aus der Theorie der Integralgleichungen verbunden[1]:

**Satz 1.** *Wenn*

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)\,v(t)\,dt \tag{6}$$

[1] Siehe z. B. in dem Buch des Verfassers [7], Satz 2, § 20.

*gilt und das Doppelintegral*

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt \tag{7}$$

*endlich ist, dann überführt der Integraloperator* (6) *jede Menge von Funktionen, deren Normen gemeinsam beschränkt sind, in eine Menge, die kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel ist.*

Wenn also $M$ eine Menge von Funktionen ist und für jede Funktion $v(x) \in M$ die Ungleichung

$$\|v\| = \left\{ \int_a^b v^2(x)\, dx \right\}^{1/2} \leq C, \qquad C = \text{const}$$

gilt, dann kann man aus dieser Menge eine solche Folge $v_n(x)$ aussondern, daß die ihr nach Formel (6) zugeordnete Folge

$$u_n(x) = \int_a^b K(x, t) v_n(t)\, dt$$

im Mittel gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert.

Möge eine Funktion $u(x)$ der Bedingung (3) genügen und eine stetige Ableitung besitzen. Dann ist offensichtlich

$$u(x) = \int_a^b u'(t)\, dt.$$

Setzt man

$$v(x) = \sqrt{p(x)}\, u'(x), \qquad K_0(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{p(t)}}, & a \leq t \leq x, \\ 0, & x \leq t \leq b, \end{cases} \tag{8}$$

so kann man die letzte Gleichung in der Form

$$u(x) = \int_a^b K_0(x, t) v(t)\, dt \tag{$6_1$}$$

darstellen. Diese Identität wurde unter der Voraussetzung gewonnen, daß $u(x)$ eine stetige Ableitung besitzt, jedoch läßt sie sich auf beliebige Funktionen mit endlicher Energie ausdehnen.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß in unserem Falle das Integral (7) endlich ist, so daß Satz 1 anwendbar ist. Aus Formel (8) ist nämlich ersichtlich, daß für alle möglichen Werte von $x$ und $t$ des Segmentes $[a, b]$

$$0 \leq K_0(x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{p(t)}}$$

gilt, und deshalb wird

$$\int_a^b \int_a^b K_0^2(x, t)\, dx\, dt \leq \int_a^b \int_a^b \frac{dx\, dt}{p(t)} = A(b - a) < \infty.$$

Jetzt sei eine Menge von Funktionen $u(x)$ gegeben, deren energetische Norm insgesamt beschränkt ist: $|u(x)| \leq C = \text{const}$. Nach Formel (5) ist

$$\int_a^b p(x)u'^2(x)\,dx \leq C^2$$

oder, wenn man die Funktion $v(x)$ nach Formel (8) einführt, $\|v\| \leq C$. Nach Satz 1 des vorliegenden Paragraphen ist die Menge der Funktionen $u(x)$ kompakt. Dann aber ist die Bedingung des Satzes 3, § 31 erfüllt; daraus folgt, daß *der Operator (1) bei den Randbedingungen* (2) *und* (3) *ein diskretes Spektrum hat.*

Wir formulieren dieses Ergebnis ausführlicher: Es existieren eine unendliche, wachsende Folge von positiven Zahlen $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$ und ihnen entsprechende Funktionen $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, die der Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du_n}{dx}\right) + ru_n - \lambda u_n = 0 \tag{9}$$

sowie den Randbedingungen (2) und (3) genügen. Die Funktionen $u_n(x)$ sind orthonormiert im gewöhnlichen Sinne:

$$(u_n, u_m) = \int_a^b u_n(x)u_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{10}$$

und orthogonal bezüglich der Energie:

$$[u_n, u_m] = \int_a^b (pu_n'u_m' + ru_n u_m)\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,u_n(b)u_m(b) = 0, \qquad n \neq m; \tag{11}$$

außerdem ist

$$|u_n|^2 = \int_a^b (pu_n'^2 + ru_n^2)\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,u_n^2(b) = \lambda_n; \tag{12}$$

das System der Funktionen $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ ist vollständig sowohl bezüglich der Energie, als auch im Sinne der Konvergenz im Mittel.

Es kann vorkommen, daß die Funktion $r(x)$ auch negative Werte annimmt. Wir nehmen an, daß diese Funktion im ganzen jedoch beschränkt bleibt: $|r(x)| \leq C$. Dann genügt der Operator $A_C u = A_u + (C+1)u$ den Bedingungen des vorliegenden Paragraphen. Daraus folgt die Existenz einer unendlichen Folge positiver Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ für den Operator $A_C$. Dann hat aber der Operator $A$ eine unendliche Menge von Eigenwerten $\lambda_1 - C - 1, \lambda_2 - C - 1, \ldots, \lambda_n - C - 1, \ldots$; davon kann eine endliche Anzahl negativ oder gleich Null sein.

3. Jetzt sei der Operator (1) auf den Funktionen gegeben, die den allgemeineren Randbedingungen

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \qquad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \tag{13}$$

genügen, wobei $\alpha > 0, \gamma > 0, \beta \geq 0, \delta \geq 0$ und mindestens einer der Koeffizienten $\beta$ und $\delta$ von Null verschieden sei. Es sei etwa $\beta > 0$. Wir zeigen, daß auch in diesem Falle die Bedingung des Satzes 1, § 32 erfüllt ist, so daß der Operator (1) auch bei den Randbedingungen (13) ein diskretes Spektrum hat.

Nach Formel (5), § 20 ist im gegebenen Falle

$$|u|^2 = \int_a^b (pu'^2 + ru^2)\, dx + \frac{\beta}{\alpha} u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} u^2(b);$$

wir unterdrücken unter dem Integral den nicht negativen Summanden $ru^2$ und außerhalb des Integrals den ebenfalls nicht negativen Summanden $\frac{\delta}{\gamma} u^2(b)$. Wir finden dann

$$|u^2| \geq \int_a^b pu'^2\, dx + \frac{\beta}{\alpha} u^2(a). \tag{14}$$

Eine Menge $M$ von Funktionen sei gegeben mit gemeinsam beschränkter energetischer Norm

$$|u| \leq C = \text{const}, \quad u \in M.$$

Aus Ungleichung (14) folgt

$$\int_a^b pu'^2\, dx \leq C^2, \tag{15}$$

$$|u(a)| \leq C \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{16}$$

Wir schreiben die Identität

$$u(x) = u(a) + \int_a^b u'(t)\, dt$$

hin; wenn man die Bezeichnungen (8) benutzt, kann man sie in die Form

$$u(x) = u(a) + \int_a^b K_0(x, t) v(t)\, dt \tag{17}$$

bringen. Wegen Ungleichung (15) ist $\|v\| \leq C$; man kann aus der Menge $M$ eine solche Folge $u_n(x)$ aussondern, daß die Funktionen

$$\int_a^b K_0(x, t) v_n(t)\, dt, \qquad v_n(t) = \sqrt{p(t)}\, u_n(t) \tag{18}$$

im Mittel konvergieren. Ferner sind wegen Ungleichung (16) die Werte $|u_n(a)|$ beschränkt; nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass[1] kann man aus der Folge

[1]) Siehe G. M. Fichtenholz [1], S. 105.

$u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Teilfoge $u_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ derart auswählen, daß die Folge $u_{n_k}(a)$ konvergiert. Jetzt ergibt sich aus der Identität (17), daß die Folge $u_{n_k}(x)$ im Mittel konvergiert.

4. Wir betrachten jetzt den Operator (1) bei den Randbedingungen

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{19}$$

Man kann stets annehmen, daß $r(x) \geq 1$ ist; hinreichend dafür ist es, den Operator $Au$ durch $Au + Cu$ zu ersetzen, wo $C$ eine hinreichend große positive Konstante ist; alle Eigenwerte des Operators $A$ werden dann einfach um $C$ vergrößert. Bei den Bedingungen (19) haben wir

$$|u|^2 = \int_a^b (pu'^2 + ru^2)\,dx. \tag{20}$$

Eine Menge $M$ von Funktionen sei mit gemeinsam beschränkter Norm bezüglich der Energie gegeben:

$$|u| \leq C, \quad u \in M.$$

Dann ist, wie aus (20) folgt,

$$\int_a^b pu'^2\,dx \leq C^2 \tag{21}$$

und, da $r \geq 1$ ist,

$$\int_a^b u^2\,dx \leq C^2. \tag{22}$$

Wenn wir $v(x) = \sqrt{p(x)}\; u'(x)$ setzen, kommen wir wieder auf die Identität (17); nach dem Vorangegangenen überzeugen wir uns auf Grund der Ungleichung (21) von der Möglichkeit der Auswahl einer solchen Folge von Funktionen $u_n(x)$, daß die Folge (18) im Mittel konvergiert. Wir zeigen jetzt, daß die Werte $u_n(a)$ gemeinsam beschränkt sind. Wenn wir das Integral in (17) mit $w_n(x)$ bezeichnen, haben wir $u_n(a) = u_n(x) - w_n(x)$. Daraus folgt

$$u_n^2(a) \leq 2u_n^2(x) + 2w_n^2(x);$$

wir integrieren diese Ungleichung zwischen den Grenzen $a$ und $b$ und finden

$$u_n^2(a) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b u_n^2(x)\,dx + \frac{2}{b-a} \int_a^b w_n^2(x)\,dx. \tag{23}$$

Wegen Ungleichung (22) übersteigt das erste Integral in (23) $C^2$ nicht; wir zeigen, daß das zweite Integral in (23) ebenfalls beschränkt ist. Wegen der Ungleichung von Bunjakowski gilt nämlich

$$w_n^2(x) \leq \int_a^b K_0^2(x, t)\,dt \int_a^b v_n^2(t)\,dt.$$

Nach Ungleichung (21) ist

$$\int_a^b v_n^2(t)\,dt = \int_a^b p(t)\,u_n'^2(t)\,dt \leq C^2.$$

Ferner ist nach Formel (8) $0 \leq K_0(x, t) \leq \dfrac{1}{\sqrt{p(t)}}$ und deshalb

$$\int_a^b K_0^2(x, t)\,dt \leq \int_a^b \frac{dt}{p(t)} = A.$$

Also ist $w_n^2(x) \leq A\,C^2$ und demzufolge

$$\int_a^b w_n^2(x)\,dx \leq A\,C^2(b-a).$$

Jetzt wird

$$u_n^2(a) \leq \frac{2C^2}{b-a} + 2A\,C^2,$$

und die Größen $|u_n(a)|$ sind gemeinsam beschränkt. Wir wenden wieder den Satz von Bolzano-Weierstrass an und wiederholen die Überlegungen vom Ende des Punktes 3. Man überzeugt sich, daß es möglich ist, aus der Menge $M$ eine im Mittel konvergente Folge auszuwählen. Daraus ergibt sich auf Grund des Satzes 3 des § 30, daß der Operator (1) bei den Bedingungen (19) ein diskretes Spektrum hat.

5. Die Ausführungen des vorigen Punktes dieses Paragraphen lassen sich leicht auf die Gleichung

$$-\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + r(x)u - \lambda\varrho(x)u = 0 \tag{24}$$

übertragen, in welcher $p(x)$ und $r(x)$ den Bedingungen des Punktes 1 genügen, während $\varrho(x)$ den Ungleichungen $\varrho_0 \leq \varrho(x) \leq \varrho_1$ genügt, wo $\varrho_0$, $\varrho_1$ gewisse positive Konstanten sind. Der Klarheit halber beschränken wir uns auf die einfachsten Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{25}$$

obgleich es keine Mühe bereitet, auch andersartige Randbedingungen zu betrachten. Die Gleichung (24) gehört zu dem in § 34 untersuchten Typ; der Operator $Bu = \varrho(x)u$ ist nämlich positiv-definit, da

$$(Bu, u) = \int_a^b \varrho(x)u^2(x)\,dx \geq \varrho_0 \int_a^b u^2(x)\,dx = \varrho_0\|u\|^2$$

ist. Um zu zeigen, daß die Gleichung (24) ein diskretes Spektrum besitzt, braucht man sich nur zu überzeugen, daß die Bedingungen des Satzes 4, § 34 erfüllt sind.

In unserem Falle ist

$$|u|_A^2 = \int_a^b (pu'^2 + ru^2)\, dx; \qquad |u|_B^2 = \int_a^b \varrho u^2\, dx. \tag{26}$$

Aus der Identität $(6_1)$ folgt

$$\sqrt{\varrho(x)}\, u(x) = \int_a^b K_1(x, t)\, v(t)\, dt; \qquad K_1(x, t) = \sqrt{\varrho(x)}\, K_0(x, t).$$

Da die Funktion $\varrho(t)$ beschränkt ist, ist das Integral

$$\int_a^b\int_a^b K_0^2(x, t)\, dx\, dt = \int_a^b\int_a^b \varrho(x) K_1^2(x, t)\, dx\, dt$$

endlich, und man kann den Satz 1 des vorliegenden Paragraphen anwenden: Aus jeder Menge von Funktionen $v(x)$ mit gemeinsam beschränkter Norm kann man eine solche Folge $v_n(x)$ auswählen, daß die Folge der zugeordneten Funktionen $u_n(x)\sqrt{\varrho(x)}$ im Mittel konvergiert, oder, was dasselbe ist, daß die Folge $u_n(x)$ bezüglich der Energie des Operators $B$ konvergiert. Jetzt sei eine Menge von Funktionen $u(x)$ gegeben, für die $|u|_A \leq C$ ist. Dann gilt, wie aus (26) ersichtlich ist,

$$\|v\| = \left\{\int_a^b p(x) u'^2(x)\, dx\right\}^{1/2} \leq C,$$

und aus dem Gesagten ergibt sich, daß man aus der gegebenen Menge von Funktionen $u(x)$ eine Folge auswählen kann, die bezüglich der Energie des Operators $B$ konvergiert. Damit ist gezeigt, daß die Gleichung (24) ein diskretes Spektrum hat, d. h., daß eine Folge von nicht identisch verschwindenden Funktionen $u_n(x)$ existiert nebst diesen entsprechenden, offensichtlich positiven, Eigenwerten $\lambda_n$, die der Gleichung (24) und den Randbedingungen (25) genügen; die Funktionen $u_n(x)$ sind orthonormiert bezüglich der Energie des Operators $B$, d. h. orthonormiert mit dem Gewicht (siehe § 10, S. 57) $\varrho(x)$

$$[u_n, u_m]_B = \int_a^b \varrho(x) u_n(x) u_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

sie sind ferner orthogonal bezüglich der Energie des Operators $A$: Es gilt

$$[u_n, u_m]_A = \int_a^b (p u_m' u_n' + r u_m u_n)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \lambda_n, & m = n. \end{cases}$$

Wir haben die Diskretheit des Spektrums des Operators (1) [und ebenfalls der Gleichung (24)] unter der Voraussetzung gezeigt, daß das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{p(x)}$$

endlich ist.

An sich kann man auch unter schwächeren Voraussetzungen zeigen, daß das Spektrum diskret ist. So genügt es vorauszusetzen, daß das Integral

$$\int_a^b \frac{(x-a)\,dx}{p(x)}$$

endlich bleibt, wobei es in manchen Fällen nötig ist, den Charakter der Randbedingungen im Punkt $x = a$ abzuändern. Ausführlich sehe man hierzu den Artikel des Verfassers [15].

6. Wir gehen jetzt zur Gleichung mit beliebiger gerader Ordnung über:

$$Au - \lambda Bu = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right] - \lambda \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[\varrho_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right] = 0, \quad (27)$$

in welcher $s < m$ ist. Wir wollen diese Gleichung bei den einfachsten Randbedingungen

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0 \quad (28)$$

betrachten.

Zur Vereinfachung der Untersuchung nehmen wir an, daß alle Koeffizienten $p_k(x)$ und $\varrho_k(x)$ nicht negativ und beschränkt sind und daß $p_m(x) \geq p_0$, $\varrho_s(x) \geq \varrho_0$ ist, wo $p_0$ und $\varrho_0$ positive Konstanten sind. Unter diesen Voraussetzungen sind die Operatoren $A$ und $B$ in der Gleichung (27) positiv-definit (siehe § 20), wobei

$$|u|_A^2 = \int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx \quad (29)$$

und

$$|u|_B^2 = \int_a^b \sum_{k=0}^{s} \varrho_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx \quad (30)$$

gilt. Wir bemerken noch, daß die Konvergenz bezüglich der Energie des Operators $B$ die Konvergenz im Mittel sowohl der Funktionen selbst als auch ihrer Ableitungen bis zur $s$-ten Ordnung einschließlich bedeutet.

Wir zeigen, daß bei den angeführten Bedingungen die Gleichung (27) ein diskretes Spektrum hat. Dazu genügt es, festzustellen, daß die Voraussetzungen des Satzes 4, § 34 erfüllt sind.

a) Es sei eine Menge $M$ von Funktionen gegeben, die bezüglich der Energie des Operators $A$ beschränkt sind: $|u|_A \leq C$, $u \in M$, oder ausführlicher

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx \leq C^2.$$

Dann gilt

$$\int_a^b \left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)^2 dx \leq \frac{C^2}{p_0}. \tag{31}$$

b) Im Punkt $a$ verschwinden die Funktion $u(x)$ und ihre Ableitungen der Ordnung $\leq m-1$. Daraus folgt [SMIRNOW [2], Punkt 15, Formel (23)]

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int_a^x (x-t)^{m-1} u^{(m)}(t)\,dt. \tag{32}$$

Differenziert man $k$-mal, $k = 1, 2, \ldots, S$, so erhält man

$$u^{(k)}(x) = \frac{1}{(m-k-1)!}\int_a^x (x-t)^{m-k-1} u^{(m)}(t)\,dt. \tag{33}$$

Die Integrale (32) und (33) fallen unter die allgemeine Form (6), man braucht nur

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-t)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}, & a \leq t \leq x, \\ 0 & , x < t \leq b \end{cases}$$

zu setzen.

Wenn man den Satz 1 auf das Integral (32) anwendet, wird klar, daß man aus der Menge $M$ eine im Mittel konvergente Folge $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ auswählen kann. Wir setzen in (33) $u_n(x)$ statt $u(x)$ ein und setzen dann $k = 1$. Auf Grund des Satzes 1 kann man aus der Folge $u_n(x)$ eine solche Teilfolge $u_{n1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ aussondern, daß nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Ableitungen im Mittel konvergent sind. Wir setzen in (33) $u_{n1}(x)$ an Stelle von $u(x)$ und $k = 2$ und wenden wiederum Satz 1 an. Dieser Prozeß läßt sich fortsetzen, und man kommt zu dem Schluß, daß sich aus der gegebenen Menge $M$ eine Folge aussondern läßt, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur $s$-ten Ordnung einschließlich im Mittel konvergiert. Wie schon bemerkt wurde, folgt daraus die Diskretheit des Spektrums der Gleichung (27) bei den Randbedingungen (28).

## § 36. Stabilität eines Stabes unter Druck

Wir betrachten einen Stab von im allgemeinen veränderlichem Querschnitt, der durch zwei Längskräfte vom Betrag $P$, die auf seine Enden wirken, zusammengedrückt werde. Die Differentialgleichung der gebogenen Stabachse hat die Gestalt

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left(J(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) + P\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{1}$$

wo $E$ der YOUNGsche Modul des Stabmaterials und $J(x)$ das Trägheitsmoment seines Querschnittes mit der Abszisse $x$ ist. Zu dieser Gleichung kommen noch Rand-

bedingungen hinzu, die von der Art der Befestigung der Enden des Stabes abhängen. Wir beschränken uns hier auf zwei Typen der Befestigung:

1. Beide Enden des Stabes sind fest eingespannt. Unter der Annahme, daß die Stabachse im ungebogenen Zustand das Intervall $[0, l]$ der $x$-Achse einnimmt, haben wir in diesem Falle

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0; \tag{2}$$

2. beide Enden des Stabes sind beweglich (durch Scharniere) eingespannt; in diesem Falle ist

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0. \tag{3}$$

Die Untersuchung anderer Arten der Einspannung bereitet keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Das Stabilitätsproblem für den Druckstab besteht in der Auffindung der Werte der „kritischen Belastungen", bei welchen die Gleichung (1) eine nichttriviale Lösung besitzt, die den Randbedingungen (2) oder (3) genügt. Besonderes Interesse besteht für die kleinste kritische Last.

Die Gleichung (1) fällt unter den Typ (27) des § 35; die Rolle des Parameters $\lambda$ spielt $P$. Dabei ist

$$Ay = E\frac{d^2}{dx^2}\left(J(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right), \qquad By = -\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Durch partielle Integration ergibt sich ohne große Mühe, daß sowohl für die Randbedingungen (2) als auch für die Randbedingungen (3)

$$|y|_A^2 = (Ay, y) = E\int_0^l J(x)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx,$$

$$|y|_B^2 = (By, y) = \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

gilt. Das Stabilitätsproblem für den Druckstab führt auf das Eigenwertproblem (insbesondere für den kleinsten Eigenwert) für die Gleichung (1) bei den Randbedingungen (2) oder (3). Der Fall der Randbedingungen (2) wurde im wesentlichen im vorigen Paragraphen untersucht. Wenn nicht einer der Stabquerschnitte in einen Punkt oder in eine Linie ausartet, so daß $J(x)$ nirgends verschwindet, dann existiert eine unendliche Menge kritischer Lasten; die kleinste davon wird durch die Formel

$$P_1 = \min\frac{|y|_A^2}{|y|_B^2} = E\cdot\min\frac{\int_0^l J(x)\,y''^2(x)\,dx}{\int_0^l y'^2(x)\,dx} \tag{4}$$

bestimmt; das Minimum ist zu bestimmen in der Klasse der den Bedingungen (2) genügenden Funktionen.

Den Fall der Einspannung der Enden durch Scharniere kann man ebenfalls untersuchen, indem man sich auf die Sätze 1, § 34 und 4, § 32 stützt; die kleinste kritische Last ist wie vorher durch die Formel (4) bestimmt, jedoch kann man diesmal das Minimum in der weiteren Klasse der Funktionen suchen, die nur den Bedingungen $y(0) = y(l) = 0$ genügen; die Bedingungen $y''(0) = y''(l) = 0$ sind die natürlichen. Die Erweiterung der Funktionenklasse vermindert im allgemeinen das Minimum; daraus folgt, daß bei beweglicher Einspannung (durch Scharniere) der Stabenden die kleinste kritische Last kleiner als bei fester Einspannung ist.

Das Stabilitätsproblem für den durch Scharniere an den Enden eingespannten Stab läßt sich leicht auf ein Eigenwertproblem einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen. Wir setzen $Jy'' = u$. Die Funktion $u$ genügt den Randbedingungen

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{5}$$

und der Differentialgleichung

$$E\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{P}{J}u = 0. \tag{6}$$

Die Gleichung (6) fällt unter den Typ (24) des § 35, wenn man $p(x) = E$, $r(x) = 0$, $\varrho(x) = \frac{1}{y}$ setzt. Der kleinste Eigenwert dieser Gleichung ist nach Satz 5, § 34 gleich dem Minimum des Quotienten

$$E\frac{\int\limits_0^l u'^2\,dx}{\int\limits_0^l \frac{u^2}{J}\,dx}$$

oder, was dasselbe ist, gleich dem Minimum des Funktionals

$$E\int\limits_0^l u'^2\,dx$$

bei der Nebenbedingung

$$\int\limits_0^l \frac{u^2}{J}\,dx = 1;$$

das Minimum ist zu suchen in der Klasse der den Randbedingungen (5) genügenden Funktionen.

Wir bemerken, daß die Gleichung (6) in die bekannte Eulersche Gleichung übergeht, wenn der Querschnitt des Stabes konstant ist.

## § 37. Eigenwerte elliptischer Operatoren

Der Übergang von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu partiellen Differentialgleichungen bringt für die Eigenwertprobleme gewisse Schwierigkeiten mit sich; es gelingt bei weitem nicht in allen Fällen die Untersuchung mit mehr oder weniger einfachen Mitteln durchzuführen. Wir beschränken die Betrachtungen auf nichtausgeartete elliptische Gleichungen zweiter Ordnung und auf die Gleichung der Plattenbiegung.

1. Ebenso wie im vorigen Paragraphen ist hier der Satz 3 des § 30 das Hauptuntersuchungsinstrument. Dessen Anwendung stützte sich seinerseits früher auf Satz 1 des § 35. Für die Ziele des vorliegenden Paragraphen ist der letzte Satz jedoch nicht ausreichend; an seiner Stelle wird ein anderer Satz benutzt, zu dessen Formulierung wir noch kommen. Wir betrachten ein endliches Gebiet $\Omega$ im Raum von $m$ Veränderlichen, $P$ und $Q$ seien Punkte des Gebietes $\Omega$ und $r$ der Abstand zwischen diesen Punkten. Wenn die Konstante $\alpha$ zwischen den Grenzen $0 < \alpha < m$ eingeschlossen und die Funktion $A(P, Q)$ beschränkt ist, dann wollen wir den Operator

$$K v = \int_{\Omega} \frac{A(P, Q)}{r^{\alpha}}\, v(Q)\, d\Omega_Q \tag{0}$$

als *Integraloperator mit schwacher Singularität* bezeichnen, seinen Kern $\frac{A(P,Q)}{r^{\alpha}}$ als *Kern mit schwacher Singularität*.

Es gilt der

**Satz 1.** *Ein Integraloperator mit schwacher Singularität überführt jede Menge von bezüglich der Norm beschränkten Funktionen in eine im Sinne der Konvergenz im Mittel kompakte Menge von Funktionen.*[1])

2. Der Klarheit halber wollen wir annehmen, daß $\Omega$ ein Gebiet im dreidimensionalen Raum ist. $P(x, y, z)$ und $Q(\xi, \eta, \zeta)$ seien Punkte des Gebietes $\Omega$. Wir betrachten eine Funktion $u(Q)$, die im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$[2]) stetig differenzierbar ist und auf $S$ verschwindet. Wir umgeben den Punkt $P$ durch eine Kugelfläche $S_\varepsilon$ mit dem Mittelpunkt in $P$ und hinreichend kleinem Radius $\varepsilon$ derart, daß diese Kugel vollständig im Innern von $\Omega$ liegt; den verbleibenden Teil des Gebietes $\Omega$ bezeichnen wir mit $\Omega_\varepsilon$. Wir bilden das Integral

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \operatorname{grad} u\, d\Omega_Q = \int_{\Omega_\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\Omega_Q$$

und wenden darauf Formel (8), § 2 an; dabei muß man beachten, daß der Rand des Gebietes $\Omega_\varepsilon$ aus zwei Flächen besteht, $S$ und $S_\varepsilon$, deshalb enthält unsere Formel

---

[1]) Den Beweis dieses Satzes kann man z. B. in dem Buch des Verfassers [11] finden.

[2]) Wie gewöhnlich wird mit $S$ der Rand des Gebietes $\Omega$ bezeichnet.

zwei Flächenintegrale, und wir bekommen

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)d\Omega_Q$$

$$= -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u\Delta\frac{1}{r}\,d\Omega_Q+\int\limits_{S} u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\,dS+\int\limits_{S_\varepsilon} u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\,dS_\varepsilon.$$

Bekanntlich (man kann das leicht unmittelbar verifizieren) gilt $\Delta\frac{1}{r}=0$. Außerdem besteht hier die Bedingung $u\,|_S=0$, deshalb verschwinden die ersten beiden Integrale rechts, und wir erhalten

$$\int\limits_{S_\varepsilon} u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\,dS_\varepsilon=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)d\Omega.$$

In Formel (8), § 2, welche wir hier benutzt haben, bedeutet $\nu$ die Außennormale in bezug auf das Gebiet, deshalb ist die Normale zur Kugelfläche $S_\varepsilon$ nach deren Zentrum gerichtet, und es gilt

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}=-\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Auf die Kugelfläche $S_\varepsilon$ führen wir sphärische Koordinaten $\vartheta$ und $\varphi$ ein, $0\le\vartheta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Dann wird $dS_\varepsilon=\varepsilon^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ und $\xi=x+\varepsilon\sin\vartheta\cos\varphi$, $\eta=y+\varepsilon\sin\vartheta\sin\varphi$, $\zeta=z+\varepsilon\cos\vartheta$. Setzt man das in die letzte Gleichung ein, so geht sie in die Form

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} u(x+\varepsilon\sin\theta\cos\varphi,\ \ y+\varepsilon\sin\theta\sin\varphi,\ \ z+\varepsilon\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)d\Omega$$

über. Wir führen jetzt den Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ durch. Auf der rechten Seite der Gleichung läuft das einfach auf die Ersetzung des Integrationsgebietes $\Omega_\varepsilon$ durch $\Omega$ hinaus, links erhält man im Ergebnis des Grenzüberganges

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} u(x,y,z)\sin\theta\,d\theta=u(x,y,z)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=4\pi u(x,y,z)=4\pi u(P).$$

Division beider Seiten der Gleichung durch $4\pi$ ergibt die wichtige Formel

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) d\Omega, \tag{1}$$

die also gilt, wenn die Funktion $u$ auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ verschwindet.

Das Integral in (1) zerfällt in natürlicher Weise in drei Integrale; es ist leicht zu sehen, daß der Kern jedes von ihnen eine schwache Singularität besitzt. So ist etwa

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = \frac{x-\xi}{r^3} = \frac{x-\xi}{r}\cdot\frac{1}{r^2};$$

hier ist die Funktion

$$A(P, Q) = \frac{x-\xi}{r}$$

beschränkt (weil $|x-\xi| \leq r$ und deshalb $|A(P,Q)| \leq 1$ ist), während der Exponent $\alpha = 2$ kleiner als die Zahl der Dimensionen des Raumes ist.

Eine der Formel (1) analoge Formel kann man auch dann erhalten, wenn die Zahl der Dimensionen des Raumes nicht gleich 3 ist; insbesondere erhält man, wenn $\Omega$ ein ebenes Gebiet ist und die Funktion $u(x, y)$ auf dessen Rand verschwindet,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial \eta}\right) d\Omega. \tag{1$_1$}$$

3. Wir stellen jetzt das Eigenwertproblem für den Differentialoperator vom elliptischen Typ

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu \tag{2}$$

bei der Bedingung, daß auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ die Bedingung $u = 0$ erfüllt ist; bezüglich der Koeffizienten $A_{jk}$ und $C$ halten wir die Forderungen des § 24 aufrecht, so daß der Operator $L$ positiv-definit ist. Wenn speziell

$$A_{jj} = 1; \qquad A_{jk} = 0, \quad j \neq k$$

ist, erhalten wir das Eigenwertproblem für den Laplace-Operator. Wir zeigen[1]), daß für diesen Operator die Voraussetzungen des Satzes 3, § 31 erfüllt sind. Nach den Formeln (7) und (9) des § 24 hat man

$$|u|^2 = (Lu, u) \geq \mu_0 \int_\Omega \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_j}\right)^2 d\Omega.$$

[1]) Der unten angeführte Beweis wurde vom Verfasser in [12] gegeben.

Nimmt man der Klarheit halber die Zahl der Dimensionen des Raumes zu $m = 3$ an, dann läßt sich die letzte Ungleichung auf die Form

$$|u|^2 \geq \mu_0 \int\limits_{\Omega} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2 \right] d\Omega \tag{3}$$

bringen.

Eine Menge $M$ von Funktionen mit gemeinsam beschränkten Normen bezüglich der Energie sei gegeben: $|u| \leq C$, $u \in M$. Aus der Ungleichung (3) ergibt sich dann, daß

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \xi}\right\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 d\Omega \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{\sqrt{\mu_0}}; \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu_0}}, \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu_0}} \tag{4}$$

ist. Da $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$ ein schwach singulärer Kern ist, und die Normen der Funktionen $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ gemeinsam beschränkt sind, wenn $u$ eine beliebige Funktion aus der Menge $M$ ist, kann man wegen Satz 1 aus der Menge $M$ eine solche Folge $u_{1n}(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ aussondern, daß die Integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_{1n}}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\Omega \tag{5}$$

im Mittel gegen einen gewissen Grenzwert konvergieren. Die Normen der Funktionen $\frac{\partial u_{1n}}{\partial \eta}$ sind gemeinsam beschränkt, weil $u_{1n} \in M$ und deshalb, infolge der Ungleichung (4),

$$\left\|\frac{\partial u_{1n}}{\partial \eta}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu_0}}$$

ist. Bei Anwendung des Satzes 1 finden wir wiederum, daß man aus der Folge $u_{1n}(P)$ eine Teilfolge $u_{2n}(P)$ derart auswählen kann, daß die Integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_{2n}}{\partial \eta} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} d\Omega$$

im Mittel konvergieren; dabei konvergiert offensichtlich auch die eine Teilfolge von (5) bildende Folge

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_{2n}}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\Omega$$

im Mittel, ihr Grenzwert fällt mit dem Grenzwert der Folge (5) zusammen. Analog findet man, daß es möglich ist, aus der Folge $u_{2n}$ eine solche neue Teilfolge auszuwählen, wir bezeichnen sie einfach mit $u_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, daß alle drei Integrale

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial \xi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,d\Omega,\quad \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\,d\Omega,\quad \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial \zeta}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,d\Omega \tag{6}$$

für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergieren. Aber dann ist aus Formel (1) ersichtlich, daß auch die Funktionen $u_n(P)$ selbst im Mittel gegen einen Grenzwert, der gleich der Summe der Grenzwerte der Integrale (6) ist, konvergieren. Es ist uns also gelungen, aus der Menge $M$ der Funktionen mit beschränkter Energie eine im Mittel konvergente Folge von Funktionen $u_n(P)$ auszuwählen; auf Grund des Satzes 3, § 31 schließen wir jetzt, daß *bei der Bedingung* $u|_S = 0$ *der nicht ausgeartete elliptische Operator* (2) *in einem endlichen Gebiet* $\Omega$ *ein diskretes Spektrum besitzt; der kleinste Eigenwert dieses Operators ergibt sich aus der Formel*

$$\lambda_1 = \min \int_\Omega \left( \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2 \right) d\Omega,$$

*wobei das Minimum in der Klasse derjenigen Funktionen zu suchen ist, die auf dem Rand des Gebietes verschwinden und der Beziehung*

$$\int_\Omega u^2\, d\Omega = 1$$

*genügen.* Speziell ist der kleinste Eigenwert des Operators $-\Delta$ ($\Delta$ ist der LAPLACE-Operator) gleich dem Minimum des Integrals

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

auf der soeben erwähnten Funktionenklasse.

4. Das Problem der Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen einer Platte mit fest eingespanntem oder gestütztem Rand führt auf das Eigenwertproblem des biharmonischen Operators $\Delta^2$; die zugehörigen Eigenfunktionen genügen den Randbedingungen

$$w|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0, \tag{7}$$

wenn der Rand der Platte fest eingespannt ist und den Bedingungen

$$w|_S = 0, \qquad \left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_S = 0, \tag{8}$$

wenn der Rand frei gestützt ist. Aus den Formeln (16), (17) und (25) des § 27 ergibt sich, daß bei beiden Bedingungen für die Einspannung die Ungleichung

$$|w|^2 \geq c \iint_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dS \qquad (9)$$

gilt, wo $c$ eine positive Konstante ist, die bei den Bedingungen (7) gleich $\varkappa$ ist und bei den Bedingungen (8) gleich $\frac{1-\sigma}{A}$; wie schon in § 27 bezeichnen wir mit $S$ das von der Platte eingenommene Gebiet.

Eine Menge $M$ von Funktionen mit gemeinsam beschränkter Norm bezüglich der Energie sei gegeben: $|w| \leq C$, $w \in M$. Nach Ungleichung (9) ist

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{c}}, \qquad \left\|\frac{\partial w}{\partial y}\right\| \leq \frac{C}{\sqrt{c}};$$

aus der Formel ($1_1$) und Satz 1 ergibt sich jetzt, daß sich aus der Menge $M$ eine im Mittel konvergente Folge aussondern läßt; mit anderen Worten, die Menge $M$ ist kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel. Aus Satz 3, § 31 ergibt sich dann, daß *sowohl im Falle des fest eingespannten Randes als auch im Falle des frei gestützten Randes der biharmonische Operator ein diskretes Spektrum hat.*

5. Wir machen jetzt folgende Bemerkung. Den kleinsten Eigenwert des Operators $\Delta^2$ bei den Bedingungen (7) bezeichnen wir mit $\lambda_1$, denselben Wert bei den Bedingungen (8) mit $\mu_1$. Nach der allgemeinen Formel (3) des § 33 kann man die Zahlen $\lambda_1$ und $\mu_1$ beide als Minimum des Quotienten

$$\frac{|w|^2}{\|w\|^2}$$

gewinnen, mit dem Unterschied, daß im ersten Falle das Minimum auf den den Bedingungen (7) genügenden Funktionen zu bestimmen ist, während es im zweiten Falle auf den nur der ersten der Bedingungen (8) genügenden Funktionen zu suchen ist; die zweite Bedingung (8) ist natürlich. Im Falle des frei gestützten Randes der Formel (21), § 28 wird

$$|w|^2 = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} dS, \qquad (10)$$

während im Falle des fest eingespannten Randes (Formel 16, § 27)

$$|w|^2 = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} dS \qquad (11)$$

gilt. Man überzeugt sich jedoch durch Multiplikation der Gleichung ($6_2$), § 27 mit $-2\sigma$ und anschließender Addition zu (11), daß die Formel (10) auch im Falle des fest eingespannten Randes gültig ist.

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß $\lambda_1$ und $\mu_1$ die Minima ein und desselben Ausdruckes

$$\frac{\iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \right\} dS}{\iint\limits_S w^2\, dS} \tag{12}$$

sind, nur ist das erste Minimum auf einer engeren Funktionenklasse zu suchen. Daraus folgt, daß $\lambda_1 \geq \mu_1$ ist, d. h. daß die kleinste Eigenfrequenz für die Schwingung der frei gestützten Platte die kleinste Eigenschwingungsfrequenz der am Rand fest eingespannten Platte nicht übersteigt. In § 40 kehren wir zu dieser Frage in allgemeinerem Zusammenhang zurück.

6. Man kann zeigen, daß ein elliptischer nicht ausgearteter Operator im Falle eines endlichen Gebietes $\Omega$ ein diskretes Spektrum auch für die anderen in § 24 betrachteten Randbedingungen besitzt, doch ist der Beweis in diesem Falle wesentlich komplizierter. Er ist z. B. in dem Buch des Verfasser [11] durchgeführt.

7. Es ist nicht schwierig, Beispiele für Differentialoperatoren anzuführen, die kein diskretes Spektrum besitzen. Ohne Beweis bemerken wir, daß im Falle eines unendlichen Gebietes $\Omega$ das Spektrum des Laplace-Operators nicht diskret ist, außerdem hat der Laplace-Operator in diesem Falle nicht eine einzige Eigenfunktion mit endlicher Norm. Bei gewissen Bedingungen haben ausgeartete elliptische Operatoren nicht einmal bei endlichem Gebiet $\Omega$ ein diskretes Spektrum.[1])

## § 38. Stabilität einer Platte unter Druck

Wir wollen die Biegung einer Platte betrachten, in deren Ebene die Spannungen $T_x, T_{xy}, T_y$ wirken. Wir wollen annehmen, daß es sich um Druckspannungen handelt. Wir verstehen darunter, daß in einem beliebigen Punkt der Platte die Hauptnormalspannungen $T_1$ und $T_2$ Drücke darstellen: $T_1 < 0$, $T_2 < 0$. Wir nehmen ebenfalls an, daß sowohl $T_1$ als auch $T_2$ dem absoluten Betrage nach stets größer bleiben als eine positive Konstante $T_0$, so daß $|T_1| \geq T_0$, $|T_2| \geq T_0$ gilt oder, da $T_1$ und $T_2$ negativ sind,

$$T_1 \leq -T_0, \quad T_2 \leq -T_0.$$

In § 28 wurde angemerkt, daß der Ausdruck

$$T_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

invariant gegen eine Drehung der Koordinatenachsen ist; wir legen die Koordinatenachsen so, daß sie mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen.

---

[1]) Siehe die Arbeit des Verfassers [16].

Wir finden

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+T_2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2$$
$$\leq -T_0\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right].$$

Der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2=(\operatorname{grad} w)^2$$

ist ebenfalls invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems; daraus ergibt sich

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

und schließlich

$$T_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2T_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+T_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\leq -T_0\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{1}$$

Wir wollen voraussetzen, daß der Rand der Platte fest eingespannt ist

$$w\,|_L=0,\quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L=0. \tag{2}$$

Die Ungleichung (1) zusammen mit den Formeln (4) und (9) des § 28 besagen, daß der Operator $T$ positiv-definit ist.

Wir nehmen jetzt an, daß sich die Spannungen, die weiter kompressiv bleiben sollen, proportional zu einem Parameter ändern, welcher demzufolge positiv sein muß. Wie in § 29 erläutert wurde, ist der Verlust der Stabilität der Platte bei denjenigen Werten von $\lambda$ möglich, die Eigenwerte der Gleichung (12), § 29 darstellen; wenn man die Bezeichnung

$$\tilde{T}w=-\frac{h}{D}\,Tw \tag{3}$$

einführt, kann man diese Gleichung in der Form

$$\Delta^2 w-\lambda\tilde{T}w=0 \tag{4}$$

schreiben. Wir bemerken, daß der Operator $\tilde{T}$ positiv-definit ist.

Wir zeigen jetzt, daß die Gleichung (4) bei den Bedingungen (2) eine unendliche Menge positiver Eigenwerte hat. Daraus ergibt sich dann, daß eine unendliche Menge von Parameterwerten existiert, bei welchen die Platte mit fest eingespanntem Rand ihre Stabilität verliert.

Die Gleichung (4) fällt unter den allgemeinen Typ der Gleichungen des § 34, wenn man $A=\Delta^2$, $B=\tilde{T}$ setzt. Wir haben unsere Behauptung bewiesen, wenn wir in Übereinstimmung mit Satz 4, § 34 zeigen, daß jede bezüglich der Energie des Operators $A$ beschränkte Menge von Funktionen kompakt im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie des Operators $B$ ist.

In § 27 wurde festgestellt [Formel (16)], daß

$$|w|_A^2 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS \tag{5}$$

gilt. Ferner ist

$$|w|_B^2 = (\tilde{T} w, w) = -\frac{h}{D}\,(T w, w).$$

Nach Formel (10) des § 28 hat man jetzt

$$|w|_B^2 \leq \frac{2\,N h}{D} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS, \tag{6}$$

wo $N$ das größte der Maxima der Größen $|T_x|$, $|T_{xy}|$, $|T_y|$ bezeichnet.

Jetzt sei eine Menge $M$ von den Bedingungen (2) genügenden Funktionen gegeben, und es sei $|w|_A \leq C$, wenn $w \in M$. Aus Formel (5) schließt man dann leicht, daß

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \right\} dS \leq C^2 \tag{7}$$

und

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS \leq C^2 \tag{8}$$

gilt. Aus der Bedingung (2) ergibt sich, daß

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_L = 0 \tag{9}$$

ist. Möge $\Delta$ wie gewöhnlich den Laplace-Operator bezeichnen. Wir betrachten den positiv-definiten Operator $-\Delta$, der auf den auf der Kurve $L$ verschwindenden Funktionen gegeben sei. Aus (9) ist ersichtlich, daß, wenn $w \in M$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ im Definitionsbereich des Operators $-\Delta$ liegen, während die Ungleichungen (7) und (8) besagen, daß die Ableitungen gemeinsam beschränkt bezüglich der Energie dieses Operators sind. Aus den Ergebnissen des § 37 folgt dann, daß die Menge der Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel ist. Also kann man aus der Menge $M$ eine solche Folge $w_n$, $n = 1, 2, \ldots$ auswählen, daß die entsprechenden Folgen $\frac{\partial w_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial w_n}{\partial y}$ im Mittel konvergieren. Dann gilt aber

$$\lim_{n, m \to \infty} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = 0,\right.$$

$$\lim_{n, m \to \infty} \iint_S \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 dx\, dy = 0.$$

Jetzt folgt aus der Ungleichung (6), daß

$$|w_n - w_m|_B^2 \leq \frac{2Nh}{D} \iint\limits_S \left\{ \left( \frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

gilt, was aber bedeutet, daß die Folge $w_n$, $n = 1, 2, \ldots$ bezüglich der Energie des Operators $B$ konvergiert, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Den kleinsten kritischen Wert des Parameters $\lambda$ kann man finden als Minimum des Integrals (5) bei der Bedingung

$$|w|_B^2 = -\frac{h}{D} \iint\limits_S \left\{ T_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS = 1. \tag{10}$$

Das Minimum ist zu bestimmen auf der Menge der Funktionen, die den Bedingungen (2) für den fest eingespannten Rand genügen. Unter Verwendung des Einbettungssatzes von S. L. Sobolew [2] kann man die Existenz einer unendlichen Menge kritischer Parameterwerte auch bei den anderen gewöhnlich vorkommenden Bedingungen für die Befestigung des Randes beweisen.

## § 39. Eigenschwingungen elastischer Körper

Im vorliegenden Paragraphen betrachten wir das Problem der Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit eingespanntem Rand und zeigen, daß ein solcher Körper eine unendliche Menge von Eigenfrequenzen hat. Zur Vereinfachung der Schreibweise sprechen wir in den Bezeichnungen des § 26 und wollen darüber hinaus folgende Bezeichnungen benutzen: $\Omega$ ist ein endliches Gebiet des dreidimensionalen euklidischen Raumes; $S$ ist die Begrenzung des Gebietes $\Omega$; $\overline{\Omega} = \Omega + S$; $P$ und $Q$ sind Punkte mit den kartesischen Koordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ bzw. $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$. Ferner sei $\mathfrak{u}$ der Verschiebungsvektor; die Komponenten dieses Vektors bezüglich der Achsen $x_1$, $x_2$, $x_3$ des kartesischen Koordinatensystems bezeichnen wir mit $u_1$, $u_2$, $u_3$. Wir setzen noch

$$s_{ik} = s_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \tag{1}$$

die Größen $s_{ik}$ sind gleich den durch 2 dividierten Komponenten des Deformationstensors. Die Komponenten des Spannungstensors wollen wir mit $\tau_{ik}$ bezeichnen; sie genügen den Gleichungen des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes

$$\tau_{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm} s_{lm} = \tau_{ki}; \tag{2}$$

die elastischen Konstanten $c_{iklm}$ sind den bekannten Symmetriebeziehungen

$$c_{iklm} = c_{kilm} = c_{ikml} = c_{lmik}$$

unterworfen, so daß es nicht mehr als 21 verschiedene Koeffizienten $c_{iklm}$ gibt.

Mit den Spannungskomponenten gelten die bekannten Bewegungsgleichungen

$$\gamma \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} - K_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

wo $t$ die Zeit, $\gamma$ die Dichte des elastischen Mediums und $K_i$ die Komponenten des Vektors der Volumenkräfte $\mathfrak{K}$ sind. Setzt man hier die Werte $\tau_{ik}$ aus (2) ein, so erhält man die Gleichungen, denen der Vektor der elastischen Verschiebungen genügt. Wir schreiben diese Gleichungen in der Form der einen Vektorgleichung

$$\gamma \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} + \mathfrak{A}\mathfrak{u} - \mathfrak{K} = 0, \tag{3}$$

wo

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} (c_{iklm} s_{lm})\, \mathfrak{x}_i^{(0)} \tag{4}$$

ist; $\mathfrak{x}_i^{(0)}$ ist der Einheitsvektor der $x_i$-Achse. Wenn das Medium homogen ist, wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} c_{iklm} \frac{\partial s_{lm}}{\partial x_k}\, \mathfrak{x}_i^{(0)}.$$

Im Gleichgewichtsfall ist $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = 0$, und wir erhalten die Gleichungen für das elastische Gleichgewicht

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{K}. \tag{5}$$

Die Gleichung der freien Schwingungen erhalten wir, wenn wir $\mathfrak{K} \equiv 0$ voraussetzen und $\mathfrak{u}$ durch $\mathfrak{u}(P)\, e^{i\omega t}$ ersetzen. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{A}\mathfrak{u} - \lambda \mathfrak{u} = 0, \qquad \lambda = \gamma \omega^2. \tag{6}$$

Den Operator $\mathfrak{A}$ wollen wir den Operator der Elastizitätstheorie nennen.

Wir führen in die Betrachtung den symmetrischen Tensor $V_k$ ein, dessen Komponenten

$$v_{ik} = \frac{1}{12\varkappa} \left\{ \frac{5}{r}\, \delta_{ik} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} \tag{7}$$

sind, wo $r$ der Abstand der Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ und $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ voneinander und $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$ ist. $V$ ist ein Spezialfall des bekannten Tensors von SOMIGLIANA[1]); jede Spalte $\mathfrak{v}_i$ des Tensors $V$ genügt der homogenen Gleichung der Elastizitätstheorie eines isotropen Mediums, dessen LAMÉsche Konstanten die Werte $\lambda = 0$ und $\mu = \frac{1}{2}$ haben. Den zugehörigen Operator der Elastizitätstheorie wollen wir mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnen, so daß $\mathfrak{v}_i$ der Gleichung

$$\mathfrak{A}_0 \mathfrak{v}_i = 0 \tag{8}$$

genügt.

---

[1]) Siehe z. B. E. TREFFTZ [2].

Um den Punkt $P$ beschreiben wir eine Kugelfläche mit dem Radius $\varepsilon$, und auf das verbleibende Restgebiet $\Omega_\varepsilon$ des Gebietes $\Omega$ wenden wir die erste Formel von Betti an, indem wir $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'' = \mathfrak{v}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ setzen und unter $\mathfrak{u}$ einen beliebigen auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ verschwindenden Vektor verstehen. Dann entfällt das Integral über $S$; genau ebenso verschwindet das Integral auf der linken Seite der Bettischen Formel infolge der Gleichung (8), und wir kommen zu der Gleichung

$$\int_{\Omega_\varepsilon} W(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_i)\, d\Omega + \int_{S_\varepsilon} \mathfrak{t}_{i,\varepsilon}\, \mathfrak{u}\, dS = 0, \tag{9}$$

wo $S_\varepsilon$ die Oberfläche der oben erwähnten Kugel des Radius $\varepsilon$ und mit dem Mittelpunkt in $P$ ist, $\mathfrak{t}_{i,\varepsilon}$ ist der Spannungsvektor auf der Kugelfläche $S_\varepsilon$, der der Verschiebung $\mathfrak{v}_i$ entspricht. Setzt man in (9) $\varepsilon \to 0$, so erhält man, wie schon in § 37,

$$u_i(P) = \int_\Omega W(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_i)\, d\Omega.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß für $\lambda = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$

$$W(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_i) = \sum_{l,m=1}^{3} s_{lm} s_{lm}^{(i)}$$

wird, wo $2s_{lm}$ und $2s_{lm}^{(i)}$ die Deformationskomponenten sind, die den Verschiebungen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}^{(i)}$ entsprechen. Auf diese Weise erhält man

$$u_i(P) = \int_\Omega \sum_{l,m=1}^{3} s_{lm} s_{lm}^{(i)}\, d\Omega. \tag{10}$$

Das Integral (10) ist eine Summe von Integralen der Form

$$\psi_{lm}^{(i)}(P) = \int_\Omega s_{lm} s_{lm}^{(l)}\, d\Omega, \tag{11}$$

deren Kerne die Schranke

$$|s_{lm}^{(l)}| \leq \frac{C}{r^2}, \qquad C = \text{const}$$

haben und folglich in der Klasse der Kerne mit schwacher Singularität liegen. Dann aber überführt nach Satz 1, § 37 der Integraloperator (11) jede bezüglich der Norm beschränkte Menge von Funktionen $s_{lm}$ in eine Menge von Funktionen $\psi_{lm}^{(i)}$, die kompakt im Sinne der Konvergenz im Mittel ist.

Ausgehend von der Tatsache, daß der Kern des Integrals (11) schwach singulär ist, kann man die Ungleichung $\|\psi_{kl}^{(i)}\| \leq C_1 \|s_{kl}\|$, $C_1 = \text{const}$ aufstellen. Durch Summation ergibt sich

$$\|\mathfrak{u}\|^2 \leq C_2 \sum_{i,k,l=1}^{3} \|\psi_{k,l}^{(i)}\|^2 \leq C_3 \sum_{k,l=1}^{3} \|s_{kl}\|^2.$$

Gestützt auf die Positivität der Größe $W(\mathfrak{u})$ kann man beweisen, daß

$$\sum_{k,l=1}^{3} s_{kl}^2 \leq C_4 W(\mathfrak{u})$$

gilt.[1]) Dann aber gilt

$$\|\mathfrak{u}\|^2 \leq 2C_5 \int_\Omega W(\mathfrak{u})\, d\Omega, \qquad 2C_5 = C_3 C_4$$

oder nach Formel (14), § 26, $\|u\|^2 \leq C_5 (\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u})$, woraus

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) \geq \frac{1}{C_5} \|\mathfrak{u}\|^2 \tag{12}$$

folgt, d. h. *im Falle eingespannter Begrenzung eines Körpers ist der Operator der Elastizitätstheorie positiv-definit.*

Es wurde schon bemerkt, daß der Operator (11) eine beschränkte Menge von Funktionen in eine kompakte überführt. Aus Formel (10) folgt dann, daß die Menge der auf dem Rand des Körpers verschwindenden Verschiebungsvektoren kompakt ist, wenn die ihnen entsprechenden Energieintegrale gemeinsam beschränkt sind. Jetzt ergibt sich aus Satz 3, § 31 die Diskretheit des Spektrums des Operators der Elastizitätstheorie im Falle fester Einspannung des Randes des Körpers.

Der Operator der Elastizitätstheorie hat ein diskretes Spektrum auch bei den anderen gewöhnlich vorkommenden Randbedingungen. Eine ausführliche Untersuchung der hiermit zusammenhängenden Fragen wurde in dem Buch des Verfassers [11] gegeben. Hier beschränken wir uns auf einige bibliographische Angaben. Für beliebigen stückweise glatten Rand wurde die Diskretheit des Operators der Elastizitätstheorie von K. Friedrichs[2]) [3] festgestellt für den Fall des fest eingespannten oder freien Randes. D. M. Eidus [1, 2] gab einen anderen, wesentlich einfacheren Beweis als K. Friedrichs für den Fall des freien Randes und erweiterte ihn auf einige andere Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie. Der im Text gegebene Beweis stammt vom Verfasser [12].

Zum Schluß bemerken wir, daß der kleinste Eigenwert des Operators der Elastizitätstheorie bei den Bedingungen für die feste Einspannung des Randes des Körpers gleich dem Minimum der doppelten potentiellen Deformationsenergie

$$2\int_\Omega W(\mathfrak{u})\, d\Omega \tag{13}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_\Omega \mathfrak{u}^2\, d\Omega = 1 \tag{14}$$

ist. Das Minimum ist zu suchen auf den Verschiebungsvektoren, die auf dem Rand des Gebietes verschwinden. Wir erwähnen noch, ohne einen Beweis zu geben, daß

[1]) Diese Tatsache ergibt sich aus der Theorie der quadratischen Formen, hierzu sehe man z. B. I. M. Gelfand [1].

[2]) Unter der Voraussetzung hinreichender Glattheit des Randes wurde dieses Resultat wesentlich früher von H. Weyl [1] gewonnen.

der kleinste Eigenwert des Operators der Elastizitätstheorie im Falle eines freien Randes des Körpers ebenfalls gleich dem Minimum des Integrals (13) ist, jedoch genügen die Verschiebungsvektoren diesmal außer der Gleichung (14) auch noch den Gleichungen ($\mathfrak{R}$ ist der Radiusvektor des Punktes $P$)

$$\int_{\Omega} \mathfrak{u}\, d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \mathfrak{R} \times \mathfrak{u}\, d\Omega = 0;$$

Randbedingungen brauchen diesen Vektoren nicht auferlegt zu werden, da die Bedingungen für den freien Rand natürlich sind.

## § 40. Ein Extremalprinzip und seine Folgerungen

1. $A$ sei ein symmetrischer positiver Operator mit diskretem Spektrum, und $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ seien seine Eigenwerte, $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$, $\varphi_3(P), \ldots$ die ihnen entsprechenden Eigenfunktionen. Nach Definition des diskreten Spektrums ist das System der Eigenfunktionen vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel; deshalb kann man, wenn $u(P)$ eine beliebige Funktion mit endlicher Norm ist, diese Funktion in die Orthogonalreihe

$$u(P) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(P), \qquad a_n = (u, \varphi_n) \tag{1}$$

entwickeln. Nehmen wir jetzt an, daß $u \in D_A$ ist, dann hat die Funktion $Au$ eine endliche Norm und läßt sich ebenfalls in eine Orthogonalreihe, nämlich

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (Au, \varphi_n)\, \varphi_n(P)$$

entwickeln. Die Koeffizienten dieser Reihe sind nicht schwer zu berechnen. Da $A$ ein symmetrischer Operator ist, ist $(Au, \varphi_n) = (u, A\varphi_n)$. Die Eigenfunktionen $\varphi_n$ genügen der Gleichung $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$. Daraus folgt

$$(Au, \varphi_n) = (u, \lambda_n \varphi_n) = \lambda_n (u, \varphi_n) = \lambda_n a_n$$

und demzufolge

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \varphi_n(P). \tag{2}$$

Die Reihe (2) konvergiert im Mittel, deshalb darf man sie gliedweise skalar mit einer beliebigen Funktion mit endlicher Norm multiplizieren.[1] Multipliziert man beide Seiten der Beziehung (2) skalar mit $u$, so erhält man

$$(Au, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n (\varphi_n, u)$$

oder, da $(\varphi_n, u) = (u, \varphi_n) = a_n$ ist,

$$(Au, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \tag{3}$$

[1]) Siehe Satz 2, § 7.

Wie wir schon wissen, ist der kleinste Eigenwert $\lambda_1$ des Operators $A$ gleich dem Minimum der Größe $(Au, u)$ unter der Nebenbedingung $\|u\| = 1$. Dieses Ergebnis erhält man aus Formel (3) sehr leicht von neuem. Nach der Abgeschlossenheitsrelation [Formel 18, § 10] ist nämlich

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

so daß die Bedingung $\|u\| = 1$ die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1 \tag{4}$$

annimmt. In Formel (3) ersetzen wir alle Eigenwerte $\lambda_n$ durch den kleinsten von ihnen, $\lambda_1$. Das ergibt

$$(Au, u) \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad \text{oder} \qquad \lambda_1 \leq (Au, u). \tag{5}$$

Andererseits geht die Ungleichung (5) in eine Gleichung über, wenn man $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \cdots = 0$ setzt, kurz, wenn man $u(P) = \varphi_1(P)$ setzt. Damit ist bewiesen, daß $\lambda_1 = \min(Au, u)$ bei der Bedingung $\|u\| = 1$ ist.

Die Formel (3) liefert ein neues Verfahren zur Berechnung der folgenden Eigenwerte des Operators $A$. Dieses Verfahren, so muß man annehmen, ist wenig brauchbar für die praktische Berechnung von Näherungswerten für die Eigenwerte $\lambda_n$, seine theoretische Bedeutung ist jedoch groß, und es gestattet, wichtige Eigenschaften der Eigenwerte festzustellen.

Es seien $v_1(P), v_2(P), \ldots, v_{k-1}(P)$ willkürliche Funktionen mit endlicher Norm. Wir stellen das Problem der Bestimmung des Minimums des Funktionals $(Au, u)$ bei den Bedingungen

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1 \tag{$4_1$}$$

und

$$(u, v_1) = 0; \quad (u, v_2) = 0; \quad \ldots; \quad (u, v_{k-1}) = 0. \tag{6}$$

Wir bezeichnen dieses Minimum mit $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$. Wir zeigen, daß

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leq \lambda_k \tag{7}$$

gilt und daß das Gleichheitszeichen in (7) bei spezieller Wahl der Funktionen $v_1(P), v_2(P), \ldots, v_{k-1}(P)$ angenommen wird.

Wir entwickeln die Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ in eine Reihe nach Eigenfunktionen, es sei

$$v_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_{in} \varphi_n(P), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Die Bedingungen (6) kann man dann in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{in} a_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{8}$$

darstellen. Wir wählen eine Funktion $\bar{u}(P)$ derart, daß $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$ ist. Dann führen die Bedingungen (8) auf das homogene System linearer algebraischer Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{k} b_{in} a_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{9}$$

hinsichtlich der Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_k$, worin die Zahl $k-1$ der Gleichungen kleiner als die Zahl $k$ der Unbekannten ist. Wie wohlbekannt ist, hat ein solches System eine unendliche Menge von Lösungen, von denen man mindestens eine so wählen kann, daß

$$\sum_{n=1}^{k} a_n^2 = 1$$

ist, dann ist $\|\bar{u}\| = 1$. Dabei gilt infolge der Beziehung (3)

$$(A\bar{u}, \bar{u}) = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2 .$$

Ersetzt man hier die $\lambda_n$ durch den größten Wert $\lambda_k$, so erhält man

$$(A\bar{u}, \bar{u}) \le \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_n^2 = \lambda_k .$$

Man erhält also bei bestimmter Wahl der Funktion $u(P)$, die den Bedingungen $(4_1)$ und (6) genügt, nämlich bei $u(P) = \bar{u}(P)$, $(Au, u) \le \lambda_k$. Dann aber ist auch das Minimum von $(Au, u)$ bei den erwähnten Bedingungen nicht größer als $\lambda_k$. Damit ist bewiesen, daß

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \le \lambda_k$$

gilt. Es ist leicht zu zeigen, daß das Gleichheitszeichen angenommen wird. Es genügt nämlich

$$v_i(P) = \varphi_i(P), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

zu setzen, dann gehen die Bedingungen (6) in die Bedingungen (9) des § 31 über, mit deren Hilfe sich auch die Zahl $\lambda_k$ bestimmen läßt.

Aus dem Gesagten ergibt sich ein Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte, das unter dem Namen *Minimaxprinzip* bekannt ist: *Der k-te Eigenwert $\lambda_k$ des symmetrischen Operators A mit diskretem Spektrum ist gleich dem Maximum der Größe $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ bei allen möglichen Variationen des Systems der Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. Die Größe $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ ist ihrerseits gleich dem Minimum der Größe $(Au, u)$ bei den Bedingungen* (4) *und* (6).

**Anmerkung.** Die Formel (3) kann man in der Form

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2$$

darstellen. Es ist nicht schwer zu beweisen (wir überlassen es dem Leser, das zu tun), daß man die Größe $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ als Minimum der Größe $|u|^2$ erhalten kann, wo $u$ die Menge derjenigen Funktionen mit endlicher Energie durchläuft, die der Normierungsbedingung (4) und der Orthogonalitätsbedingung (6) genügen.

2. $A$ und $B$ seien zwei positive Operatoren. Wir wollen sagen, *der Operator $A$ sei nicht kleiner als der Operator $B$*, wenn jede Funktion mit endlicher Energie bezüglich des Operators $A$ auch eine endliche Energie bezüglich des Operators $B$ besitzt und wenn für jede solche Funktion $|u|_A \geq |u|_B$ ist. Wenn dann noch $A \neq B$ ist, dann werden wir sagen, daß $A > B$ ist.

**Satz 1.** *$A$ und $B$ seien positive Operatoren. Es sei $A > B$ und die Spektren beider Operatoren diskret. Dann gilt für beliebiges $k$: Der $k$-te Eigenwert des Operators $B$ übertrifft den $k$-ten Eigenwert des Operators $A$ nicht.*

Wir bezeichnen mit $\lambda_k$ und $\mu_k$ die Eigenwerte des Operators $A$ bzw. des Operators $B$. Weiter bezeichnen wir mit $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ und $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ die Minima der Größen $|u|_A^2$ bzw. $|u|_B^2$ bei den Bedingungen (4) und (6). Die Ungleichung $A \geq B$ bedeutet, daß für eine beliebige Funktion $u(P)$ die Ungleichung $|u|_A^2 \geq |u|_B^2$ gilt; sie gilt demzufolge auch für beliebige, den oben genannten Bedingungen (4) und (6) genügende Funktionen. Dann ist aber offensichtlich auch das Minimum der Größen $|u|_A^2$ und $|u|_B^2$ durch dieselbe Ungleichung verknüpft, d. h. es gilt

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geq \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}).$$

Daraus folgt, daß auch

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geq \max \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$$

gilt oder, was dasselbe ist, daß $\lambda_k \geq \mu_k$ ist.

Wir erläutern unseren Satz an einem Beispiel. Es seien zwei elastische Platten aus dem gleichen Material und von der gleichen Dicke gegeben, sie seien an ihren Rändern fest eingespannt. Wir bezeichnen mit $S_1$ und $S_2$ das Grundgebiet der Platten und nehmen an, daß $S_1$ vollständig im Innern von $S_2$ liegt (Abb. 12). Mit $L_1$ und $L_2$ bezeichnen wir die Berandung der Gebiete $S_1$ und $S_2$. Ferner möge $A$ den biharmonischen Operator bedeuten, der auf allen, den Randbedingungen

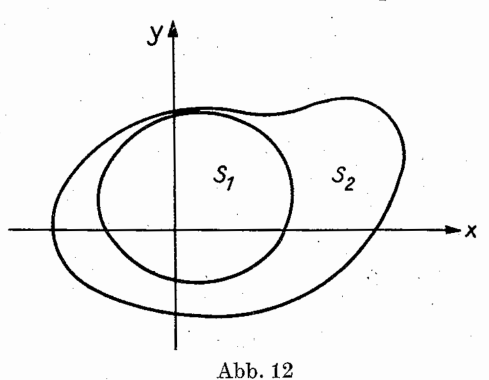


Abb. 12

$$w\Big|_{L_1} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{L_1} = 0 \tag{10}$$

genügenden Funktionen definiert sei; genau ebenso möge $B$ den auf allen, den Randbedingungen

$$w\Big|_{L_2} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{L_2} = 0 \tag{11}$$

genügenden Funktionen definierten biharmonischen Operator bedeuten. Dann sind die Quadrate der Eigenschwingungsfrequenzen der Platten $S_1$ und $S_2$ den Eigenwerten der Operatoren $A$ und $B$ proportional. Wir zeigen, daß $A \geq B$ ist. Wir bemerken zunächst, daß

$$|w|_A^2 = \iint\limits_{S_1} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS \tag{12}$$

und

$$|w|_B^2 = \iint\limits_{S_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dS \tag{13}$$

gilt, wobei im ersten Integral $w$ den Bedingungen (10) genügt, im zweiten den Bedingungen (11).

Möge $w$ den Bedingungen (10) genügen und dem Integral (12) einen endlichen Wert erteilen. Dann besitzt diese Funktion eine endliche Energie in bezug auf den Operator $A$. Wir ergänzen die Funktion $w$ in $S_2$, indem wir sie außerhalb von $S_1$ gleich Null setzen. Die derart ergänzte Funktion $w$ genügt den Bedingungen (11) und besitzt eine endliche Energie bezüglich des Operators $B$, wobei offensichtlich $|w|_A^2 = |w|_B^2$ ist. In Übereinstimmung mit der oben gegebenen Definition ist $A \geq B$. Jetzt folgt aus Satz 1:

*Wenn zwei elastische Platten aus demselben Material und von derselben Dicke derart gegeben sind, daß das Mittelgebiet der einen von ihnen ganz im Mittelgebiet der anderen liegt, und wenn die Ränder beider Platten fest eingespannt sind, dann gilt für beliebiges $k$: Die $k$-te Eigenschwingungsfrequenz der kleineren Platte ist größer als die $k$-te Frequenz der größeren Platte.*

Noch einfacher beweist man, daß die Frequenzen der Eigenschwingungen einer Platte mit fest eingespanntem Rand größer sind als die entsprechenden Frequenzen der Schwingungen derselben Platte, wenn deren Rand ganz oder teilweise frei gestützt ist.

Die Zahl solcher Beispiele läßt sich leicht vermehren.

KAPITEL VI

# VERALLGEMEINERUNG DER FRÜHEREN ERGEBNISSE

Dem Leser ist ohne Zweifel aufgefallen, daß beim Aufbau der energetischen Methode die konkrete Gestalt dieses oder jenes Operators nur eine zweitrangige Rolle spielt, als wesentlich hingegen erwiesen sich solche allgemeinen Eigenschaften der betrachteten Operatoren wie die Symmetrie, die Positivität oder die positive Definitheit. Ihrerseits hingen diese Eigenschaften eng mit dem Begriff des skalaren Produktes zusammen, der sich bei all seiner Einfachheit als außerordentlich wichtig erwies.

Deshalb erscheint der Gedanke natürlich, eine allgemeinere Darstellung der energetischen Methode zu geben, wodurch alles Wesentliche stärker herausgearbeitet würde, während weniger wichtige Einzelheiten fortgelassen würden. Eine derartige allgemeinere Begründung der energetischen Methode stützt sich auf den verallgemeinerten Begriff des skalaren Produktes, der mit dem Begriff des HILBERT-*Raumes* zusammenhängt.

Diesem Ideenkreis ist auch das vorliegende Kapitel gewidmet. Leser, die sich ausführlich über die allgemeine Theorie der Operatoren im HILBERT-Raum unterrichten möchten, können sich auf die grundlegenden Schriften von W. I. SMIRNOW [5], N. I. ACHIESER und I. M. GLASMAN [1] oder F. RIESZ und B. SZ.-NAGY [1] stützen. Anwendungen der allgemeinen Theorie auf die Differentialoperatoren der mathematischen Physik wurden in den Büchern von S. L. SOBOLEW [2] und dem Verfasser [11] gegeben.

Wir beginnen das Kapitel mit einer kurzen Darstellung des Integralbegriffes von LEBESGUE und der Haupteigenschaften dieses Integralbegriffes. Der Apparat des LEBESGUEschen Integrals kann bei der Durchführung direkter Rechnungen schwerlich von Nutzen sein; eine wesentliche Rolle spielt dieser Apparat in theoretischen Fragen dank der eigentümlichen „Universalität" des LEBESGUEschen Integrals. Diese besteht darin, daß das LEBESGUEsche Integral praktisch für jede beschränkte Funktion existiert, während das gewöhnliche RIEMANNsche Integral nur bei hinreichend strengen, manchmal schwer zu prüfenden Bedingungen, die an die Unstetigkeiten der Funktion gestellt werden müssen, existiert. Ferner sind die Integrabilitätsbedingungen nach LEBESGUE für unbeschränkte Funktionen viel leichter festzustellen als die Integrierbarkeitsbedingungen nach RIEMANN. Die Benutzung des LEBESGUEschen Integrals befreit uns praktisch von der Notwendigkeit, die Integrierbarkeit der betrachteten Funktionen zu beweisen, und das vereinfacht die Untersuchungen bedeutend.

Eine genügend vollständige Darstellung der Theorie des LEBESGUEschen Integrals findet der an diesen Fragen interessierte Leser z. B. in den Büchern von W. I. SMIRNOW [5] und I. P. NATANSON [1].

## § 41. Der Lebesguesche Integralbegriff

Der Aufbau des Lebesgueschen Integrals stützt sich auf den Begriff des *Maßes einer Punktmenge*. Der Klarheit halber wollen wir die auf dem Abschnitt $a \leq x \leq b$ gelegene Punktmenge betrachten. Wenn eine Punktmenge ein innerhalb des Abschnitts $a \leq x \leq b$ gelegenes Intervall $\alpha < x < \beta$ ausfüllt, dann nimmt man als Maß dieser Menge einfach die Länge des Intervalls $\beta - \alpha$. Wir betrachten jetzt eine Menge, die eine endliche oder abzählbare[1]) Menge sich nicht überschneidender Intervalle ausfüllt. Eine solche Menge nennt man *offen*, während man die nach Entfernung einer offenen Menge aus dem Abschnitt $a \leq x \leq b$ verbleibende Menge *abgeschlossen* nennt. Natürlich wird man das Maß einer offenen Menge definieren als Summe der Längen aller Teilintervalle und das Maß einer abgeschlossenen Menge als Differenz aus der Länge des Abschnitts $a \leq x \leq b$ und dem Maß der herausgenommenen offenen Menge. Wir gehen zur allgemeinen Definition des Maßes über und wollen sagen, die Menge $A$ *überdecke* die Menge $B$, wenn alle Punkte von $B$ zu $A$ gehören (kurz gesagt, wenn $B$ ein Teil von $A$ ist). Als *äußeres Maß* der Menge $A$ bezeichnen wir die genaue untere Schranke (die untere Grenze) der Maße der sie überdeckenden offenen Mengen, als ihr *inneres Maß* die genaue obere Schranke (die obere Grenze) der Maße der von der Menge $A$ überdeckten abgeschlossenen Mengen. Man kann beweisen (intuitiv ist das offensichtlich), daß das innere Maß einer Menge ihr äußeres Maß nicht übersteigt. Weiter heißt eine Menge *meßbar*, wenn ihr inneres und äußeres Maß zusammenfallen. Die gemeinsame Größe des inneren und äußeren Maßes einer meßbaren Menge heißt ihr *Lebesguesches Maß*. Das Maß einer Menge $A$ werden wir mit dem Symbol $\mu A$ bezeichnen.

Die Meßbarkeit ist eine bedeutend häufiger vorkommende Eigenschaft der Mengen, als es auf den ersten Blick scheinen könnte. Alle bisher effektiv gebildeten Mengen sind meßbar. Die Existenz nichtmeßbarer Mengen zu beweisen, gelang bis jetzt nur unter Verwendung des sogenannten Auswahlprinzips, das keine Möglichkeit gibt, Mengen effektiv zu bilden. Wenn wir im folgenden von Punktmengen sprechen, werden wir stets ihre Meßbarkeit voraussetzen.

Das Maß einer Menge besitzt eine Reihe von Eigenschaften, die der Länge zukommen, der Begriff des Maßes stellt eine Verallgemeinerung des Begriffes der Länge dar. So gilt etwa: Wenn zwei Mengen sich nicht überschneiden (d. h. keine gemeinsamen Punkte haben), dann ist das Maß der Summe der Mengen[2]) gleich der Summe der Maße der Summanden; das Maß der Summe zweier sich überschneidender Mengen ist gleich der Summe ihrer Maße minus dem Maß ihrer gemeinsamen Teile, usw.

---

[1]) Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn man alle ihre Elemente mit Hilfe der ganzen positiven Zahlen durchnumerieren kann. Als Beispiele abzählbarer Mengen mögen dienen: die Menge der ganzen positiven Zahlen selbst, ein beliebiger unendlicher Teil davon (z. B. die Menge aller geraden Zahlen, die Menge der Quadrate der ganzen Zahlen u. a.), die Menge der ganzen positiven und negativen Zahlen. Man kann zeigen, daß auch die Menge aller rationalen Zahlen abzählbar ist. Als Beispiel nicht abzählbarer Mengen können folgende dienen: die Menge aller Punkte, die eine Strecke, ein ebenes oder räumliches Gebiet ausfüllen.

[2]) Als *Summe* zweier Mengen bezeichnet man eine dritte Menge, die aus allen Elementen sowohl der ersten als auch der zweiten Menge besteht; wenn ein Element in beiden zu summierenden Mengen vorkommt, tritt es in der Summe nur einmal auf.

Der Begriff des Maßes läßt sich zwanglos auf Punktmengen ausdehnen, die sich in einer Ebene oder im dreidimensionalen Raum erstrecken. Hier ist der Begriff des Maßes natürlich eine Verallgemeinerung der Begriffe Flächeninhalt oder Volumen. Es ist nicht schwierig, den Maßbegriff auch auf Punktmengen in mehrdimensionalen Räumen auszudehnen.

Abb. 13

Es gibt Mengen mit einem Maß, das gleich Null ist. Das sind offensichtlich die Mengen, die man durch offene Mengen von beliebig kleinem Maß überdecken kann. Von dieser Art sind die endlichen und die abzählbaren Punktmengen, wie nicht schwer zu zeigen ist. Es gibt auch nichtabzählbare Mengen vom Maße Null. Es ist üblich, zu sagen, eine Eigenschaft gelte *fast überall*, wenn sie höchstens auf einer Menge vom Maße Null nicht zu gelten braucht.

Wir wenden uns jetzt dem Integralbegriff zu. Wir erinnern daran, daß man nach der auf CAUCHY und RIEMANN zurückgehenden Definition das bestimmte Integral als Grenzwert der Integralsummen (die Bedeutung der Bezeichnungen ist in Abb. 13 angegeben)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{1}$$

ansieht, wo $\lambda$ die größte der Längen der Intervalle $(x_{k-1}, x_k)$ ist. Wenn man eine hinreichend feine Einteilung des Grundintervalles $a \leq x \leq b$ wählt und rechts in (1) das Limes-Zeichen fortläßt, dann erhält man als Näherungsgleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{2}$$

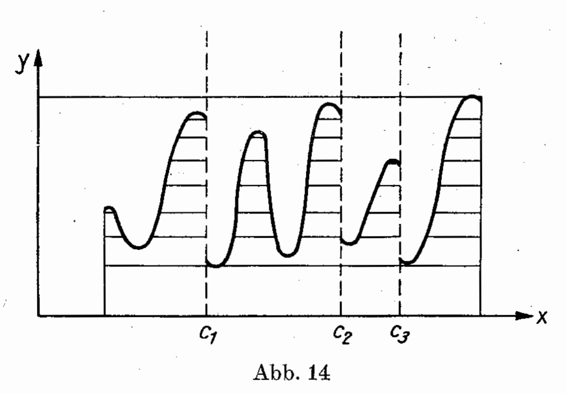



Abb. 14

welcher geometrisch folgendes entspricht: Der Flächeninhalt des schmalen Streifens, der von dem Bogen der Kurve $y = f(x)$, dem Abschnitt $(x_{k-1}, x_k)$ der $x$-Achse und den beiden in den Punkten $x_{k-1}$ und $x_k$ errichteten Ordinaten begrenzt wird, wird ersetzt durch den Flächeninhalt des Rechtecks, dessen Basis der Abschnitt $(x_{k-1}, x_k)$ und dessen Höhe die Kurvenordinate ist, die in einem beliebig gewählten Punkt $\xi_k$ des genannten Abschnitts errichtet ist. Der Fehler der Näherungsgleichung (2) ist nicht groß, wenn die Ordinaten der Kurve $y = f(x)$ sich nicht zu schnell ändern; dabei hat diese oder jene Wahl der Punkte $\xi_k$ keinen wesentlichen Einfluß auf die Größe des Fehlers.

Die Formel (2) wird jedoch unzuverlässig, wenn die Funktion $f(x)$ schnell variiert (Abb. 14), wenn sie auch stetig bleibt. Offensichtlich erhalten wir völlig verschiedene Ergebnisse je nachdem, ob wir für $\xi_k$ Punkte mit sehr großen, sehr kleinen oder mittleren Ordinaten nehmen. In diesem Falle ist es zweckmäßig, den Flächeninhalt auf andere Weise zu berechnen. Auf der Ordinatenachse tragen wir den kleinsten und den größten Wert der Funktion[1]) ein. Das möge die Punkte $\alpha$ und $\beta$ ergeben. Den Abschnitt $\alpha \leq y \leq \beta$ der Ordinatenachse zerlegen wir durch die Teilpunkte $y_0 = \alpha, y_1, y_2, \ldots, y_n = \beta$ in kleine Abschnitte. Durch die Teilpunkte ziehen wir Geraden parallel zur Abszissenachse. Der uns interessierende Flächeninhalt scheint in Figuren zerlegt, die an Rechtecke mit kleinen Höhen erinnern; diese „Rechtecke" liegen in den horizontalen Streifen zwischen den Geraden $y = y_{i-1}$ und $y = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wir bilden die Summe der Flächeninhalte der in einem solchen Streifen eingeschlossenen „Rechtecke", wobei wir als Grundfläche der „Rechtecke" z. B. diejenigen Seiten nehmen, die auf der oberen Seite des Streifens ($y = y_i$) liegen. Die genannte Summe von Flächeninhalten ist angenähert gleich dem Produkt aus der Höhe $y_i - y_{i-1}$ mit der Summe der Längen der Grundlinien. In jedem Punkt der Grundlinie ist offensichtlich die Ordinate $f(x) \geq y_i$. Demnach kann man die Summe der Grundlinien der „Rechtecke" als Menge derjenigen $x$-Werte charakterisieren, in denen $f(x) \geq y_i$ ist, und die Summe der Längen der Grundlinien als Maß dieser Menge[2]). Wir bezeichnen das erwähnte Maß mit $\mu_i$. Dann ist der Flächeninhalt des Teiles der Figur, der in dem Streifen $y_{i-1} < y \leq y_i$ eingeschlossen ist (dieser Teil ist in Abb. 15 schraffiert), angenähert gleich $\mu_i(y_i - y_{i-1})$, der Flächeninhalt der ganzen Figur angenähert gleich $u_0 y_0 + \sum\limits_{i=1}^{1} \mu_i(y_i - y_{i-1})$. Es ist interessant, zu bemerken, daß die Genauigkeit dieses Näherungswertes wenig davon abhängt, ob die Funktion $f(x)$ stetig oder unstetig ist, wenn sie nur beschränkt bleibt. Wir werden diese Behauptung nicht beweisen; wir bemerken nur, daß ihr Sinn aus den Darstellungen in den Abb. 14 und 15 völlig klar wird, in der zweiten ist das graphische Bild einer stetigen Funktion wiedergegeben, in der ersten das graphische Bild einer Funktion mit Sprungstellen in den Punkten $C_1$, $C_2$, $C_3$. Die angenäherte Berechnung des Flächeninhalts durch die Summe

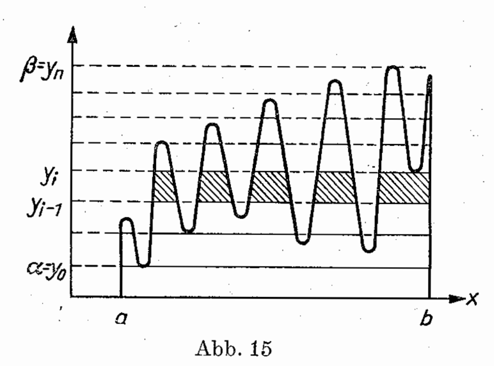


Abb. 15

$$\mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (y_i - y_{i-1}) \tag{3}$$

ergibt in beiden Fällen einen Fehler von ein und derselben Größenordnung.

[1]) Genauer gesagt, die untere und obere Grenze der Funktionswerte.

[2]) Es versteht sich von selbst, daß diese Menge bei beliebigem $y_i$ als meßbar vorausgesetzt wird.

Wir verkleinern jetzt die Teilintervalle $(y_{i-1}, y_i)$ so, daß die Länge des größten von ihnen gegen Null strebt. Wenn dabei die Summe (3) einem Grenzwert zustrebt, dann nennen wir diesen Grenzwert das LEBESGUE*sche Integral* der Funktion $f(x)$ auf dem Abschnitt $a \leq x \leq b$. Durch Verallgemeinerung dieser Konstruktion auf den Fall von Funktionen, die nicht notwendig stetig sind, kommen wir zu folgender Definition des LEBESGUEschen Integrals:

*Unter dem* LEBESGUE*schen Integral einer beschränkten Funktion $f(x)$ über dem Intervall $a \leq x \leq b$ verstehen wir den Grenzwert*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ \mu_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (y_i - y_{i-1}) \right\}; \qquad \lambda = \max (y_i - y_{i-1}),$$

*wo $\mu_i$ das Maß der Menge der $x$-Werte mit $f(x) \geq y_i$ ist und $\alpha = y_0$ und $\beta = y_n$ Zahlen sind, zwischen denen alle Werte $f(x)$ eingeschlossen sind.*

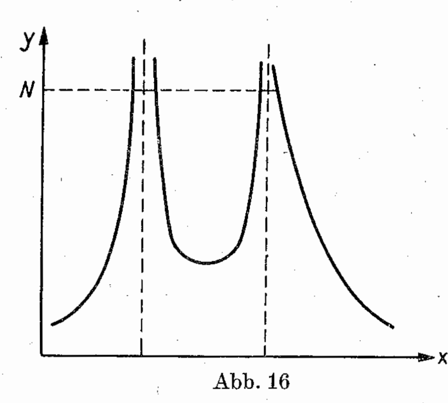


Abb. 16

Ganz analog wird das LEBESGUEsche Integral für Funktionen zweier oder mehrerer unabhängiger Veränderlicher definiert.

Man kann beweisen, daß das LEBESGUEsche Integral beschränkter Funktionen stets existiert. Wir setzen schließlich voraus, daß bei beliebigem Wert der Konstanten $A$ die Menge der $x$-Werte mit $f(x) \geq A$ meßbar ist, andernfalls verliert die Definition des LEBESGUEschen Integrals ihren Sinn. Für alle Funktionen, die man bis jetzt effektiv hat bilden können, ist die genannte Menge meßbar. Wenn das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ im gewöhnlichen (RIEMANNschen) Sinne existiert, dann fällt es mit dem LEBESGUEschen Integral zusammen, wie man zeigen kann. Man braucht deshalb kein besonderes Symbol zur Bezeichnung des LEBESGUEschen Integrals, sondern benutzt die üblichen Symbole

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad \iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$$

usw.

Wir geben jetzt die Definition des LEBESGUEschen Integrals für unbeschränkte Funktionen. Wir nehmen zunächst an, daß die Funktion $f(x)$ nicht negativ ist. Wir bezeichnen mit $N$ eine willkürliche positive Zahl und führen eine neue Funktion $f_N(x)$ ein, indem wir

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn} \quad f(x) \leq N, \\ N, & \text{wenn} \quad f(x) > N \end{cases}$$

setzen (siehe Abb. 16). Die Funktion $f_N(x)$ ist beschränkt, da offensichtlich $0 \leq f_N(x) \leq N$ ist, deshalb existiert ihr LEBESGUEsches Integral

$$\int_a^b f_N(x)\, dx. \tag{4}$$

Mit wachsendem $N$ wächst dieses Integral (oder nimmt wenigstens nicht ab) und strebt deshalb bei unbeschränkt wachsendem $N$ einem bestimmten endlichen oder unendlichen Grenzwert zu. *Wenn für $N \to \infty$ ein endlicher Grenzwert des Integrals* (4) *existiert, dann heißt dieser Grenzwert das* LEBESGUE*sche Integral der unbeschränkten nichtnegativen Funktion* $f(x)$. Damit gilt definitionsgemäß, wenn die Funktion $f(x) \geq 0$ und nicht negativ ist,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{N \to \infty} \int_b^b f_N(x)\, dx.$$

Eine unbeschränkte nicht negative Funktion, für die das LEBESGUEsche Integral in den Grenzen von $a$ bis $b$ existiert, nennt man *summierbar* im Intervall $a \leq x \leq b$. Analog sind die Funktionen definiert, die im $m$-dimensionalen $(m \geq 2)$ Gebiet summierbar sind.

Möge jetzt $f(x)$ beliebiges Vorzeichen haben. Man kann $f(x)$ als Differenz zweier nicht negativer Funktionen darstellen. Setzt man nämlich

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\{|f(x)| + f(x)\}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}\{|f(x)| - f(x)\},$$

dann ist $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$ und $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. *Wir wollen $f(x)$ dann und nur dann als summierbar ansehen, wenn jede der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ summierbar ist, und in diesem Falle definieren wir*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Wenn $f(x)$ summierbar ist, dann ist auch die Funktion $|f(x)| = f(x) + 2f_2(x)$ summierbar. Das LEBESGUEsche Integral ist also immer absolut konvergent.

Wenn die Funktion $f(x)$ komplex ist, $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx + i \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

Nach Definition existiert das Integral links dann und nur dann, wenn beide Integrale rechts existieren. Das LEBESGUEsche Integral komplexer Funktionen ist ebenfalls absolut konvergent.

Die Haupteigenschaften des RIEMANNschen Integrals bleiben auch für das LEBESGUEsche Integral erhalten. Wir führen drei Eigenschaften an, die für das LEBESGUEsche Integral charakteristisch sind und in allem folgenden eine große Rolle spielen. Die Beweise findet der Leser in den zu Beginn des Kapitels zitierten Werken.

1. Der Wert des LEBESGUEschen Integrals ändert sich nicht, wenn die Werte der Integranden in einer Menge vom Maße Null abgeändert werden. Außerdem bleibt das LEBESGUEsche Integral sinnvoll, wenn die Werte der Funktion auf einer Menge vom Maße Null nicht definiert sind. Als Folgerung daraus ergibt sich, daß das LEBESGUEsche Integral gleich Null ist, wenn der Integrand fast überall gleich Null ist.

15*

2. Wenn das Integral einer nicht negativen Funktion gleich Null ist, dann ist diese Funktion fast überall gleich Null.

3. Wenn $|f(x)| \leq \varphi(x)$ und $\varphi(x)$ summierbar ist, dann ist $f(x)$ ebenfalls summierbar.[1])

Wir bemerken, daß der in § 16 formulierte Satz von FISCHER-RIESZ über die Konvergenz im Mittel von der Grenzfunktion nur behauptet, daß ihr Quadrat im LEBESGUEschen Sinne sogar in dem Fall integrierbar ist, wo die Quadrate aller Funktionen der Folge im gewöhnlichen Sinne des Wortes integrierbar sind (nach RIEMANN; siehe SMIRNOW [1], Punkt 116–117). Wir erwähnen noch, daß der Satz von FISCHER-RIESZ auch dann gültig bleibt, wenn die Funktionen der Folge komplexe Werte annehmen. Wir führen die Formulierung dieses Satzes in bezug auf den gegebenen Fall an.

Wir betrachten eine Schar von im allgemeinen komplexwertigen Funktionen, die fast überall in einem endlichen Gebiet des $m$-dimensionalen euklidischen Raumes definiert seien und deren Quadrate summierbar seien. Der Kürze halber wollen wir derartige Funktionen *quadratisch-summierbar* nennen. Wir vereinbaren hier wie auch im folgenden stets, daß wir zwei Funktionen als zusammenfallend ansehen wollen, wenn sie fast überall in $\Omega$ zusammenfallen.

Wir wollen sagen, eine Folge in $\Omega$ quadratisch-summierbarer Funktionen $\varphi_n(P)$ *konvergiere im Mittel* gegen eine in $\Omega$ quadratisch-summierbare Funktion $\varphi(P)$, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 \, d\Omega = 0$$

gilt.

**Satz von FISCHER-RIESZ:** *Wenn die in $\Omega$ quadratisch-summierbaren Funktionen $\varphi_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ der Bedingung*

$$\lim_{k, n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_k(P) - \varphi_n(P)|^2 \, d\Omega = 0$$

*genügen, dann existiert eine in $\Omega$ quadratisch-summierbare Funktion $\varphi(P)$, gegen die die Folge $\varphi_n(P)$ im Mittel konvergiert.*

## § 42. Der HILBERTsche Funktionenraum

Wir betrachten Mengen von Funktionen, die in einem endlichen Gebiet $\Omega$ definiert sind.

Da wir spätere Anwendungen im Auge haben, lassen wir zu, daß diese Funktionen auch komplexe Werte annehmen. Auf derartige Funktionen läßt sich der in § 4 eingeführte Begriff der linearen Menge oder des Lineals ausdehnen: Eine Menge

[1]) Wir beweisen diese Behauptung. Wir bilden die oben erwähnte Funktion $|f_N(x)|$. Da sie beschränkt ist, ist sie integrierbar, wobei

$$\int_a^b |f(x)|_N \, dx \leq \int_a^b \varphi(x) \, dx \qquad (*)$$

gilt, da offensichtlich $|f(x)|_N \leq |f(x)| \leq \varphi(x)$ ist. Mit wachsendem $N$ wächst das linke Integral in (*) monoton. Da es infolge dieser Ungleichung beschränkt ist, hat es einen endlichen Grenzwert. Nach Definition ist $f(x)$ dann summierbar.

von Funktionen heißt ein *Lineal*, wenn sie zusammen mit den Funktionen $\varphi(P)$ und $\psi(P)$ auch die Funktionen $\varphi(P) + \psi(P)$ und $a\varphi(P)$ enthält, wo $a$ eine beliebige (jetzt im allgemeinen komplexe) Konstante ist.[1]) Für das Folgende ist die Bemerkung wichtig, daß die Menge der in $\Omega$ quadratisch-summierbaren Funktionen ebenfalls ein Lineal ist: Wenn $\varphi(P)$ und $\psi(P)$ quadratisch-summierbar sind, dann ergibt sich aus der Ungleichung $|a\varphi + b\psi|^2 \leq 2\{|a|^2|\varphi|^2 + |b|^2|\psi|^2\}$ und aus der Eigenschaft 3 des LEBESGUEschen Integrals (§ 41), daß die Funktion $a\varphi(P) + b\psi(P)$ ebenfalls quadratisch-summierbar ist.

*Ein Lineal heißt ein* HILBERT*scher Funktionenraum, wenn sich jedem Paar von Funktionen $\varphi(P)$, $\psi(P)$, welche zu dem Lineal gehören, eine Zahl $(\varphi, \psi)$ zuordnen läßt, welche folgenden Axiomen genügt:*

A. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$[2]).

B. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$, *wo* $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ *Elemente des Lineals,* $a_1$ *und* $a_2$ *Konstanten sind.*

C. $(\varphi, \varphi) \geq 0$.

D. *Wenn* $(\varphi, \varphi) = 0$ *ist, ist* $\varphi(P) \equiv 0$.

Funktionen, die zum HILBERTschen Raum gehören, wollen wir als Elemente, manchmal als Punkte dieses Raumes bezeichnen. Die Zahl $(\varphi, \psi)$ heißt das *Skalarprodukt* der Elemente $\varphi$ und $\psi$.

Wir lenken die Aufmerksamkeit des Lesers auf den Umstand, daß die Eigenschaft A des Skalarproduktes nicht mit der in § 3 aufgestellten analogen Eigenschaft zusammenfällt. Den Grund dafür werden wir später erläutern.

Ebenso wie die von uns definierten „komplexen" Räume kann man auch „reelle" HILBERTsche Funktionenräume betrachten. Deren Elemente sind reelle Funktionen, deren Skalarprodukt die Eigenschaften A bis D, § 3, besitzt, so daß insbesondere das Skalarprodukt symmetrisch ist: $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$. In den folgenden Kapiteln werden wir es hauptsächlich mit reellen HILBERT-Räumen zu tun haben.

Wir stellen einige einfache Eigenschaften des Skalarproduktes auf, die den in § 3 formulierten ähnlich sind (aber nicht immer mit ihnen identisch sind).

Aus den Axiomen A und B folgt, daß $(\varphi, \lambda\psi) = \overline{\lambda}(\varphi, \psi)$ ist, wo $\lambda$ eine komplexe Zahl ist. Nach Axiom A ist nämlich $(\varphi, \lambda\psi) = \overline{(\lambda\psi, \varphi)}$. Infolge des Axioms B ist $\overline{(\lambda\psi, \varphi)} = \overline{\lambda}\,\overline{(\psi, \varphi)}$, was wiederum infolge des Axioms A gleich $\overline{\lambda}(\varphi, \psi)$ ist. Schließlich hat man $(\varphi, \overline{\lambda}\psi) = \lambda(\varphi, \psi)$. Jetzt ist klar, daß man auf ein Skalarprodukt, dessen einer Faktor in Form einer Summe dargestellt ist, die Regel für die Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke anwenden kann, jedoch mit dem Unterschied, daß ein bei dem zweiten Faktor stehender Zahlenkoeffizient durch seinen konjugiert komplexen Wert ersetzt werden muß, wenn man ihn aus der die skalare Multiplikation bezeichnenden Klammer herauszieht. Aus dem Gesagten wird klar, warum die Eigenschaft A des Skalarproduktes abgeändert werden mußte. Nach Eigenschaft C muß nämlich nicht nur $(\varphi, \varphi) \geq 0$ gelten, sondern auch $(\lambda\varphi, \lambda\varphi) \geq 0$, wo $\lambda$ eine beliebige komplexe Zahl ist. Wenn wir die Eigenschaft A in der Form $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$ beibehalten hätten, würde sich $(\lambda\varphi, \lambda\varphi) = \lambda^2(\varphi, \varphi)$ ergeben, was bei beliebigem komplexem $\lambda$ selbst eine komplexe Größe darstellen würde und keineswegs positiv oder gleich Null wäre.

---

[1]) Siehe Fußnote 2 Seite 30.

[2]) Mit dem Querstrich bezeichnen wir die konjugiert komplexe Zahl.

Die nicht negative Zahl $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ heißt die *Norm* des Elementes $\varphi$ und wird mit dem Symbol $\|\varphi\|$ bezeichnet, so daß also

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)} \tag{1}$$

gilt; die Norm der Differenz zweier Elemente heißt der *Abstand* der beiden Elemente voneinander. Man sagt, die Formel (1) definiert eine *Metrik* im HILBERT-Raum.

Ein Element des HILBERT-Raumes, dessen Norm gleich Eins ist, ist normiert.

Die Norm im HILBERT-Raum besitzt die in § 3 aufgestellten Eigenschaften a) bis d). Die Eigenschaften a) und b) sind offensichtlich, die Eigenschaft c), die Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI, und die Eigenschaft d), die Dreiecksungleichung, bedürfen eines neuen Beweises.

Wir wollen also beweisen, daß für beliebige Elemente $\varphi$ und $\psi$ des HILBERT-Raumes die Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \tag{2}$$

gilt. Diese Ungleichung ist offensichtlich, wenn $(\varphi, \psi) = 0$ ist, deshalb genügt es, den Fall $(\varphi, \psi) \neq 0$ zu betrachten.

Es sei $\theta$ eine komplexe Zahl, die wir unten näher bestimmen werden, und $\lambda$ eine willkürliche reelle Zahl. Nach Axiom C ist

$$(\varphi - \lambda \bar{\theta} \psi, \varphi - \lambda \bar{\theta} \psi) \geq 0.$$

Wir multiplizieren die Klammern aus und ziehen die Zahlenkoeffizienten vor das Zeichen der skalaren Multiplikation:

$$(\varphi, \varphi) - \lambda \theta (\varphi, \psi) - \lambda \bar{\theta} (\psi, \varphi) + \lambda^2 |\theta|^2 (\psi, \psi) \geq 0$$

oder, was dasselbe ist[1]),

$$\|\varphi\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} [\theta (\varphi, \psi)] + \lambda^2 |\theta|^2 \|\psi\|^2 \geq 0.$$

Der Ausdruck links stellt ein quadratisches Polynom in $\lambda$ dar, das für alle reellen Werte des Argumentes nicht negativ ist. Dann ist seine Diskriminante nicht positiv:

$$\{\operatorname{Re} [\theta (\varphi, \psi)]\}^2 - |\theta|^2 \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2 \leq 0.$$

Daraus erhält man, indem man die Wurzeln zieht

$$|\operatorname{Re}[\theta (\varphi, \psi)]| \leq |\theta| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi\|. \tag{3}$$

In dieser Ungleichung, die für beliebiges $\theta$ gilt, setzen wir

$$\theta = \frac{|(\varphi, \psi)|}{(\varphi, \psi)}.$$

Das ist möglich, da nach Voraussetzung $(\varphi, \psi) \neq 0$ ist.

---

[1]) Hier und in allem folgenden bezeichnen die Symbole Re bzw. Im den Real- bzw. Imaginärteil des dahinter stehenden Ausdrucks.

Bei einer solchen Wahl von $\theta$ wird $|\theta| = 1$. Weiter ist $\theta(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ eine reelle (sogar positive) Größe, und deshalb fällt sie mit ihrem Realteil zusammen: $\mathrm{Re}\,[\theta(\varphi, \psi)] = \theta(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$. Setzt man das in (3) ein, erhält man die Ungleichung (2).

Jetzt ist es nicht schwer, auch die Dreiecksungleichung

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \tag{4}$$

herzuleiten. Wir haben

$$\|\varphi + \psi\|^2 \leq (\varphi + \psi, \varphi + \psi) = (\varphi, \varphi) + (\varphi, \psi) + (\varphi, \psi) + (\psi, \psi)$$
$$= \|\varphi\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[(\varphi, \psi)] + \|\psi\|^2.$$

Nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI ist $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$. Erst recht ist $|\mathrm{Re}\,[(\varphi, \psi)]| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$. Daraus folgt

$$\|\varphi + \psi\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + 2\,\|\varphi\| \cdot \|\psi\| + \|\psi\|^2,$$

was mit der Ungleichung (4) übereinstimmt.

Wir bringen einige Beispiele für HILBERTsche Funktionenräume.

a) *Der Raum* $L_2(\Omega)$. Wie zu Anfang des Paragraphen bemerkt wurde, bildet die Menge der in $\Omega$ fast überall definierten und in $\Omega$ quadratisch-summierbaren Funktionen ein Lineal. Wir definieren auf diesem Lineal ein Skalarprodukt, indem wir

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(P)\overline{\psi(P)}\, d\Omega \tag{5}$$

setzen. Das Integral (5) existiert, wie aus der Eigenschaft 3, § 41 und aus der Ungleichung $|\varphi\,\overline{\psi}| \leq \frac{1}{2}\,\{|\varphi|^2 + |\psi|^2\}$ folgt. Der Ausdruck (5) genügt offensichtlich den Axiomen A bis C; er genügt auch dem Axiom D, wenn wir, wie in § 41 vereinbart, zwei Funktionen als identisch ansehen, die fast überall gleich sind und insbesondere eine fast überall verschwindende Funktion als nicht identisch von Null verschieden ansehen.

Durch Einführung des Skalarproduktes haben wir unser Lineal in einen HILBERT-Raum verwandelt; er wird gewöhnlich mit dem Symbol $L_2(\Omega)$ bezeichnet. Wenn $\Omega$ das Geradenstück $a \leq x \leq b$ ist, schreibt man $L_2(a, b)$. Die Norm in $L_2(\Omega)$ ist durch

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega |\varphi^2(P)|\, d\Omega \tag{6}$$

definiert. Die Ungleichung (2) geht hier in die bekannte Ungleichung von BUNJAKOWSKI

$$\left|\int_\Omega \varphi(P)\overline{\psi(P)}\, d\Omega\right|^2 \leq \int_\Omega |\varphi^2(P)|\, d\Omega \int_\Omega |\psi^2(P)|\, d\Omega.$$

über.

Die bedeutende Rolle, die der Raum $L_2(\Omega)$ in allem Vorangegangenen spielte, ist offensichtlich; keine geringere Rolle wird er auch in den folgenden Kapiteln spielen. Vielleicht ist es nützlich zu bemerken, daß wir früher den reellen Raum $L_2(\Omega)$ benutzt haben, dessen Elemente reelle quadratisch-summierbare Funktionen waren; oben hatten wir sie „Funktionen mit endlicher Norm“ genannt.

b) Ein anderes wichtiges Beispiel eines HILBERTschen Funktionenraumes stellt der Raum $L_2(\Omega; \sigma(P))$ dar. Seine Elemente sind die Funktionen, für die das Integral

$$\int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi^2(P)|\,d\Omega \tag{7}$$

existiert. Hier ist $\sigma(P)$ eine nicht negative Funktion, und zwar bleibt sie für alle Elemente des Raumes ein und dieselbe. Wir sehen hier zwei Funktionen $\varphi_1(P)$ und $\varphi_2(P)$ als identisch an, wenn

$$\int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)|^2\,d\Omega = 0$$

gilt. Das Skalarprodukt in $L_2(\Omega; \sigma(P))$ wird durch die Formel

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \sigma(P)\,\varphi(P)\,\overline{\psi(P)}\,d\Omega \tag{8}$$

gegeben, die Norm, die sich aus (8) ergibt, durch

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega \sigma(P)\,|\varphi^2(P)|\,d\Omega. \tag{9}$$

c) Wir bezeichnen mit $S$ den Rand des Gebietes $\Omega$. Wir betrachten die Menge der Funktionen, die im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$ zusammen mit allen ihren Ableitungen bis zur Ordnung $r$ einschließlich stetig sind.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß diese Menge ein Lineal ist. Wir machen es zu einem HILBERT-Raum, wenn wir in ihm ein Skalarprodukt durch folgende Formel erklären:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=k} \int_\Omega \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}\;\frac{\partial^k \overline{\psi}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}\,d\Omega. \tag{10}$$

Hier sind $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die kartesischen Koordinaten eines veränderlichen Punktes aus $\Omega$. Diesen Raum bezeichnet man mit dem Symbol $L_2^{(r)}(\Omega)$; für $r = 0$ geht er in den Raum $L_2(\Omega)$ über. Wie aus Formel (10) ersichtlich, ist die Norm in $L_2^{(r)}(\Omega)$ durch die Beziehung

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{r} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=k} \int_\Omega \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}\right|^2 d\Omega \tag{11}$$

definiert.

Wir erwähnen noch eine andere Klasse von HILBERT-Räumen, die in den vorangegangenen Kapiteln eine wichtige Rolle spielten. $A$ sei ein positiver Operator. Die Menge der Funktionen (wir wollen sie als reell ansehen), die den Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ bilden, kann man zu einem reellen HILBERT-Raum machen, wenn man als Skalarprodukt zweier solcher Funktionen ihr energetisches Produkt nimmt:

$$[u, v] = (Au, v); \quad u \in D_A,\; v \in D_A;$$

die Norm in diesem Raum fällt mit der in Kap. II definierten Norm bezüglich der Energie zusammen. Den so gebildeten HILBERT-Raum werden wir meistens mit $H_0$ bezeichnen; wenn es notwendig sein sollte, die Rolle des Operators $A$ zu unterstreichen, werden wir zur Bezeichnung dieses Raumes das Symbol $H_A$ verwenden.

In einigen Fällen führt man HILBERT-Räume allgemeiner Natur ein, darunter auch solche, deren Elemente keine Funktionen sind, sondern z. B. Zahlenfolgen. Wir begnügen uns hier mit einem Hinweis auf den für manche Untersuchungen wichtigen HILBERT-Raum der (im allgemeinen komplexen) Vektorfunktionen, den wir mit $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ bezeichnen. Seine Elemente sind Vektorfunktionen eines Punktes des Gebietes $\Omega$; wenn $\vec{\varphi}(P)$ ein solcher Vektor mit den Komponenten $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ nach den Koordinatenachsen ist, dann fordern wir die Existenz des Integrals

$$\int_\Omega \{|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + |\varphi_z|^2\}\, d\Omega.$$

Das Skalarprodukt in $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ ist durch die Formel

$$(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) = \int_\Omega (\varphi_x \overline{\psi}_x + \varphi_y \overline{\psi}_y + \varphi_z \overline{\psi}_z)\, d\Omega \tag{12}$$

definiert. Die Norm eines Elementes $\varphi$ ist offensichtlich gleich

$$\|\vec{\varphi}\|^2 = \int_\Omega \{|\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + |\varphi_z|^2\}\, dQ. \tag{13}$$

Wenn die betrachteten Vektorfunktionen reell sind, erhalten wir den reellen HILBERTschen Vektorraum $\mathfrak{L}_2(\Omega)$; das Skalarprodukt und die Norm in ihm sind durch die einfacheren Formeln

$$(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) = \int_\Omega \vec{\varphi} \cdot \vec{\psi}\, d\Omega; \quad \|\vec{\varphi}\|^2 = \int_\Omega \vec{\varphi}^{\,2}\, d\Omega$$

definiert, wo $\vec{\varphi} \cdot \vec{\psi}$ das gewöhnliche skalare Produkt von Vektoren bedeutet, $\vec{\varphi}^{\,2}$ ist das Quadrat der Länge des Vektors $\vec{\varphi}$. Der Vektorraum $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ wurde von uns im wesentlichen bei den Problemen der Elastizitätstheorie benutzt; wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, erweist sich dieser Raum auch bei anderen Problemen als nützlich.

Die in § 9 gegebene Definition der linearen Abhängigkeit läßt sich auf den HILBERT-Raum ausdehnen. Die Elemente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ eines HILBERT-Raums heißen *linear abhängig*, wenn man konstante Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die nicht alle gleich Null sind, derart finden kann, daß die Beziehung

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$$

besteht. Die genannten Elemente heißen *linear unabhängig*, wenn die letzte Gleichung nur für

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

besteht. Es gilt ein dem Satz 2, § 9 vollständig analoger Satz.

**Satz.** *Damit die Elemente* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *eines* HILBERT-*Raumes linear abhängig sind, ist es notwendig und hinreichend, daß die Determinante*

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1), (\varphi_1, \varphi_2), \ldots, (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1), (\varphi_2, \varphi_2), \ldots, (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_n, \varphi_1), (\varphi_n, \varphi_2), \ldots, (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \qquad (14)$$

*verschwindet.* Der in § 9 gegebene Beweis läßt sich ohne Änderungen auf den allgemeinen Fall übertragen.

Die Determinante (14) nennen wir wie früher die GRAMsche Determinante der Elemente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

## § 43. Grenzübergang in HILBERT-Räumen

Ein HILBERT-Raum $H$ sei gegeben und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sei eine Folge[1]) seiner Elemente. Man sagt diese Folge *konvergiere* oder *strebe gegen* $\varphi$, wenn $\varphi$ ein Element von $H$ ist und

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0 \qquad (1)$$

gilt. Das Element $\varphi$ heißt *Grenzwert* der Folge $\{\varphi_n\}$. Wir beschreiben diesen Umstand unter Verwendung der üblichen Symbole:

$$\varphi_n \to \varphi, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi.$$

Wir erläutern unsere Definition an Beispielen.

a) Im Raum $L_2(\Omega)$ bedeutet die Konvergenz $\varphi_n \to \varphi$, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |\varphi_n(P) - \varphi(P)|^2 \, dQ = 0$$

gilt, d. h. daß $\varphi_n(P)$ gegen $\varphi(P)$ im Mittel konvergiert.

b) Ganz analog ist die Konvergenz in $L_2(\Omega; \sigma(P))$ die Konvergenz im Mittel mit dem Gewicht $\sigma(P)$.

c) Die Konvergenz in $L_2^{(r)}(\Omega)$ bedeutet, wie leicht zu sehen ist, die Konvergenz im Mittel der Funktionen der Folge und aller ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $r$ einschließlich gegen eine Grenzfunktion und ihre entsprechenden Ableitungen.

d) Die Konvergenz im Raum $H_A$ (siehe § 42) ist die Konvergenz bezüglich der Energie des Operators $A$.

Es gilt ein den Satz 2, § 7 verallgemeinernder Satz:

**Satz 1.** *Wenn* $\varphi_n \to \varphi$ *und* $\psi_n \to \psi$ *gilt, dann gilt*

$$(\varphi_n, \psi_n) \to (\varphi, \psi).$$

---

[1]) Zur Bezeichnung einer Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ benutzt man häufig das Symbol $\{\varphi_n\}$.

Wie leicht zu verifizieren ist, gilt

$$(\varphi_n, \psi_n) - (\varphi, \psi) = (\varphi_n - \varphi, \psi_n - \psi) + (\varphi, \psi_n - \psi) + (\varphi_n - \varphi, \psi).$$

Daraus folgt nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI.

$$|(\varphi_n, \psi_n) - (\varphi, \psi)| \leq \|\varphi_n - \varphi\| \cdot \|\psi_n - \psi\| + \|\varphi\| \cdot \|\psi_n - \psi\| + \|\varphi_n - \varphi\| \cdot \|\psi\| \to 0,$$

was den Satz beweist.

**Folgerung 1.** Wenn $\varphi_n \to \varphi$ gilt, dann gilt $(\varphi_n, \psi) \to (\varphi, \psi)$.

**Folgerung 2.** Wenn $\varphi_n \to \varphi$ gilt, dann gilt $\|\varphi_n\| \to \|\varphi\|$.

Wir erhalten Folgerung 1, wenn wir in dem Satz $\psi_n \equiv \psi$ setzen, Folgerung 2, wenn wir $\psi_n = \varphi_n$ setzen.

Wir bemerken, daß Folgerung 1 eine unmittelbare Verallgemeinerung des Satzes 2, § 7 auf den Fall eines beliebigen HILBERT-Raumes darstellt.

Wir kehren zum allgemeinen Konvergenzbegriff zurück. Es sei in einem HILBERT-Raum, wir bezeichnen ihn mit $H$, eine gegen das Element $\varphi$ konvergierende Folge $\{\varphi_n\}$ gegeben. Nach Definition ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$. Das heißt, daß man für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $n_0(\varepsilon)$ finden kann, daß $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$ ist. Es sei $k \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Dann gilt

$$\|\varphi_k - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \|\varphi_n - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir schätzen die Norm des Abstandes $\|\varphi_k - \varphi_n\|$ ab. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\|\varphi_k - \varphi_n\| = \|(\varphi_k - \varphi) - (\varphi_n - \varphi)\| \leq \|\varphi_k - \varphi\| + \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung ist, da $\varepsilon$ beliebig ist, gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ n\to\infty}} \|\varphi_k - \varphi_n\| = 0. \tag{2}$$

Wenn also $\varphi_n \to \varphi$ konvergiert, dann ist die Beziehung (2) notwendig erfüllt. Es erhebt sich die Frage: Ist auch die umgekehrte Behauptung richtig, d. h. kann man die Existenz eines Grenzwertes der Folge $\{\varphi_n\}$ behaupten, wenn sie der Beziehung (2) genügt? Im allgemeinen muß man auf die Frage eine negative Antwort geben.

Um das zu erläutern, betrachten wir ein solches Beispiel. Wir betrachten das Lineal, das aus den im Intervall $-1 \leq x \leq +1$ stetigen Funktionen besteht. Wir verwandeln dieses Lineal in einen HILBERT-Raum, indem wir durch die Formel

$$(\varphi, \psi) = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, \overline{\psi(x)}\, dx$$

ein Skalarprodukt definieren. Der von uns konstruierte Raum, wir bezeichnen ihn mit $N$, fällt nicht mit $L_2(-1,1)$ zusammen, da letzterer nicht nur stetige Funktionen als Elemente enthält, sondern auch unstetige.

Wir bilden die Folge der Funktionen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Das graphische Bild dieser Funktionen ist in Abb. 17 dargestellt. Da sie stetig sind, gehören diese Funktionen zu $N$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \|\varphi_k - \varphi_n\|^2 = \lim_{\substack{k\to\infty\\ n\to\infty}} \int_{-1}^{1} [\varphi_k(x) - \varphi_n(x)]^2\, dx = 0$$

gilt.

Die Folge $\{\varphi_n(x)\}$ strebt, im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes, gegen eine unstetige Funktion, die wir mit $\varphi_0(x)$ bezeichnen; es ist

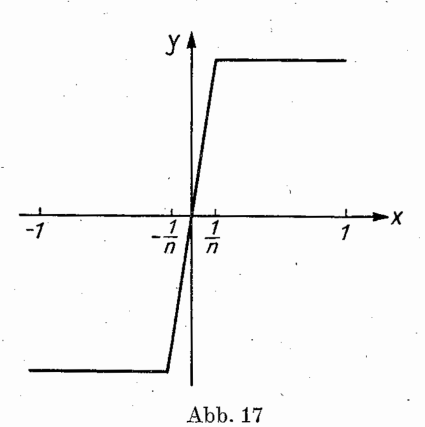



Abb. 17

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

wobei die Konvergenz in den Intervallen $-1 \leq x \leq -\varepsilon$ und $\varepsilon \leq x \leq 1$ gleichmäßig ist; $\varepsilon$ ist eine beliebige positive Zahl. Hieraus ist unschwer zu ersehen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [\varphi_n(x) - \varphi_0(x)]^2\, dx = 0$$

gilt, d. h. daß $\varphi_n(x) \to \varphi_0(x)$ im Mittel gilt.

Die Funktion $\varphi_0(x)$ ist unstetig, ja noch mehr, sie kann nicht stetig gemacht werden, wenn man ihre Werte nur auf einer Menge vom Maße Null abändert. Da der Grenzwert im Sinne der Konvergenz im Mittel eindeutig ist, so gibt es im Raum $N$ kein Element, das Grenzwert für $\{\varphi_n\}$ ist, obgleich diese Folge der Bedingung (2) genügt. Dagegen zieht die Beziehung (2) im Raum $L_2(\Omega)$ die Existenz eines Grenzelementes nach sich, das folgt unmittelbar aus dem Satz von FISCHER-RIESZ (§ 41). In unserem Beispiel ist die Funktion $\varphi_0(x)$ dieses Grenzelement.

*Wir bezeichnen einen* HILBERT-*Raum als vollständig, wenn jede der Beziehung* (2) *genügende Folge seiner Elemente einen Grenzwert hat,* im gegenteiligen Fall nennt man ihn *unvollständig.* Aus dem oben Gesagten folgt, daß der Raum $N$ unvollständig, der Raum $L_2(\Omega)$ vollständig ist. Man kann beweisen, daß auch der Raum $L_2(\Omega;\ \sigma(P))$ vollständig ist.

Einen unvollständigen HILBERT-Raum kann man vollständig machen, indem man ihn durch neue Elemente ergänzt, ähnlich wie die Menge der rationalen Zahlen durch Einführung der irrationalen Zahlen zur Zahlengeraden vervollständigt wird. Möge die Folge $\{\varphi_n\}$ der Beziehung (2) genügen, aber keinen Grenzwert haben. Wir ordnen der Folge $\{\varphi_n\}$ als Grenzwert ein neues Element $\varphi$ zu, das wir *Grenz-* oder *ideales Element* nennen.

Es seien $\varphi$ und $\psi$ als Grenzelemente der Folgen $\{\varphi_n\}$ bzw. $\{\psi_n\}$ definiert. Wir setzen fest, daß $\varphi = \psi$ ist, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \psi_n\| = 0$$

gilt.

Das Skalarprodukt der Grenzelemente definieren wir durch die Formel

$$(\varphi, \psi) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n, \psi_n); \tag{3}$$

dann ist offensichtlich

$$\|\varphi\| = \lim \|\varphi_n\|; \tag{4}$$

die Existenz beider Grenzwerte ist leicht zu beweisen. Man kann zeigen, daß die Ergänzung von $H$ durch alle seine Grenzelemente $H$ zu einem vollständigen Raum macht. Der konkrete Charakter der Grenzelemente hängt von dem zu vervollständigenden Raum ab. So führt die Vervollständigung des Raumes $N$ auf den Raum $L_2(-1, 1)$; Grenzelemente sind hier die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ quadratisch-summierbaren unstetigen Funktionen. Die Vervollständigung des Raumes $H_A$ führt auf die Funktionen mit endlicher Energie bezüglich des Operators $A$. Die Vervollständigung des Raumes $L_2^{(r)}(\Omega)$ hängt mit dem Begriff der verallgemeinerten partiellen Ableitung zusammen, wir möchten hier nicht näher darauf eingehen.

*Wenn wir im folgenden von* HILBERT*schen Räumen sprechen, werden wir sie als vollständig voraussetzen, wenn wir nicht ausdrücklich das Gegenteil sagen.*

Wir führen noch folgenden für das weitere wichtigen Begriff ein. Eine Menge $M$ wollen wir *dicht* im HILBERTschen Raum $H$ nennen, wenn man jedes Element $\varphi \in H$ als Grenzwert einer Folge $\varphi_n \in M$ erhalten kann. So kann man beweisen, daß die Menge der in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ stetigen Funktionen in $L_2(\Omega)$ dicht ist.

Wenn der Raum $H$ durch Vervollständigung eines unvollständigen Raumes $H'$ gewonnen wurde, dann ist $H'$ dicht in $H$. Es sei nämlich $\varphi \in H$. Wenn außerdem $\varphi \in H'$ ist, dann kann man $\varphi_n \equiv \varphi$ setzen, und es ist offensichtlich $\varphi = \lim \varphi_n$, wo $\varphi_n \in H'$ ist. Wenn aber $\varphi \notin H'$ ist, dann ist $\varphi$ ein Grenzelement, und nach dessen Definition existiert eine solche Folge $\varphi_n \in H'$, daß

$$\varphi = \lim \varphi_n$$

gilt.

Im weiteren werden wir jede der Beziehung (2) genügende Folge als *Fundamentalfolge* bezeichnen. Demzufolge gilt: In einem vollständigen Raum ist jede Fundamentalfolge konvergent.

## § 44. Verallgemeinerung des Orthogonalitätsbegriffes

In § 10 haben wir die Begriffe der Orthogonalität im gewöhnlichen Sinne und der Orthogonalität bezüglich der Energie eingeführt. Sie beide stellen Spezialfälle des allgemeineren Begriffes der Orthogonalität der Elemente eines HILBERT-Raumes dar; diesem Begriff ist der vorliegende Paragraph gewidmet.

Zwei Elemente eines HILBERT-Raumes heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist. Eine endliche oder unendliche Folge paarweise orthogonaler Elemente heißt *Orthogonalsystem*. Wenn alle Elemente des Systems normiert sind, d. h. wenn die Norm jedes Elementes gleich Eins ist, dann heißt das System *orthonormiert*. Ein orthonormiertes System $\{\varphi_n\}$ genügt den Beziehungen

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{0}$$

Für beliebige HILBERT-Räume bleibt die Tatsache der linearen Unabhängigkeit orthonormierter Elemente gültig. Auch der „Satz von PYTHAGORAS" bleibt gültig: Wenn $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$ ist und die Elemente $\varphi_k$ paarweise orthogonal sind, gilt

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\varphi_k\|^2. \tag{1}$$

Ohne Änderungen überträgt sich das Orthogonalisierungsverfahren für linear unabhängige Funktionen auf den allgemeinen HILBERT-Raum.

Wir haben in § 10 die Definition eines vollständigen Funktionensystems bezüglich einer bestimmten Funktionenklasse eingeführt. In der allgemeinen Theorie der HILBERT-Räume wird weitgehend eine andere Definition benutzt.

$H$ sei ein HILBERT-Raum und $\{\varphi_n\}$ ein orthonormiertes System darin. Wir wollen dieses System *vollständig in H* nennen, wenn kein identisch von Null verschiedenes Element existiert, das zu allen Elementen des Systems orthogonal ist; andernfalls nennen wir das System *unvollständig*.

Wenn das System $\{\varphi_n\}$ vollständig ist, dann folgt aus den Beziehungen

$$(\varphi_n, \omega) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

daß $\omega = 0$ ist. Das ergibt sich unmittelbar aus der Definition eines vollständigen Systems.

Wie schon in § 10 benutzt man orthonormierte Systeme, um Orthogonalreihen in beliebigen HILBERT-Räumen zu bilden. Wir verweilen kurz bei dieser Sache und beachten, daß im allgemeinen die Elemente des Raumes Funktionen sein können, die auch komplexe Werte annehmen können.

Es sei $\{\varphi_n\}$ ein orthonormiertes System im HILBERT-Raum $H$ und $\varphi$ ein willkürliches Element aus $H$. Wir stellen folgende Aufgabe: Es sind Koeffizienten $\alpha_k$ derart zu bestimmen, daß die Norm $\|\varphi - s_n\|$, wo $s_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n$ ist, möglichst klein wird. Man hat

$$\|\varphi - s_n\|^2 = (\varphi - s_n, \varphi - s_n) = \left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k, \; \varphi - \sum_{m=1}^{n} \alpha_m\varphi_m\right)$$
$$= (\varphi, \varphi) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\varphi_k, \varphi) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k(\varphi, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\bar{\alpha}_k.$$

Wir setzen

$$(\varphi, \varphi_k) = a_k .$$

Die Zahlen $a_k$ nennt man die Fourier-*Koeffizienten* des Elementes $\varphi$ bezüglich des Orthonormalsystems $\{\varphi_k\}$; jetzt wird

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{a}_k - \bar{\alpha}_k a_k) .$$

Unter dem Summenzeichen addieren und subtrahieren wir die Größe $a_k \bar{a}_k = |a_k|^2$. Wir erhalten dann

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{a}_k + \bar{\alpha}_k a_k + a_k \bar{a}_k)$$

$$- \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)(\bar{\alpha}_k - \bar{a}_k) - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

oder schließlich

$$\|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{u} |a_k|^2 .$$

Offensichtlich nimmt die Größe $\|\varphi - s_n\|^2$ ihren kleinsten Wert für $\alpha_k = a_k$ an. Dafür ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k , \qquad \|\varphi - s_n\|^2 = \|\varphi\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 . \tag{2}$$

Die linke Seite der Beziehung (2) ist nicht negativ; daraus folgt sofort die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \|\varphi\|^2 . \tag{3}$$

Aus dieser Ungleichung folgt seinerseits die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 ;$$

dabei gilt offensichtlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|\varphi\|^2 . \tag{4}$$

Die letzte Ungleichung heißt Bessel*sche Ungleichung.*

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) \varphi_k ,$$

die sogenannte Fourier-*Reihe* oder *Orthogonalreihe* des Elementes $\varphi$ in bezug auf das Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$. Wir beweisen zunächst, daß diese Reihe konvergiert,

wenn der Raum $H$ vollständig ist. Wir schätzen die Größe

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} a_k \varphi_k\|^2$$

ab. Da $\varphi_k$ orthogonal und normiert ist, gilt nach Formel (1)

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2.$$

Infolge der Konvergenz der Reihe (4) strebt die Größe rechts gegen Null für $n \to \infty$; nach der Definition eines vollständigen Raumes existiert der Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k.$$

Ferner ist die Differenz $\varphi - s$ orthogonal zu allen $\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Es ist nämlich

$$(\varphi - s, \varphi_k) = (\varphi, \varphi_k) - (s, \varphi_k) = a_k - (s, \varphi_k) = a_k - (s_n, \varphi_k) - (s - s_n, \varphi_k).$$

Wir wählen $n > k$. Da das System $\{\varphi_k\}$ orthonormiert ist, ist, wie man leicht sieht, $(s_n, \varphi_n) = a_k$ und folglich

$$(\varphi - s, \varphi_k) = (s_n - s, \varphi_k).$$

Nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI ist

$$|(\varphi - s, \varphi_k)| \leq \|s_n - s\| \cdot \|\varphi_k\| = \|s_n - s\| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

und da $(\varphi - s, \varphi_k)$ nicht von $n$ abhängt, ist

$$(\varphi - s, \varphi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir nehmen jetzt an, daß das Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$ vollständig ist. Dann ist das zu allen Elementen des Systems orthogonale Element $\varphi - s$ gleich Null, und es gilt

$$\varphi = s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k. \tag{5}$$

Wir haben so folgenden Satz erhalten:

**Satz 1.** *Wenn ein Raum vollständig ist, dann konvergiert die* FOURIER-*Reihe eines beliebigen seiner Elemente bezüglich eines beliebigen vollständigen Orthonormalsystems gegen dieses Element.*

Infolge Ungleichung (1) ist

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Ferner ist nach Folgerung 2 aus Satz 1, § 43

$$\|s\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Wenn das Orthonormalsystem vollständig ist, ist $s = \varphi$, und wir erhalten die sogenannte *Vollständigkeitsrelation*

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{6}$$

Oben wurde festgestellt, daß die Reihe der Quadrate der FOURIER-Koeffizienten eines beliebigen Elementes eines HILBERT-Raumes konvergiert. Auch die umgekehrte Behauptung gilt:

**Satz 2:** *Es gebe Konstanten $a_k$ derart, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ konvergiert, $\{\varphi_n\}$ sei ein Orthonormalsystem. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \tag{7}$$

*(im Sinne der Konvergenz im betrachteten* HILBERT-*Raum); die Konstanten $a_k$ sind die* FOURIER-*Koeffizienten ihrer Summe, und für diese Summe gilt die Vollständigkeitsrelation.*

Bezeichnet man die $n$-te Partialsumme der Reihe (7) mit $s_n$, so gilt

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

woraus die Konvergenz der Reihe (7) folgt. Wir bezeichnen ihre Summe mit $s$. Wir bestimmen die FOURIER-Koeffizienten des Elementes $s$:

$$(s, \varphi_k) = (s_n, \varphi_k) + (s - s_n, \varphi_k).$$

Wenn $n > k$ ist, dann ist $(s_n, \varphi_k) = a_k$. Weiter ist

$$|(s - s_n, \varphi_k)| \leq \|s - s_n\| \cdot \|\varphi_k\| = \|s - s_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daraus folgt, daß $(s, \varphi_k) = a_k$ ist. Schließlich wird

$$\|s\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Wir führen einen Hilfssatz an, den wir im weiteren oft benutzen werden.

**Hilfssatz.** *Ein Element, das orthogonal zu allen Elementen einer dichten Menge ist, ist gleich Null.*

$H'$ sei eine dichte Menge und $(\varphi, \psi) = 0$, wenn $\psi \in H'$ gilt. Wir nehmen ein willkürliches Element $\omega$ unseres Raumes. Nach der Definition der dichten Menge ist $\omega = \lim \psi_n$, wo $\psi_n \in H'$ ist. Nach Folgerung 1, § 43 gilt $(\varphi, \omega) = \lim (\varphi, \psi_n) = 0$,

da $(\varphi, \psi_n) = 0$ ist. Also ist $\varphi$ orthogonal zu jedem beliebigen Element des Raumes und damit insbesondere zu sich selbst. Das bedeutet $(\varphi, \varphi) = 0$. Nach Axiom D ist $\varphi = 0$.

Wir verweilen noch bei einem Begriff, der in den bisherigen Kapiteln unbeachtet blieb, der aber keine geringe Rolle in der Theorie der energetischen Methode spielt. Besonders wichtig sind diejenigen HILBERT-Räume, die eine dichte abzählbare Menge besitzen. Solche Räume heißen *separabel*. Besonders wichtig für Anwendungen ist es, daß der Raum $L_2(\Omega)$, d. h. der Raum der im Gebiet $\Omega$ quadratisch-summierbaren Funktionen, separabel ist. Der Beweis dieser Behauptung beruht auf einem sehr wichtigen Satz[1]), wonach eine Menge von im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen in $L_2(\Omega)$ dicht ist, oder anders ausgedrückt, wonach sich eine beliebige in $\Omega$ quadratisch-summierbare Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch stetige Funktionen im Mittel approximieren läßt. Die weiteren Untersuchungen führen wir unter Voraussetzung eines endlichen Gebietes $\Omega$; nur dieser Fall ist für uns von Interesse.

Es sei $u(P) \in L_2(\Omega)$. Wir bringen $\Omega$ im Innern eines Parallelepipeds $\Pi$ unter und definieren die Funktion $u(P)$ in $\Pi - \Omega$, indem wir sie dort gleich Null setzen. Offensichtlich ist nach dieser Definition $u(P) \in L_2(\Pi)$; nach dem oben erwähnten Satz läßt sich $u(P)$ in $\Pi$ durch eine stetige Funktion im Mittel approximieren. Nach dem Satz von WEIERSTRASS[2]) läßt sich diese Funktion in $\bar{\Pi}$ gleichmäßig (und erst recht im Mittel) durch ein Polynom approximieren, das sich seinerseits, was ohne weiteres klar ist, durch ein Polynom mit rationalen Koeffizienten approximieren läßt.

Es sei $R(P)$ dieses Polynom. Dann ist die Größe

$$\int_{\Pi} |u(P) - R(P)|^2 \, d\Omega$$

beliebig klein; erst recht ist die kleinere Größe

$$\int_{\Omega} |u(P) - R(P)|^2 \, d\Omega$$

beliebig klein, und das bedeutet, daß sich jede im Gebiet $\Omega$ quadratisch-summierbare Funktion in diesem Gebiet im Mittel durch ein Polynom mit rationalen Koeffizienten approximieren läßt. Dann ist die Menge dieser Polynome dicht in $L_2(\Omega)$; diese Menge ist bekanntlich abzählbar.

Die Bedeutung der Separabilitätseigenschaft hängt mit folgendem Satz zusammen:

**Satz 3.** *Dafür, daß in einem* HILBERT-*Raum ein vollständiges endliches oder abzählbares Orthonormalsystem existiert, ist notwendig und hinreichend, daß dieser Raum separabel ist.*

---

[1]) Siehe z. B. W. I. SMIRNOW [5] oder I. P. NATANSON [1].

[2]) Siehe SMIRNOW [2], Punkt 254; den für Funktionen einer Veränderlichen gegebenen Beweis überträgt man leicht auch auf im Parallelepiped stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Notwendigkeit. Es existiere im Raum ein vollständiges endliches oder abzählbares Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$. Nach Satz 1 läßt sich ein beliebiges Element des gegebenen Raumes in die Orthogonalreihe

$$\varphi = \sum_{n=1}^{n} a_n \varphi_n, \qquad a_n = (\varphi, \varphi_n)$$

entwickeln, die im Sinne der Metrik des gegebenen Raumes konvergiert. Das bedeutet unter anderem, daß sich bei gegebenem $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $N$ finden läßt, daß

$$\left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Es ist ferner nicht schwer, solche rationalen Zahlen $a'_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$ zu bestimmen, daß die Ungleichung

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n - \sum_{n=1}^{N} a'_n \varphi_n \right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \| a_n - a'_n \|^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$\left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} a'_n \varphi_n \right\| < \varepsilon .$$

Ein beliebiges Element des Hilbert-Raumes kann also mit beliebiger Genauigkeit durch eine Linearkombination einer endlichen Zahl von Elementen $\varphi_n$ approximiert werden. Das bedeutet, daß die Menge solcher Kombinationen dicht ist. Die Koeffizienten dieser Kombinationen sind aber rational, woraus folgt, daß die genannte Menge abzählbar ist.[1])

Hinlänglichkeit. Es sei ein separabler Hilbert-Raum gegeben. Dann enthält er eine abzählbare dichte Menge. Daß die Menge abzählbar ist, bedeutet, daß man ihre Elemente durchnumerieren kann. Diese Elemente seien

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots . \tag{8}$$

Die Folge (8) ist von der Art, daß es zu jedem beliebigen Element $\varphi \varepsilon H$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein in der Folge (8) enthaltenes Element $\psi_N$ mit der Eigenschaft $\| \varphi - \psi_N \| < \varepsilon$ gibt. Die Elemente der Folge (8) unterziehen wir einem bestimmten „Auswahlverfahren": Wir streichen in (8) alle Elemente, die von den vorhergehenden linear abhängig sind. Als Ergebnis erhalten wir eine neue Folge, die wir mit

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{9}$$

bezeichnen; ihre Elemente, in beliebiger endlicher Anzahl herausgegriffen, sind untereinander linear unabhängig. Gleichzeitig läßt sich jedes beliebige Element von (8) durch eine endliche Anzahl der Elemente von (9) linear ausdrücken. Wenn

[1]) Siehe z. B. I. P. Natanson [1], Kap. 1, § 3.

nämlich $\psi_n$ ein nicht ausgestrichenes Element ist, dann ist es einfach gleich irgendeinem $\omega_m$, wenn das Element $\psi_n$ jedoch ausgestrichen würde, dann hängt es nach der Bildungsvorschrift von den vorangegangenen $\omega_m$ linear ab. Der Umstand, daß die Folge (8) vollständig ist, läßt sich wie folgt formulieren: Zu jedem beliebigen Element $\varphi \varepsilon H$ und zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ kann man eine solche natürliche Zahl $n_0$ und solche Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n0}$ finden, daß

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \omega_k \right\| < \varepsilon \tag{10}$$

gilt. Wir orthogonalisieren die Folge (9); es sei $\{\varphi_n\}$ das dabei gewonnene Orthonormalsystem. Wie wir schon wissen, drückt sich jedes der Elemente $\omega_k$ linear durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ aus. Es sei

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{k} b_{jk} \varphi_j .$$

Dann wird

$$\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \omega_k = \sum_{j=1}^{n_0} \beta_j \varphi_j ; \qquad \beta_j = \sum_{k=j}^{n_0} b_{jk} \alpha_k ,$$

und die Ungleichung (10) nimmt die Gestalt

$$\left\| \varphi - \sum_{j=1}^{n_0} \beta_j \varphi_j \right\| < \varepsilon$$

an. Die letzte Ungleichung beweist, daß das orthonormierte System $\{\varphi_n\}$ in dem gegebenen Hilbert-Raum vollständig ist. Wir bemerken, daß die Folge (9) endlich werden kann, dann wird auch das System $\{\varphi_n\}$ endlich.

## § 45. Allgemeine Definition des Funktionals und des Operators

Von dem allgemeinen Gesichtspunkt aus, den wir im vorliegenden Kapitel entwickeln, hängt die in § 4 gegebene Definition des Operators und des Funktionals im wesentlichen mit dem Raum $L_2(\Omega)$ zusammen. Im vorliegenden Paragraphen dehnen wir diese Definitionen auf beliebige Hilbert-Räume aus.

Wir wollen sagen, auf einer im Hilbert-Raum $H$ liegenden Menge $M$ sei das Funktional $l\varphi$ definiert, wenn jedem Element $\varphi \in M$ des Raumes eine Zahl $l\varphi$ zugeordnet ist. Das einfachste Beispiel für ein Funktional ist die Norm eines Elementes. Auch das Skalarprodukt $(\varphi, \psi)$, wo der zweite Faktor $\psi$ festgehalten wird, stellt ein Funktional dar.

Ein Funktional heißt *linear*, wenn $M$ ein Lineal ist und

$$l(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1\, l\varphi_1 + a_2\, l\varphi_2 \tag{1}$$

gilt, es heißt *beschränkt*, wenn

$$|l\varphi| \leq N \,\|\varphi\| \tag{2}$$

gilt. Hier sind $a_1$, $a_2$, $N$ Konstanten, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi$ sind Elemente des Hilbert-Raumes. Das Skalarprodukt $(\varphi, \psi)$, wo $\psi$ festgehalten wird, ist ein Beispiel für ein

lineares beschränktes Funktional. Seine Linearität ergibt sich aus dem Axiom B, § 42, seine Beschränktheit aus der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI, die zeigt, daß man $N = \|\psi\|$ setzen kann. Die Norm eines Elementes ist ein beschränktes Funktional (hier ist $N = 1$), aber kein lineares.

Ist $l$ ein lineares Funktional, so gilt offensichtlich $l0 = 0$.

Die kleinste der Ungleichung (2) genügende Zahl heißt die *Norm* des beschränkten Funktionals $l\varphi$ und wird mit $\|l\|$ bezeichnet. Es ist also

$$|l\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|, \tag{3}$$

wobei $\|l\|$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

Ein Funktional $l\varphi$ heißt *stetig*, wenn

$$\lim_{\varphi \to \psi} l\varphi = l\psi \tag{4}$$

gilt. Die Norm eines Elementes ist ein stetiges Funktional. Das folgt aus Satz 1, § 43.

Jedes lineare beschränkte Funktional, das in dem ganzen Raum definiert ist, ist stetig. Es sei nämlich $\varphi \to \psi$. Mit Hilfe der Ungleichung (2) und wegen der Linearität des Funktionals findet man

$$|l\varphi - l\psi| = |l(\varphi - \psi)| \leq N \|\varphi - \psi\| \underset{\psi \to \varphi}{\to} 0. \tag{5}$$

Aus dem Bewiesenen folgt unter anderem die Stetigkeit des Skalarproduktes. Man kann auch die umgekehrte Behauptung beweisen: Jedes lineare und stetige Funktional ist beschränkt.

**Satz 1.** *Jedes in $H$ beschränkte lineare Funktional hat die Form eines Skalarproduktes*

$$l\varphi = (\varphi, \psi), \tag{6}$$

*wo $\psi$ ein festes Element des Raumes $H$ ist. Das Element ist eindeutig bestimmt.*

Wir führen den Beweis unter der Voraussetzung, daß $H$ separabel ist. Nach Satz 3, § 44 existiert in $H$ ein vollständiges abzählbares Orthonormalsystem. Es sei $\{\varphi_n\}$ ein solches System. Wir setzen $a_n = \overline{l\varphi_n}$ und zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert.

Wir setzen

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k.$$

Dann gilt

$$l\psi_n = l(a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n) = a_1\, l\varphi_1 + \cdots + a_n\, l\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Da das Funktional $l\varphi$ beschränkt ist, ist $|l\psi_n| \leq \|l\| \cdot \|\psi_n\|$ oder

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \|l\| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.$$

Dividiert man durch $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$ und quadriert dann, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \|l\|^2.$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz unserer Reihe, dabei ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|l\|^2. \tag{7}$$

Die Reihe

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = \lim_{n\to\infty} \psi_n \tag{*}$$

konvergiert.

Es sei jetzt $\varphi$ ein willkürliches Element des Raumes. Wir entwickeln es in eine Fourier-Reihe

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = (\varphi, \varphi_k).$$

Es sei $\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, so daß $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}$ ist. Dann hat man

$$l\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k)\, \bar{a}_k.$$

Die Zahlenfaktoren $\bar{a}_k$ bringen wir in das Zeichen für die skalare Multiplikation und ordnen sie dem zweiten Faktor zu. Dann ist

$$l\varphi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, a_k\varphi_k) = \left(\varphi, \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right) = (\varphi, \psi_n).$$

Jetzt gehe $n \to \infty$. Da sowohl das Skalarprodukt als auch das Funktional $l\varphi$ stetig sind, findet man

$$l\varphi = (\varphi, \psi),$$

was zu beweisen war. Aus der Ungleichung von Cauchy-Bunjakowski

$$|l\varphi| = |(\varphi, \psi)| \leq \|\psi\| \cdot \|\varphi\|$$

folgt, daß $\|l\| \leq \|\psi\|$ ist; andererseits folgt aus (7), daß $\|\psi\| \leq \|l\|$ ist. Wir vergleichen beide Ungleichungen und schließen, daß

$$\|l\| = \|\psi\| \tag{8}$$

gilt.

Wir zeigen jetzt, daß das Element in Formel (6) eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen das Gegenteil an, es sei $l\varphi = (\varphi, \psi')$, wo $\psi' \neq \psi$ ist. Durch Subtraktion der letzten Ungleichung von (6) erhält man

$$(\varphi, \psi' - \psi) = 0.$$

Also ist $\psi' - \psi$ orthogonal zu einem beliebigen Element des Raumes. Man kann speziell $\varphi = \psi' - \psi$ setzen. Dann wird $(\psi' - \psi, \psi' - \psi) = 0$. Nach Axiom D hat man $\psi' - \psi = 0$ oder $\psi' = \psi$.

Manchmal hat man Funktionale zu betrachten, die nicht im ganzen Raum definiert sind, sondern auf einem eine Teilmenge des Raumes bildenden Lineal. Dann tritt oft das Problem der Erweiterung des Funktionals auf, d. h. der Definition des Funktionals auf einer umfassenderen Menge. In dieser Hinsicht ist der folgende Satz wesentlich.

**Satz 2.** *Ein auf einem dichten Lineal lineares beschränktes Funktional läßt sich auf den ganzen Raum erweitern unter Beibehaltung der Norm des Funktionals.*

$H'$ sei ein im HILBERT-Raum $H$ dichtes Lineal, und in $H'$ sei ein beschränktes lineares Funktional $l\varphi$ gegeben. Wir wählen ein Element $\varphi \in H$. Da $H'$ in $H$ dicht ist, kann man eine Folge $\varphi_n \in H'$ finden, so daß $\varphi = \lim \varphi_n$ wird. Dann hat man

$$|l\varphi_m - l\varphi_n| = |l(\varphi_m - \varphi_n)| \leq \|l\| \cdot \|\varphi_m - \varphi_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0,$$

da die Folge $\{\varphi\}_n$ konvergent ist. Wegen des CAUCHYschen Kriteriums über den Grenzwert einer Zahlenfolge existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} l\varphi_n .$$

Setzen wir als Definition

$$l\varphi = \lim_{n\to\infty} l\varphi_n ,$$

so haben wir das Funktional $l\varphi$ auf den ganzen Raum $H$ erweitert. Es ist nicht schwer zu sehen, daß das erweiterte Funktional beschränkt bleibt und daß seine Norm sich nicht ändert. Letzteres ersieht man aus

$$|l\varphi| = \lim_{n\to\infty} |l\varphi_n| \leq \lim_{n\to\infty} \|l\| \cdot \|\varphi_n\| = \|l\| \cdot \|\varphi\| .$$

Man kann zeigen, daß die in dem Satz genannte Erweiterung eindeutig ist.

Wir sagen, in einem HILBERT-Raum sei auf einer Menge $D$ ein Operator $A$ definiert, wenn jedem Element $\varphi \in D$ nach einer gewissen Vorschrift ein und nur ein Element $\psi$ dieses HILBERT-Raumes zugeordnet ist. Wir werden dafür $\psi = A\varphi$ schreiben. Die Menge $D$ heißt *Definitionsbereich* des Operators $A\varphi$, die Menge $D'$ aller möglichen Elemente $\psi$ heißt *Wertebereich* des Operators. Man kann sagen, daß $A\varphi$ eine Funktion ist, die ein Element $\varphi \in D$ in ein Element $\psi \in D'$ überführt. Den Definitionsbereich des Operators $A$ wollen wir wie früher mit $D_A$ bezeichnen. Es muß bemerkt werden, daß in die Definition des Operators sein Definitionsbereich wesentlich eingeht. Zwei Operatoren $A$ und $B$ betrachtet man als gleich, wenn ihre Definitionsbereiche zusammenfallen und wenn für jedes $\varphi$ ihres Definitionsbereiches $A\varphi = B\varphi$ ist. Wenn $D_A$ ein Teil von $D_B$ ist und für jedes Element $\varphi \in D_A$ die Beziehung $A\varphi = B\varphi$ gilt, dann nennt man den Operator $B$ eine *Erweiterung* des Operators $A$.

Der Operator $A$ heißt *linear*, wenn sein Definitionsgebiet ein Lineal ist und ($a_1$, $a_2$ sind Konstanten)

$$A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2 \tag{9}$$

gilt. Wenn $A$ ein linearer Operator ist, dann ist $A0 = 0$. Der Operator heißt *stetig*, wenn

$$\lim_{\varphi \to \psi} A\varphi = A\psi \tag{10}$$

gilt und *beschränkt*, wenn

$$\|A\varphi\| \leq C\,\|\varphi\|, \qquad C = \text{const.} \tag{11}$$

gilt. Die kleinste der Ungleichung (11) genügende Konstante $C$ heißt die *Norm* des beschränkten Operators $A$ und wird durch das Symbol $\|A\|$ bezeichnet. Es ist offensichtlich

$$\|A\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi\|. \tag{12}$$

Ein linearer beschränkter Operator ist stetig; das beweist man ebenso wie für Funktionale. Auch die umgekehrte Behauptung ist richtig: Ein stetiger linearer Operator ist beschränkt.

Im folgenden werden wir nur lineare Operatoren betrachten; wenn wir von Operatoren sprechen, verstehen wir immer lineare Operatoren darunter.

Ein dem Satz 2 für Funktionale analoger Satz gilt auch für Operatoren:

**Satz 3.** *Ein auf einer dichten Menge gegebener beschränkter linearer Operator läßt sich unter Beibehaltung der Norm auf den ganzen Raum erweitern.*

Der Beweis dieses Satzes fällt fast wörtlich mit dem Beweis des Satzes 2 zusammen. Sei der Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$ dicht in $H$. Wenn $\varphi \in H$ ist, dann gilt $\varphi = \lim \varphi_n$, $\varphi_n \in D_A$. Man hat

$$\|A\varphi_n - A\varphi_m\| = \|A(\varphi_n - \varphi_m)\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\| \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0\,.$$

Da der Raum abgeschlossen ist, existiert

$$\lim_{n \to \infty} A\varphi_n\,.$$

Durch

$$A\varphi = \lim_{n \to \infty} A\varphi_n$$

erweitern wir den Operator auf den ganzen Raum. Ebenso wie in Satz 2 beweist man, daß $\|A\|$ dabei ungeändert bleibt und daß eine derartige Erweiterung eines beschränkten Operators eindeutig ist.

Der Operator, welcher jedes Element des Raumes in sich selbst überführt, heißt der *identische Operator*. Wir wollen ihn mit $E$ bezeichnen, so daß $E\varphi \equiv \varphi$ ist. Der Operator, der jedes Element des Raumes in das Nullelement überführt, wird der *Nulloperator* oder der annullierende Operator genannt. Diese beiden Operatoren sind linear und beschränkt; die Norm des identischen Operators ist gleich Eins, die Norm des Nulloperators ist gleich Null.

Unter Summe und Produkt der Operatoren $A$ und $B$ versteht man Operatoren $A + B$ und $AB$, die durch die Beziehungen

$$(A + B)\,\varphi = A\varphi + B\varphi, \qquad AB\varphi = A(B\varphi)$$

definiert sind. Im allgemeinen ist $AB \neq BA$; wenn z. B.

$$A\varphi = \frac{d\varphi}{dx}; \quad B\varphi = x\int_a^b \varphi(s)\,ds$$

ist, so wird

$$AB\varphi = \int_a^b \varphi(s)\,ds,$$

$$BA\varphi = x\int_a^b \varphi'(s)\,ds = x[\varphi(b) - \varphi(a)] \neq AB\varphi.$$

Es ist üblich, $AA = A^2$, $AA^2 = A^3$ usw., allgemein $A^n = AA^{n-1}$ zu setzen. Offensichtlich ist $A^m A^n = A^{m+n}$.

Die Operatoren $A$ und $B$ seien beschränkt. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\|(A + B)\varphi\| \leq \|A\varphi\| + \|B\varphi\|$$

und wegen der Beschränktheit von $A$ und $B$

$$\|(A + B)\varphi\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|\varphi\|.$$

Daraus folgt nach der Definition der Norm eines Operators

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|. \tag{13}$$

Analog ist

$$\|AB\varphi\| = \|A(B\varphi)\| \leq \|A\| \cdot \|B\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\varphi\|$$

und folglich

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Eine wichtige Rolle in allem folgenden spielt der Begriff des *inversen Operators*.

Es sei $D_A$ der Definitionsbereich des Operators $A$ und $R_A$ sein Wertebereich. Nach Definition entspricht jedem Element aus $D_A$ ein und nur ein Element aus $R_A$. Andererseits entspricht jedem Element aus $R_A$ wenigstens ein Element aus $D_A$. Wir nehmen an, daß jedem Element aus $R_A$ nur ein Element aus $D_A$ entspricht; diese Zuordnung definiert einen Operator $B$, der $R_A$ als Definitionsbereich und $D_A$ als Wertebereich hat. Der Operator $B$ heißt invers in bezug auf $A$. Offensichtlich ist ebenfalls der Operator $A$ invers in bezug auf $B$. Wir schreiben $B = A^{-1}$; statt $(A^{-1})^n$ schreibt man $A^{-n}$.

Aus der Definition des inversen Operators ergibt sich folgendes: Wenn $A$ und $B$ invers zueinander sind und $\varphi \in D_A$ ist, dann gilt $BA\varphi = \varphi$; wenn $\psi \in D_B$ ist, gilt ebenso $AB\psi = \psi$. Offensichtlich ist ein Operator, der zu einem linearen invers ist, selbst linear.

Beinahe selbstverständlich ist der folgende

**Satz 4.** *Damit der lineare Operator $A$ einen inversen Operator besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung*

$$A\varphi = 0 \tag{15}$$

*die einzige Lösung $\varphi = 0$ besitzt.*

Es möge der inverse Operator $B$ existieren und $\varphi_0$ sei eine Lösung der Gleichung (15). Dann ist jedenfalls $\varphi_0 \in D_A$; wie oben schon gezeigt wurde, ist $BA\varphi_0 = \varphi_0$. Nun ist aber $BA\varphi_0 = B0 = 0$ und folglich $\varphi_0 = 0$. Wir nehmen jetzt an, daß die Bedingung des Satzes erfüllt ist. Es sei $\psi$ ein beliebiges Element aus dem Wertebereich des Operators $A$. Wir zeigen, daß ihm nur ein Element aus dem Definitionsbereich von $A$ entspricht, damit ist dann die Existenz des Operators $A^{-1}$ festgestellt. Wir nehmen das Gegenteil an: Es mögen dem Element $\psi$ zwei Elemente $\varphi_1$ und $\varphi_2$ aus dem Definitionsbereich des Operators $A$ entsprechen. Das bedeutet, daß $A\varphi_1 = \psi$ und $A\varphi_2 = \psi$ ist. Doch dann ist $A(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$; nach unserer Bedingung ist dann $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ oder $\varphi_1 = \varphi_2$, entgegen der Voraussetzung.

**Satz 5.** *Damit der Operator $A^{-1}$ beschränkt ist, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Konstante $k > 0$ derart gibt, daß für alle $\varphi \in D_A$*

$$\|A\varphi\| \geq k\,\|\varphi\| \tag{16}$$

*gilt.*

Der inverse Operator $B = A^{-1}$ sei beschränkt. Dann ist

$$\|B\psi\| \leq \|B\| \cdot \|\psi\|.$$

Wir setzen $\varphi = B\psi$. Dann ist $\psi = A\varphi$, und die letzte Ungleichung geht über in die Ungleichung (16), wenn man $k = \frac{1}{\|B\|}$ setzt. Umgekehrt sei die Ungleichung (16) gültig, $\varphi_1$ genüge der Gleichung $A\varphi_1 = 0$. Dann ist

$$\|\varphi_1\| \leq \frac{1}{k}\,\|A\varphi_1\| = 0,$$

woraus $\varphi_1 = 0$ folgt. Nach Satz 4 existiert dann der inverse Operator $B = A^{-1}$. Wir setzen $A\varphi = \psi$. Dann ist $\varphi = B\psi$, und aus (16) folgt

$$\|B\psi\| \leq \frac{1}{k}\,\|\varphi\|.$$

Die letzte Ungleichung besagt, daß $B$ ein beschränkter Operator ist, dessen Norm nicht über $\frac{1}{k}$ hinausgeht.

Der Operator $A$ heißt *symmetrisch*, wenn er auf einer dichten Menge definiert ist und wenn für beliebige Elemente $\varphi$ und $\psi$ aus dem Definitionsbereich dieses Operators die Identität

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \tag{17}$$

gilt. Der folgende Satz gibt ein einfaches Kriterium für die Symmetrie eines Operators im komplexen Hilbert-Raum; im reellen Raum ist dieses Kriterium offensichtlich nicht richtig.

**Satz 6.** *Damit der auf einer dichten Menge definierte Operator $A$ symmetrisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß das Skalarprodukt $(A\varphi, \varphi)$ reell ist.*

Notwendigkeit. Der Operator $A$ sei symmetrisch. Setzt man in (3) $\psi = \varphi$, so erhält man $(A\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi)$ oder, nach Axiom B des § 42, $(A\varphi, \varphi) = \overline{(A\varphi, \varphi)}$. Da sie mit ihrer konjugierten übereinstimmt, ist die Größe $(A\varphi, \varphi)$ reell.

Hinlänglichkeit. Man kann die Identität

$$4(A\varphi, \psi) = (A(\varphi + \psi), \varphi + \psi) - (A(\varphi - \psi), \varphi - \psi) \\ + i[(A(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi) - (A(\varphi - i\psi), \varphi - i\psi)]$$

leicht verifizieren. Nach der Bedingung des Satzes sind alle Skalarprodukte auf der rechten Seite reell. Vertauscht man $\varphi$ und $\psi$, so ist

$$4(A\psi, \varphi) = (A(\psi + \varphi), \psi + \varphi) - (A(\psi - \varphi), \psi - \varphi) \\ + i[(A(\psi + i\varphi), \psi + i\varphi) - (A(\psi - i\varphi), \psi - i\varphi)].$$

Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes ergibt sich

$$\begin{aligned} (A(\psi - \varphi), \psi - \varphi) &= (A(\varphi - \psi), \varphi - \psi), \\ (A(\psi + i\varphi), \psi + i\varphi) &= (iA(\varphi - i\psi), i(\varphi - i\psi)) \\ &= (A(\varphi - i\psi), \varphi - i\psi), \\ (A(\psi - i\varphi), \psi - i\varphi) &= (-iA(\varphi + i\psi), -i(\varphi + i\psi)) \\ &= (A(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi). \end{aligned}$$

Daraus ist leicht zu sehen, daß $(A\varphi, \psi) = \overline{(A\psi, \varphi)}$ oder, nach Axiom A (§ 42), $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ ist, d. h. der Operator $A$ ist symmetrisch.

Wir behalten die in § 6 gegebene Definition des positiven und des positiv-definiten Operators bei. Wenn es sich nämlich um den komplexen HILBERT-Raum handelt, dann heißt ein auf einer im HILBERT-Raum dichten Menge definierter Operator $A$ *positiv*, wenn für ein beliebiges von Null verschiedenes Element aus dem Definitionsbereich des Operators die Ungleichung $(Au, u) > 0$ gilt; der Operator $Au$ heißt *positiv-definit*, wenn für ein beliebiges Element aus dem Definitionsbereich des Operators die schärfere Ungleichung

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$$

erfüllt ist, wo $\gamma^2$ eine positive Konstante ist.

Im Falle des komplexen HILBERT-Raumes braucht man nicht die Symmetrie eines positiven oder positiv-definiten Operators zu verlangen; sie ergibt sich aus Satz 6. Im Falle des reellen Raumes muß die Forderung der Symmetrie beibehalten werden.

Für einen Operator $A$, der in einem beliebigen HILBERT-Raum positiv ist, bleibt der Satz 1 des § 11 über die eindeutige Lösbarkeit des Gleichung $Au = f$ in Kraft.

## § 46. Allgemeine Formulierung des Variationsproblems und seine Lösung

Wir betrachten die Gleichung

$$Au = f, \tag{1}$$

worin $u$ ein gesuchtes, $f$ ein gegebenes Element im HILBERT-Raum und $A$ ein positiver oder positiv-definiter Operator ist.

**Satz 1.** *$A$ sei ein positiver Operator. Wenn die Gleichung* (1) *eine Lösung besitzt, dann erteilt diese dem Funktional*

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u) \tag{2}$$

*seinen kleinsten Wert. Umgekehrt, ein Element des* HILBERT-*Raumes, das das Funktional* (2) *zum Minimum macht, genügt der Gleichung* (1).

Wir bemerken außerdem, daß die Definitionsbereiche des Operators $A$ und des Funktionals $F$ zusammenfallen. Das folgt unmittelbar aus der Form des Ausdruckes (2). Ferner ist $F(u) = (Au, u) - 2\operatorname{Re}(u, f)$, und da $A$ ein positiver Operator ist, so nimmt $F(u)$ nur reelle Werte an.

Möge jetzt $u_0$ der Gleichung (1) genügen:

$$Au_0 - f = 0.$$

Ferner sei $v$ ein beliebiges Element aus dem Definitionsbereich $D_A$ des Operators $A$. Wir setzen $v - u_0 = \eta$, so daß $v = u_0 + \eta$ ist. Dann hat man

$$F(v) = (A(u_0 + \eta), u_0 + \eta) - (u_0 + \eta, f) - (f, u_0 + \eta).$$

Löst man die Klammern auf und beachtet, daß $A$ symmetrisch ist, so findet man leicht

$$F(v) = F(u_0) + (Au_0 - f, \eta) + (\eta, Au_0 - f) + (A\eta, \eta).$$

Nun ist $Au_0 - f = 0$, deshalb ist $F(v) = F(u_0) + (A\eta, \eta)$, und da der Operator $A$ positiv ist, ist $F(v) > F(u_0)$, d. h. das Funktional $F(u)$ nimmt sein Minimum bei $u = u_0$ an.

Möge umgekehrt $u_0$ das Funktional $F(u)$ zum Minimum machen. $\eta$ sei ein beliebiges Element aus $D_A$. Die Menge $D_A$ ist als Definitionsbereich eines linearen Operators ein Lineal, deshalb liegt $\lambda\eta$, wo $\lambda$ eine konstante Zahl ist, ebenfalls in $D_A$; aus demselben Grunde gilt auch $u_0 + \lambda\eta \in D_A$. Nach Voraussetzung ist

$$F(u_0 + \lambda\eta) \geq F(u_0).$$

Wir nehmen die Zahl $\lambda$ als reell an. Durch Ausnutzung der Symmetrie von $A$ läßt sich die letzte Ungleichung leicht in die Form

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] + \lambda^2(A\eta, \eta) \geq 0$$

überführen. Das ist nur dann möglich, wenn

$$\operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

gilt. Ersetzt man $\eta$ durch $i\eta$, so erhält man

$$\operatorname{Im}[(Au_0 - f, \eta)] = 0.$$

Daraus folgt, daß $(Au_0 - f, \eta) = 0$ ist. Das Element $Au_0 - f$ des HILBERT-Raumes ist nach der letzten Ungleichung orthogonal zu allen Elementen der dichten Menge $D_A$. Nach dem Lemma des § 44 ist dann $Au_0 - f = 0$, d. h. $u_0$ genügt der Gleichung (1).

**Anmerkung.** Wenn der gegebene HILBERT-Raum reell ist, ist $(u, f) = (f, u)$, und das Funktional (2) nimmt die einfachere Form

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

an, die in den vorangegangenen Kapiteln weitgehend benutzt wurde.

Der soeben bewiesene Satz 1 erlaubt die Behauptung, daß das Problem der Lösung der Gleichung (1) dem Problem, das Minimum des Funktional (2) zu bestimmen, äquivalent ist.

Der genaue Sinn dieser Behauptung ist folgender: Der Operator $A$ sei auf einem im gegebenen HILBERT-Raum $H$ dichten Lineal $M$ definiert und positiv auf diesem Lineal; Formel (2) besagt, daß auf demselben Lineal $M$ auch das Funktional $F(u)$ definiert ist. Jetzt existiere ein Element $u_0 \in M$, das der Gleichung (1) genügt; dann ist $F(u) > F(u_0)$, wo $u$ ein beliebiges Element aus $M$ ist. Wenn umgekehrt $u_0 \in M$ ist und für ein beliebiges Element $u \in M$ die Beziehung $F(u) > F(u_0)$ gilt, dann genügt $u_0$ der Gleichung (1).

Hier müssen zwei Bemerkungen gemacht werden:

1. Unsere Aussage setzt die Existenz eines Elementes voraus, das der Gleichung (1) genügt oder das Funktional (2) zum Minimum macht, während es uns darauf ankommt, die Existenz eines solchen Elementes zu beweisen und Mittel zu finden, dieses Element angenähert oder exakt zu bestimmen. Das ist jedoch nicht möglich, wenn man den Operator $A$ nur als positiv voraussetzt; *im folgenden werden wir ihn als positiv-definit voraussetzen.*

2. Es kann vorkommen, daß der Operator auf einem nicht genügend umfassenden Lineal definiert ist. Dann braucht das Minimalproblem für das Funktional (2) keine Lösung zu besitzen, die jedoch existiert, wenn man das Lineal $M$ und mit ihm den Operator in geeigneter Weise erweitert. Unten werden wir zeigen, daß es für einen positiv-definiten Operator immer eine Erweiterung des Lineals $M$ gibt, für welche das Minimalproblem für das Funktional $F(u)$ eine Lösung hat.[1])

Daß die Erweiterung des Operators das wesentliche an der Sache ist, kann man leicht an einem Beispiel erläutern. Es sei $S$ ein von der Kurve $L$ begrenztes ebenes Gebiet. Wir betrachten den Operator $\Delta^2 w$. Um ihn vollständig zu definieren, muß man seinen Definitionsbereich angeben oder, anders ausgedrückt, die Menge der Funktionen charakterisieren, auf welcher dieser Operator gegeben ist; zu diesem Zweck geben wir die Randbedingungen an, welchen diese Funktionen genügen, und die Anzahl der stetigen Ableitungen, über die sie verfügen. Die Funktionen aus dem Definitionsbereich unseres Operators mögen den Randbedingungen

$$w\,|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0$$

genügen. Vom Standpunkt der Mechanik aus handelt es sich um eine Platte mit fest eingespanntem Rand. Da der Operator $\Delta^2$ vierte Ableitungen enthält, wird man natürlich fordern, daß diese Ableitungen stetig sind. Wir tun das und stellen das Problem der Biegung einer Platte unter der Wirkung einer sich *unstetig*

---

[1]) Soweit uns bekannt ist, wurde die allgemeine Lösung dieses Problems zuerst von K. FRIEDRICHS [2] gefunden. Unsere Lösung (siehe S. G. MICHLIN [4] und [8]) unterscheidet sich von der Lösung von FRIEDRICHS sowohl der Form als auch der Beweismittel nach.

ändernden Normalbelastung. Das führt auf die Integration der Gleichung

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}$$

bei den oben erwähnten Randbedingungen, wo $q(x, y)$ eine unstetige Funktion ist. Diese Gleichung hat jedoch keine Lösung im oben beschriebenen Definitionsbereich des Operators $\Delta^2$, da in unserer Gleichung mindestens eine der Ableitungen vierter Ordnung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

unstetig ist. Wenn wir eine Lösung unserer Gleichung als Element des Definitionsbereiches des Operators $\Delta^2$ finden wollen, dann muß man das bisherige Gebiet in einer solchen Weise erweitern, daß es auch bestimmte Funktionen mit unstetigen Ableitungen vierter Ordnung enthält.

Nach diesen Bemerkungen wenden wir uns der Lösung des Minimalproblems für das Funktional (2) zu. Wir konstruieren eine Lösung unter der Voraussetzung, daß der Operator $A$ positiv-definit[1]) ist, so daß

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$$

gilt.

Als wesentlich für das weitere erweist sich die Einführung eines neuen Hilbert-Raumes, von dem schon in § 42 kurz die Rede war und der dort kurz mit $H_0$ oder $H_A$ bezeichnet wurde.

Auf einem Lineal $M$ führen wir ein neues Skalarprodukt (zum Unterschied gegen das alte bezeichnen wir es mit eckigen Klammern) ein, indem wir

$$[u, v] = (Au, v) \tag{3}$$

definieren. Wir zeigen, daß diese Definition gerechtfertigt ist, d. h. daß sie den Axiomen A bis D des § 42 genügt.

**Axiom A.** Der positiv-definite Operator $A$ ist symmetrisch; wenn $u \in M$, $v \in M$ gilt, ist deshalb

$$[u, v] = (Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}.$$

**Axiom B.**

$$[a_1 u_1 + a_2 u_2, v] = (A(a_1 u_1 + a_2 u_2), v)$$
$$= a_1 (Au_1, v) + a_2 (Au_2, v) = a_1 [u_1, v] + a_2 [u_2, v].$$

**Axiome C und D.** $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \geq 0$; wenn $(Au, u) = 0$, dann ist notwendig $\|u\| = 0$ und demzufolge $u = 0$.

[1]) Der Fall eines positiven, aber nicht positiv-definiten Operators wird in der Arbeit [14] des Verfassers betrachtet.

Durch die Einführung des neuen Skalarproduktes hat sich $M$ in einen HILBERT-Raum verwandelt. Die Norm in diesem Raum bezeichnen wir mit $|u|$, so daß

$$|u|^2 = [u, u] = (Au, u), \quad u \in M \tag{4}$$

wird. Dabei gilt die Ungleichung

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|. \tag{5}$$

Unser neuer HILBERT-Raum kann sich als unvollständig herausstellen; dann vervollständigen wir ihn in gewohnter Weise durch Einführung der Grenzelemente. Diesen vervollständigten HILBERT-Raum bezeichnen wir ebenfalls mit $H_0$ oder mit $H_A$. Für die Größen $[u, v]$ und $|u|$ behalten wir die früher eingeführten Bezeichnungen energetisches Produkt und Norm bezüglich der Energie bei. Wir bemerken noch folgendes: Wenn $H = L_2(\Omega)$ ist, dann besteht $H_0$ aus denjenigen Funktionen, die wir seinerzeit als Funktionen mit endlicher Energie bezeichnet haben.

In denjenigen Fällen, wo betont werden muß, daß die vorkommenden Größen mit dem Operator $A$ zusammenhängen, schreiben wir wie früher $[u, v]_A$, $|u|_A$ statt $[u, v]$, $|u|$.

Wenn $u$ ein Element des Raumes $H_0$ ist, dann folgt nach Definition, daß für ein beliebiges Element $u \in H_0$ eine Folge $u_n \in M$ derart existiert, daß $|u_n - u_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt. Daraus folgt, daß das Lineal $M$ dicht in $H_0$ ist.

**Satz 1.** *Alle Elemente des Raumes $H_0$ liegen auch im Raum $H$.*

Genauer gesagt, jedem Element aus $H_0$ kann man ein und nur ein Element aus $H$ zuordnen, wobei verschiedenen Elementen aus $H_0$ verschiedene Elemente in $H$ entsprechen.

Unsere Behauptung ist offensichtlich, wenn $u \in M$ ist; es genügt dann, das Element $u$ sich selbst zuzuordnen. Jetzt ist noch der Fall zu betrachten, wo $u$ ein Grenzelement des Raumes $H_0$ ist. In diesem Falle existiert nach Definition eine Folge $u_0 \in M$ derart, daß $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt. Nach der Dreiecksungleichung wird dann

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - u| + |u_m - u|$$

und folglich $|u_n - u_m| \xrightarrow[n, m\to\infty]{} 0$. Aus der Ungleichung (5), die zunächst für Elemente des Lineals $M$ aufgestellt wurde, folgt, daß $\|u_n - u_m\| \xrightarrow[n, m\to\infty]{} 0$ gilt. Das bedeutet, daß die Folge $\{u_n\}$ im Raum $H$[1]) gegen ein Element $u'$ dieses Raumes konvergiert, so daß $\|u' - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt. Identifizieren wir $u$ und $u'$, so haben wir den ersten Teil unserer Behauptung bestätigt. Wir beweisen jetzt den zweiten Teil.

Möge den Elementen $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ aus $H_0$ ein und dasselbe Element aus $H$ entsprechen. Dann entspricht die Differenz $u = u^{(1)} - u^{(2)}$ dem Nullelement aus $H$. Wir zeigen, daß $u$ das Nullelement aus $H_0$ ist. Es sei $u$ der Grenzwert (im Sinne der Konvergenz) in $H_0$ der Folge $u_n \in M$, so daß $|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ist. Da dem Element $u$ im Raum $H$ das Nullelement entspricht, so ist nach der oben aufgestellten Zu-

[1]) Diesen Raum setzen wir als vollständig voraus.

ordnung $\|u_n\| \to 0$. Daraus folgt, daß $(f, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ist, wo $f$ ein beliebiges festes Element aus $H$ ist. Nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI gilt nämlich

$$|(f, u_n)| \leq \|f\| \cdot \|u_n\| \to 0.$$

Wir wählen im Lineal $M$ ein willkürliches Element $\varphi$ und setzen $f = A\varphi$. Dann ist $(A\varphi, u_n) \to 0$. Nun ist jedoch $(A\varphi, u_n) = [\varphi, u_n]$, da die Elemente $\varphi$ und $u_n$ beide zu $M$ gehören; daraus ergibt sich $[\varphi, u_n] \to 0$. Durch Grenzübergang erhält man

$$[\varphi, u] = 0.$$

Demnach ist im Raum $H_0$ das Element $u$ orthogonal zu allen Elementen eines in $H_0$ dichten Lineals $M$. Nach dem Lemma des § 43 ist $u$ dann das Nullelement aus $H_0$.

Wir bemerken, daß die Ungleichung (5) nicht nur in $M$ erfüllt ist, sondern im ganzen Raum $H_0$. Es sei nämlich $u$ ein Element aus $H_0$, das nicht zu $M$ gehört. Dann existiert eine Folge $u_n \in M$ derart, daß $|u_n - u| \to 0$ gilt. Wie aus dem Beweis des Satzes 1 folgt, ist dabei $\|u_n - u\| \to 0$. Daraus ergibt sich, daß $|u_n| \to |u|$ und $\|u_n\| \to \|u\|$ gilt. Da $u_n \in M$ ist, gilt für $u_n$ die Ungleichung (5):

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{\gamma} |u_n|.$$

Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|.$$

Jetzt ist das Minimalproblem für das Funktional $F(u)$ leicht zu lösen. Zunächst ist $(Au, u) = |u|^2$. Diese Beziehung erweitert das Funktional $(Au, u)$, das anfänglich nur auf $M$ definiert war, auf den ganzen Raum $H_0$. Wir verstehen jetzt in $F(u)$ unter $u$ ein beliebiges Element des Raumes $H_0$ und in Übereinstimmung damit ersetzen wir $(Au, u)$ durch $|u|^2 = [u, u]$. Ferner ist das lineare Funktional $(u, f)$ in $H_0$ beschränkt. Es ist nämlich

$$|(u, f)| \leq \|f\| \cdot \|u\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma} |u|.$$

Der Satz 1 des § 45 behauptet die Existenz eines eindeutigen Elementes $u_0 \in H_0$ derart, daß für ein beliebiges $u \in H_0$

$$(u, f) = [u, u_0] \tag{6}$$

gilt. Jetzt ist $(f, u) = [u_0, u]$ und

$$F(u) = [u, u] - [u, u_0] - [u_0, u] = [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0]$$

oder kürzer

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2. \tag{7}$$

Aus Formel (7) folgt sofort, daß $F(u)$ *bei* $u = u_0$ *sein Minimum besitzt.*

Damit ist das Minimalproblem für das Funktional (2) gelöst. Der oben erwähnte Satz 1 des § 45 erlaubt es, das Element $u_0$ in Form einer Reihe darzustellen, analog der Reihe (2) des § 12. Wir nehmen an, daß der Raum $H_0$ separabel ist.[1]) Nach Satz 3 des § 44 existiert in $H_0$ ein vollständiges abzählbares Orthonormalsystem, mit anderen Worten, es existiert ein System von Funktionen $\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, das orthonormiert und vollständig bezüglich der Energie ist.

Das in Satz 1 des § 45 erwähnte Funktional $lu$ fällt in unserem Falle mit $(u, f)$ zusammen, das Element $\psi$ mit $u_0$. Nach der Formel (*) des § 45 ist

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

wo $a_k = \overline{l\varphi_k} = \overline{(\varphi_k, f)} = (f, \varphi_k)$ ist. Schließlich gilt

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k. \tag{8}$$

Wir bemerken noch, daß $u_0$ nicht zu $M$ zu gehören braucht, weil die Gleichung $Au = f$ keine Lösung zu besitzen braucht, wenn der Operator $A$ nur auf $M$ definiert ist. Hiermit hängt es zusammen, daß wir oben von der Notwendigkeit einer Erweiterung dieses Operators sprachen.

Studieren wir die von uns gewonnene Lösung des Minimalproblems genauer. Formel (6) ordnet jedem Element $f$ aus $H$ ein gewisses eindeutig bestimmtes Element $u = u_0 \in H_0$ zu, welches das Funktional (2) zum Minimum macht. Dieselbe Formel (6) definiert den Operator $u_0 = Gf$, dessen Definitionsbereich mit dem gegebenen HILBERT-Raum $H$ zusammenfällt und dessen Wertebereich ein Teil von $H_0$ ist.[2]) Mit Hilfe des Operators $Gf$ kann man die Formel (6) in folgender Form darstellen:

$$(u, f) = [u, Gf], \quad u \in H_0. \tag{9}$$

Wir zeigen, daß der Operator $G$ beschränkt und positiv ist. Zunächst ist dieser Operator linear. Wenn nämlich $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ ist, so ist

$$(u, f) = \bar{a}_1 (u, f_1) + \bar{a}_2 (u, f_2) = \bar{a}_1 [u, Gf_1] + \bar{a}_2 [u, Gf_2] = [u, a_1 Gf_1 + a_2 Gf_2].$$

Andererseits ist $(u, f) = [u, Gf]$. Setzt man die beiden Ausdrücke für $(u, f)$ gleich, so findet man

$$[u, Gf - a_1 Gf_1 - a_2 Gf_2] = 0; \qquad u \in H_0;$$

nach dem Lemma des § 43 ist $Gf - a_1 Gf_1 - a_2 Gf_2 = 0$ oder

$$G(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 Gf_1 + a_2 Gf_2,$$

[1]) Wie vom Verfasser bewiesen worden ist ([11], S. 33, Satz 2), ist dafür die Separabilität des Ausgangsraumes $H$ hinreichend.

[2]) In Einzelfällen kann der Wertebereich von $GF$ mit $H_0$ zusammenfallen.

d. h. der Operator $G$ ist linear. Ferner ist nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI

$$|[u, Gf]| = |(u, f)| \leq \|f\| \cdot \|u\|$$

oder, wenn man Ungleichung (5) benutzt,

$$|[u, Gf]| = \frac{\|f\|}{\gamma} |u|.$$

Wir setzen hier $u = Gf$. Dann ist

$$|Gf|^2 \leq \frac{\|f\|}{\gamma} |Gf|$$

oder

$$|Gf| \leq \frac{\|f\|}{\gamma}. \tag{*}$$

Nach Ungleichung (5) ist jedoch $\|Gf\| \leq \frac{|Gf|}{\gamma}$. Setzt man das in (*) ein, so erhält man

$$\|Gf\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma^2},$$

woraus

$$\|G\| \leq \frac{1}{\gamma^2} \tag{10}$$

folgt, d. h. der Operator $G$ ist beschränkt. Schließlich wird nach Formel (9)

$$(Gf, f) = [Gf, Gf] = |Gf|^2 \geq 0.$$

Diese Ungleichung besagt, daß der Operator $Gf$ positiv ist.

**Anmerkung.** Wir nehmen an, daß $f \in H_0$ ist. Damit sehen wir $Gf$ als einen im Raum $H_0$ definierten Operator an. Es ist leicht zu sehen, daß er dabei beschränkt bleibt. Ersetzt man nämlich in (*) $\|f\|$ durch das größere $\frac{|f|}{\gamma}$, dann wird $|Gf| \leq \frac{|f|}{\gamma}$ oder $|G| \leq \frac{1}{\gamma^2}$. Weiter ist nach Formel (9) $[Gf, f] = \overline{[f, Gf]} = \overline{(f, f)} = (f, f) \geq 0$. Daraus folgt wie schon oben die Positivität von $Gf$, diesmal jedoch im Raum $H_0$.

Wenn $Gf = 0$ ist, liefert die Formel (9) $(u, f) = 0$. Das Element $f$ ist demnach orthogonal in $H$ zu allen Elementen von $H_0$ und insbesondere zu allen Elementen des in $H$ dichten Ausgangslineals $M$. Nach dem Lemma des § 43 ist $f = 0$. Demnach hat die Gleichung $Gf = 0$ die einzige Lösung $f = 0$; daraus folgt nach dem Satz 4 des § 45 die Existenz des zum Operator $G$ inversen Operators $G^{-1}$.

**Satz 3.** *Der Operator $G^{-1}$ ist eine Erweiterung des Operators $A$.* Es genügt zu zeigen, daß $G^{-1}u$ auf $M$ mit $Au$ zusammenfällt, d. h. daß $G^{-1}u = Au$ ist, wenn $u \in M$ gilt. $u_0$ sei ein beliebiges Element aus $M$. Wir bezeichnen $Au_0$ durch $f$. Dann ist $Au_0 = f$. Nach Satz 1 macht $u_0$ das Funktional (2) zum Minimum; nach dem in diesem Paragraphen Bewiesenen ist $u_0 = Gf$. Daraus folgt $f = G^{-1}u_0$ und demnach $G^{-1}u_0 = Au_0$, womit der Satz bewiesen ist.

Die von uns konstruierte Lösung des Minimalproblems für das Funktional (2) kann in $D_A = M$ liegen; nach Satz 1 stellt dann diese Lösung gleichzeitig auch die Lösung der Gleichung (1) dar. Wenn sie jedoch nicht in $M$ liegt, werden wir sie trotzdem als (verallgemeinerte) Lösung der Gleichung (1) ansehen. Dadurch erweitern wir den Operator $A$. Man kann zeigen, daß der Operator $A$ bei dieser Erweiterung positiv-definit bleibt.

Es wäre nicht schwer, das Ritzsche Verfahren auch für Operatoren zu entwickeln, die in einem beliebigen Hilbert-Raum gegeben sind. Wir überlassen das dem Leser; wir bemerken nur, daß die Gleichungen (8) und ($8_1$) des § 14 ihre Form auch im allgemeinen Falle beibehalten. Wir bemerken noch, daß im allgemeinen Fall der Satz des § 31 über Eigenwerte und Eigenfunktionen gültig bleibt.

## § 47. Die Methode der minimalen Oberflächenintegrale

Um die allgemeine Bedeutung der Konzeption des Hilbert-Raumes klar zu machen, legen wir jetzt eine neue Methode zur Lösung des gemischten Problems für die homogene Laplace-Gleichung dar. Diese Methode kann übrigens auch auf bestimmte andere Probleme der mathematischen Physik angewendet werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher.

Wir betrachten ein endliches ebenes Gebiet $\Omega$; den Rand $S$ dieses Gebietes setzen wir als aus einer endlichen Anzahl hinreichend glatter Kurven bestehend voraus. Wir betrachten die Menge $M$ der in $\Omega$ harmonischen und einschließlich des Randes stetigen Funktionen. Wir können diese Menge in den reellen Hilbert-Raum umwandeln, wenn wir das Skalarprodukt gemäß der Formel

$$(u, v) = \int_S u(Q)\, v(Q)\, dS; \qquad u, v \in M \tag{1}$$

einführen. Es ist leicht zu sehen, daß die Axiome A bis D (§§ 3 und 43) dabei erfüllt sind. Man kann zeigen, daß der gebildete Hilbert-Raum unvollständig ist; wir vervollständigen ihn. Den so erhaltenen vollständigen Hilbert-Raum bezeichnen wir mit $H$. Als Elemente des Raumes $H$ kann man, wenn man will, nicht die in $\Omega$ harmonischen Funktionen betrachten, sondern die Grenzwerte dieser Funktionen auf $S$; bei diesem Gesichtspunkt fällt der Raum $H$ mit $L_2(S)$, dem Hilbert-Raum der auf $S$ quadratisch summierbaren Funktionen zusammen.

Im Raum $H$ betrachten wir den Operator

$$Au = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(Q)\, u, \tag{2}$$

wo $\sigma(Q)$ eine auf $S$ stetige positive Funktion ist. Es ist unschwer zu sehen, daß der Operator (2) positiv-definit ist. Ausgehend von der Greenschen Formel kann man nämlich leicht verifizieren, daß $Au$ ein symmetrischer Operator ist. Weiter gilt

$$(Au, u) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\ u\right) + (\sigma u, u).$$

Nach der bekannten GREENschen Formel ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) = \int_S u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega + \int_\Omega u \Delta u \, d\Omega.$$

Nun war $u$ eine harmonische Funktion, deshalb ist $\Delta u = 0$ und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right) = \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Omega \geq 0. \tag{3}$$

Weiter gilt

$$(\sigma u, u) = \int_S \sigma(Q) \, u^2(Q) \, dS \geq \sigma_0 \int_S u^2(Q) \, dS = \sigma_0 \, \|u\|^2,$$

wo $\sigma_0 = \min \sigma(Q)$ ist; aus unseren Voraussetzungen ergibt sich, daß $\sigma_0 > 0$ ist. Jetzt gilt offensichtlich

$$(Au, u) \geq \sigma_0 \, \|u\|^2,$$

d. h. der Operator (2) ist positiv-definit. Auf Grund des Satzes des § 46 ist die Aufgabe, eine in $\Omega$ harmonische und auf $S$ der Bedingung

$$Au = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(Q) \, u = f(Q) \tag{4}$$

genügende Funktion zu konstruieren, gleichbedeutend mit dem Minimalproblem für das Funktional

$$(Au, u) - 2(u, f) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u, u\right) - 2(u, f).$$

Diese letztere Aufgabe hat eine Lösung, die man nach dem RITZschen Verfahren finden kann oder als Grenzwert einer beliebigen anderen Minimalfolge.

Wir untersuchen den Charakter der Konvergenz der Minimalfolge $u_n(P)$ gegen die exakte Lösung $u(P)$. Jedenfalls gilt nach Satz 1, § 13 $\|u_n - u\| \to 0$. Ferner ist

$$u(P) - u_n(P) = \int_S [u(Q) - u_n(Q)] \frac{\partial G}{\partial \nu} dS, \tag{5}$$

wo $G$ die GREENsche Funktion (SMIRNOW [2], Punkt 198) des Gebietes $\Omega$ und $\nu$ die Außennormale zu $S$ ist.

Wir betrachten ein abgeschlossenes Gebiet $\Omega'$, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt. Wenn $P \in \Omega'$ und $Q \in S'$ ist, dann bleibt die Funktion $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ beschränkt; es sei

$\frac{\partial G}{\partial \nu} < C$[1]). Jetzt wird nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI

$$|u(P) - u_n(P)|^2 \leq C^2 \left[\int_S |u(Q) - u_n(Q)|\, dS\right]^2$$
$$\leq C^2 |S| \int_S [u(Q) - u_n(Q)]^2\, dS \tag{6}$$

oder

$$|u(P) - u_n(P)| \leq C \sqrt{|S|}\; \|u - u_n\|; \tag{7}$$

darin ist $|S|$ die Länge des Randes $S$. Es wurde schon bemerkt, daß $\|u - u_n\| \to 0$ gilt; jetzt folgt aus Ungleichung (7), daß *die Näherungslösung gleichmäßig gegen die exakte Lösung strebt in jedem abgeschlossenen Gebiet, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt*. Ganz analog kann man zeigen, daß die Ableitungen beliebiger Ordnung der Näherungslösung gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen der exakten Lösung konvergieren in jedem abgeschlossenen Gebiet, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt.

---

[1]) Man kann sich leicht überzeugen, daß $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ positiv ist, deshalb lassen wir die Betragsstriche fort.

KAPITEL VII

# FEHLERABSCHÄTZUNG DER NÄHERUNGSLÖSUNG

## § 48. Allgemeine Bemerkungen

Wir betrachten wie in den vorangegangenen Kapiteln die Gleichung

$$A u = f, \tag{1}$$

wo $A$ ein positiv-definiter Operator und $f$ eine Funktion mit endlicher Norm ist. Im allgemeineren Fall ist $f$ ein Element des HILBERT-Raumes, in dem der Operator $A$ wirkt. Wir haben erläutert, daß die Gleichung (1) eine Lösung hat (mindestens eine verallgemeinerte) und haben eine Reihe von Methoden gebracht, mit deren Hilfe man eine Näherungslösung konstruieren konnte. Im vorliegenden Kapitel beschäftigen wir uns mit der Abschätzung des Fehlers, den unsere Näherungsmethoden in sich bergen, besonders für das RITZsche Verfahren. Zugleich gelingt es uns, eine neue Gruppe von Näherungsmethoden zu entwickeln. In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf die Besprechung der Grundprinzipien, auf denen die Fehlerabschätzung beruht.

Recht einfach, aber bisweilen sehr grob, kann man den Fehler der Näherungslösung folgendermaßen abschätzen. Es sei $u_n$ eine Näherungslösung der Gleichung (1). Wenn man $u_n$ kennt, ist es nicht schwierig, die Größe $\|f - A u_n\|$ zu berechnen, die den Grad der Genauigkeit charakterisiert, mit der die Näherungslösung der Gleichung genügt. Der Fehler der Näherungslösung ist gleich

$$u_0 - u_n = G A (u_0 - u_n) = G(f - A u_n).$$

Daraus erhalten wir nach Formel (11) des § 45 eine Abschätzung für die Norm des Fehlers:

$$\| u_0 - u_n \| \leq \| G \| \cdot \| f - A u_n \| \leq \frac{1}{\gamma^2} \| f - A u_n \|. \tag{2}$$

Die Abschätzung (2) kann sehr grob sein, weil im allgemeinen $A u_n$ nicht gegen $f$ strebt.

Ein anderes Mittel zur Abschätzung der Näherungslösung besteht in folgendem. Wir haben

$$F(u_n) = |u_n - u_0|^2 - |u_0|^2.$$

Wir setzen

$$\min F(u) = - |u_0|^2 = d.$$

Dann ist

$$|u_n - u_0|^2 = F(u_n) - d. \tag{3}$$

Gewöhnlich gelingt es nicht, die Zahl $d$ genau zu bestimmen. Wir nehmen jedoch an, daß uns ein Mittel zur Konstruktion einer Zahl zur Verfügung steht, die kleiner

als $d$ ist und beliebig nahe bei $d$ liegt. $\delta$ sei eine solche Zahl. Wir ersetzen in (3) $d$ durch $\delta$. Dadurch wird die rechte Seite in (3) vergrößert, und wir erhalten die gesuchte Abschätzung

$$|u_n - u_0| < \sqrt{F(u_n) - \delta}. \tag{4}$$

Aus der Ungleichung (5) des § 46 folgt ebenfalls eine Abschätzung

$$\|u_n - u_0\| < \frac{1}{\gamma} \sqrt{F(u_n) - \delta}. \tag{5}$$

Die Sache läuft also auf die Konstruktion einer Zahl $\delta$ hinaus, die kleiner als $d$ ist und möglichst nahe bei $d$ liegt. Die Konstruktion läßt sich verwirklichen, indem man sich auf die im folgenden Paragraphen untersuchte Methode der orthogonalen Projektionen und das TREFFTZsche Verfahren stützt. Wir bemerken, ohne auf Einzelheiten einzugehen, daß man eine Zahl $\delta$ finden kann, indem man sich auf die sogenannte Transformation von FRIEDRICHS stützt, die in der Monographie von R. COURANT und D. HILBERT ([1], Kap. IV, § 9) ausführlich dargestellt ist; weitere Anwendungen und gewisse Verallgemeinerungen der FRIEDRICHSschen Transformation kann man in den Arbeiten von M. G. SLOBODJANSKI [3—8] finden.

Die Abschätzungen (4) und (5) erfordern die Berechnung der Größe $F(u_n)$. Wenn $u_n$ nach dem RITZschen Verfahren gebildet wurde, kann man $F(u_n)$ folgendermaßen berechnen. Wir haben

$$F(u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k a_m - \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, f) - \sum_{k=1}^{n} a_k(f, \varphi_k). \tag{6}$$

Weiter genügen die Koeffizienten $a_k$ den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m)\, a_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Multipliziert man dies mit $a_m$ und summiert über $m$, so erhält man

$$\sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m)\, a_k a_m = \sum_{m=1}^{n} (f, \varphi_m) a_m = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) a_k.$$

Dies in (6) eingesetzt ergibt

$$F(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, f) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(f, \varphi_k). \tag{8}$$

Formel (8) ist bequem dadurch, daß die in sie eingehenden Zahlen $a_k$ und $(f, \varphi_k)$ bereits früher im Prozeß der Aufstellung der Lösung des Systems (7) berechnet wurden. Die Formel (8) wurde unter der Voraussetzung hergeleitet, daß alle betrachteten Funktionen reell sind. Im komplexen HILBERT-Raum wird, wie man leicht zeigen kann,

$$F(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{(f, \varphi_k)}. \tag{9}$$

**Anmerkung.** Wie wir wissen, ist $d = F_{\min}(u) = -|u_0|^2$. Die Aufgabe besteht folglich darin, eine negative Zahl $\delta < -|u_0|^2$ zu finden. Diese Aufgabe ist lösbar, wenn man eine positive Funktion $\Phi(u)$ bilden kann, deren Minimum[1] gleich $|u_0|^2$ ist. Dann kann man nämlich $\delta = -\Phi(u)$ setzen, wo $u$ ein beliebiges Element aus dem Definitionsbereich des Funktionals $\Phi(u)$ ist; offensichtlich kann man durch passende Wahl des Elementes $u$ erreichen, daß $\delta$ beliebig nahe bei $-|u_0|^2$ liegt.

## § 49. Unterräume und Projektionen

Wir betrachten wie gewöhnlich den Raum $L_2(\Omega)$ der in einem endlichen Gebiet $\Omega$ definierten skalaren oder Vektorfunktionen mit endlicher Norm. Wir wählen eine beliebige lineare Menge von zu dieser Klasse gehörenden Funktionen aus; wir nehmen an, ohne weiter darauf einzugehen, daß zu dieser Menge alle ihre Grenzfunktionen[2] hinzugefügt seien. Solche lineare Mengen von Funktionen heißen *Unterräume* bezüglich des Raumes $L_2(\Omega)$.

**Beispiele.** 1. Die Menge der Funktionen, die der Gleichung

$$(u, 1) = \int_\Omega u \, d\Omega = 0 \tag{0}$$

genügen, ist offensichtlich linear und stellt den Unterraum der Funktionen dar, deren Mittelwerte im Gebiet $\Omega$ gleich Null sind.

2. Einen Unterraum bilden auch die Funktionen, die identisch konstant sind.

3. Möge $\Omega$ mit dem Intervall $(0, 2\pi)$ der $x$-Achse zusammenfallen. Die Menge derjenigen Funktionen, deren FOURIER-Reihen nur Sinus-Glieder enthalten, bilden einen Unterraum; die Funktionen dieses Unterraumes sind offensichtlich dadurch charakterisiert, daß sie orthogonal zu den Funktionen $\cos nx$, $n = 0, 1, \ldots$ sind.

4. Wir betrachten die Klasse der Vektorfunktionen, die in einem endlichen Gebiet $\Omega$ des dreidimensionalen Raumes definiert sind und in diesem Gebiet eine endliche Norm besitzen. In dieser Klasse bilden Unterräume:

$\alpha$) die Menge der Vektoren, deren Divergenz gleich Null ist;

$\beta$) die Menge der Gradienten skalarer Funktionen;

$\gamma$) die Menge der Gradienten derjenigen skalaren Funktionen, die auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ verschwinden.

Mit den aufgezählten Beispielen ist selbstverständlich die Mannigfaltigkeit aller möglichen Unterräume in keiner Weise erschöpft.

In den angeführten Beispielen stellte der Unterraum einen Teil der Grundklasse $L_2(\Omega)$ dar. Manchmal führt die lineare Menge zu einem Unterraum, der mit $L_2(\Omega)$ zusammenfällt. Wenn man z. B. zu der Menge aller Polynome (sie ist offensichtlich linear) alle Grenzfunktionen hinzufügt, so erhält man die Klasse $L_2(\Omega)$. Als den anderen Grenzfall kann man sich vorstellen, daß der Unterraum nur aus einer

---

[1] oder wenigstens deren genaue untere Grenze.

[2] D. h. diejenigen Funktionen, welche Grenzfunktionen im Mittel einer in der gegebenen linearen Menge liegenden Funktionenfolge sind.

einzigen Funktion besteht, nämlich aus der identisch verschwindenden. Im folgenden werden wir diese beiden Unterräume nicht betrachten.

Es sei ein separabler (§ 44) HILBERT-Raum $H$ und ein Unterraum $H_1$ in ihm gegeben. Offensichtlich ist $H_1$ ebenfalls separabel; nach Satz 3 des § 44 existiert in $H_1$ ein vollständiges endliches oder abzählbar unendliches Orthonormalsystem. $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ sei dieses System. Wir wählen eine willkürliche Funktion $u(P)$, die jedoch nicht notwendig im Unterraum $H_1$ zu liegen braucht, jedoch eine endliche Norm besitzt und bilden die Orthogonalreihe dieser Funktion nach den Funktionen[1] $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(P), \qquad a_n = (u, \varphi_n). \tag{1}$$

Infolge der BESSELschen Ungleichung (§ 44) konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

und dann konvergiert die Reihe (1) im Mittel; ihre Summe, die wir mit $u_1(P)$ bezeichnen, liegt im Unterraum $H_1$; $u_1(P)$ ist nämlich der Grenzwert der Funktion

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(P),$$

die als Linearkombination der Funktionen $\varphi_n(P) \in H_1$ im Unterraum $H_1$ liegt. Die Funktion $u_1(P)$ nennt man *orthogonale Projektion* oder einfach *Projektion* der Funktion $u(P)$ auf den Unterraum $H_1$.

Wir bilden die Differenz $u_2(P) = u(P) - u_1(P)$. Wir zeigen, daß die Funktion $u_2(P)$ orthogonal zu einer beliebigen Funktion aus dem Unterraum $H_1$ ist. Zunächst ist $(u_2, \varphi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Es ist nämlich

$$(u_2, \varphi_k) = (u, \varphi_k) - (u_1, \varphi_k) = a_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n \varphi_n, \varphi_k\right) = a_k - a_k = 0.$$

Wenn ferner $v(P)$ eine willkürliche Funktion des Unterraumes $H_1$ ist, dann kann man sie in eine FOURIER-Reihe nach den Funktionen $\varphi_n$ entwickeln:

$$v(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(P), \qquad \alpha_n = (v, \varphi_n).$$

Jetzt ist

$$(u_2, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n (u_2, \varphi_n) = 0,$$

was zu beweisen war.

Den Umstand, daß die Funktion $u_2(P)$ orthogonal zu jeder beliebigen Funktion des Unterraumes $H_1$ ist, formuliert man kurz, indem man sagt, daß *die Funktion $u_2(P)$ orthogonal zum Unterraum $H_1$ ist.*

Aus dem Bewiesenen folgt, daß man eine beliebige Funktion $u(P)$ mit endlicher Norm als zweigliedrige Summe darstellen kann, $u(P) = u_1(P) + u_2(P)$, deren

[1] Das System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ kann auch aus einer endlichen Anzahl von Funktionen bestehen; dann enthält die Summe in (1) auch nur endlich viele Summanden.

erster Summand die Projektion der gegebenen Funktion $u(P)$ in den gegebenen Unterraum $H_1$ ist, während der zweite Summand zu diesem Unterraum orthogonal ist.

Die Formel (1) definiert die Projektion der Funktion $u(P)$ in den Unterraum $H_1$ durch ein in $H_1$ vollständiges System orthonormierter Funktionen $\{\varphi_n(P)\}$. Ein derartiges System ist nicht eindeutig, und es erhebt sich die Frage, ob sich die Projektion ändert, wenn man das System $\{\varphi_n(P)\}$ durch ein beliebiges anderes in $H_1$ vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_n(P)\}$ ersetzt. Wir zeigen, daß dem nicht so ist, und daß die Projektion einer gegebenen Funktion in einen gegebenen Unterraum eindeutig bestimmt ist. Wir nehmen das Gegenteil an, $u_1(P)$ und $\tilde{u}_1(P)$ seien zwei Projektionen der Funktion $u(P)$ auf den Unterraum $H_1$. Die Funktionen $u_2(P) = u(P) - u_1(P)$ und $\tilde{u}_2(P) = u(P) - \tilde{u}_1(P)$ sind orthogonal zu $H_1$. Dann ist auch ihre Differenz orthogonal zu $H_1$. Nun ist $u_2(P) - \tilde{u}_2(P) = u_1(P) - \tilde{u}_1(P)$. Die Funktion $\tilde{u}_1(P) - u_1(P)$ liegt in $H_1$ als Differenz zweier Funktionen aus diesem Unterraum. Daher ist

$$0 = (\tilde{u}_2 - u_2, u_1 - \tilde{u}_1) = (u_1 - \tilde{u}_1, u_1 - \tilde{u}_1) = \|u_1 - \tilde{u}_1\|^2$$

und

$$u_1(P) \equiv \tilde{u}_1(P),$$

was zu beweisen war.

Die Projektion besitzt eine wichtige Extremaleigenschaft; wenn nämlich $u(P) \in L_2(\Omega)$ und $u_1(P)$ die Projektion der Funktion $u(P)$ auf den Unterraum $H_1$ ist, dann nimmt die Norm der Differenz $u(P) - v(P)$, wo $v(P)$ eine beliebige Funktion aus $H_1$ ist, ihr Minimum bei $v(P) \equiv u_1(P)$ an. Es ist nämlich

$$\|u - v\|^2 = \|u_2 + (u_1 - v)\|^2 = \|u_2\|^2 + \|u_1 - v\|^2,$$

da $(u_1 - v) \in H_1$ und deshalb $(u_2, u_1 - v) = 0$ ist. Nun ist klar, daß $\|u - v\|^2$ das Minimum bei $v = u_1$ annimmt; dieses Minimum ist gleich $\|u_2\|^2$.

Wir betrachten alle möglichen Funktionen $u(P) \in L_2(\Omega)$ und ihre Projektionen $u_1(P)$ auf den gegebenen Unterraum $H_1$. Die Differenzen $u_2(P) = u(P) - u_1(P)$ bilden einen neuen Unterraum $H_2$, wie leicht zu sehen ist; eine beliebige Funktion aus $H_2$ ist orthogonal zu einer beliebigen Funktion aus $H_1$ oder, wie man sagt, die Unterräume $H_1$ und $H_2$ sind orthogonal. Ferner läßt sich jede Funktion $u(P) \in L_2(\Omega)$ in eine Summe $u = u_1 + u_2$ zerlegen, wo $u_1 \in H_1$ und $u_2 \in H_2$ ist. Diese Tatsache formuliert man gewöhnlich, indem man sagt, daß $L_2(\Omega)$ die *orthogonale Summe der Unterräume* $H_1$ und $H_2$ ist. Man sagt auch, daß jeder der Unterräume $H_1$ und $H_2$ das *orthogonale Komplement* des anderen Unterraumes ist.

*Alles im vorliegenden Paragraphen Gesagte überträgt sich ohne jede Änderung von $L_2(\Omega)$ auf einen beliebigen* HILBERT-*Raum.*

Wenn ein HILBERT-Raum $H$ die orthogonale Summe der Unterräume $H_1$ und $H_2$ darstellt, dann schreibt man

$$H = H_1 \oplus H_2.$$

Diese symbolische Formel schreibt man auch in der Form

$$H_1 = H \ominus H_2; \quad H_2 = H \ominus H_1.$$

Der Leser wird leicht die vollständige Analogie zwischen der in diesem Paragraphen dargelegten Theorie der Projektionen und der Theorie der Projektionen im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum bemerken. Als Unterräume des dreidimensionalen Raumes können Geraden oder Ebenen dienen, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen. Wenn der gegebene Unterraum z. B. eine Gerade darstellt, dann ist die normal zu dieser Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt führende Ebene der zu diesem Unterraum orthogonale Unterraum; offensichtlich ist der dreidimensionale Raum die orthogonale Summe aus einer beliebigen Geraden und einer zu ihr normalen Ebene, wenn sowohl Gerade als auch Ebene durch den Koordinatenanfangspunkt führen. Insbesondere ist z. B. der dreidimensionale Raum die orthogonale Summe der $xy$-Ebene und der $z$-Achse.

Einen beliebigen Unterraum, der mindestens zwei linear unabhängige Elemente enthält, kann man seinerseits in die orthogonale Summe zweier orthogonaler Unterräume zerlegen; so ist die $xy$-Ebene die orthogonale Summe der $x$- und der $y$-Achse. In dieser Weise kann man zum Begriff der Zerlegung eines gegebenen HILBERT-Raumes in die orthogonale Summe einer beliebigen (sogar unendlichen) Zahl orthogonaler Unterräume gelangen. So ist der dreidimensionale Raum die orthogonale Summe der $x$-, der $y$-, der $z$-Achse.

Es ist leicht zu sehen, daß die Unterräume der Beispiele 1 und 2 des vorliegenden Paragraphen orthogonal sind und daß ihre orthogonale Summe den Raum $L_2(\Omega)$ ergibt. Wie wir unten sehen werden, sind die Unterräume $\alpha$ und $\gamma$ des Beispiels 4 ebenfalls orthogonal; ihre orthogonale Summe ergibt den Raum aller Vektoren mit endlicher Norm.

## § 50. Die Methode der orthogonalen Projektionen beim DIRICHLETschen Problem

Wie schon in der Einführung erwähnt wurde, wurde die Methode der orthogonalen Projektionen im Jahre 1909 von S. ZAREMBA in seiner Arbeit [1] formuliert, und zwar in bezug auf das DIRICHLETsche Problem für die LAPLACE-Gleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen. Obgleich ZAREMBA sich noch nicht auf die Operatorentheorie stützen konnte, die damals noch nicht vollständig ausgearbeitet war, treten die wesentlichen Züge der Methode in dem genannten Artikel mit völliger Klarheit hervor: die Lösung des DIRICHLETschen Problems für die LAPLACE-Gleichung erhält ZAREMBA als Projektion einer Funktion, die der aufgestellten Randbedingung genügt, in den Unterraum der harmonischen Funktionen. In einer späteren Arbeit [2] wendet ZAREMBA dieselbe Methode auf die Probleme von DIRICHLET und NEUMANN für die LAPLACE-Gleichung mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher an. Der Terminus „Methode der orthogonalen Projektionen" selbst trat im Jahre 1940 in einer Arbeit von H. WEYL [1] auf, der ebenfalls das DIRICHLETsche Problem betrachtete; auf eine größere Klasse von Randwertaufgaben wurde diese Methode von M. I. WISCHIK [1—3] angewendet. An die Methode der orthogonalen Projektionen knüpfen auch die Arbeiten von J. DIAZ [1] und K. MOREN [1][1]) an.

[1]) Wir erwähnen noch die Aufsätze von M. I. KLIOT-DASCHINSKIJ [1, 2].

Wir suchen die Funktion $u(P)$, die im Innern eines endlichen Gebietes $\Omega$ der POISSONschen Gleichung

$$-\Delta u = f(P) \tag{1}$$

genügt und auf dem Rand $S$ des Gebietes $\Omega$ der Randbedingung

$$u|_S = 0. \tag{2}$$

Wie gewöhnlich nehmen wir an, daß die Funktion $f(P)$ eine endliche Norm hat. Der größeren Klarheit halber nehmen wir an, obwohl das unwesentlich ist, daß $\Omega$ ein dreidimensionales Gebiet ist, so daß

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

gilt. Die aus der Vektoranalysis wohlbekannte Formel $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$ gestattet es, die Gleichung (1) in der Form

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f(P)$$

zu schreiben. Wir setzen $\operatorname{grad} u = \mathfrak{v}$. Wir bemerken, daß unser Problem gelöst ist, wenn wir den Vektor $\mathfrak{v}$ finden, da die Herleitung einer Funktion aus ihrem Gradienten eine ziemlich einfache Sache ist. Jetzt läßt sich unser Problem wie folgt formulieren: *Es ist ein Vektor $\mathfrak{v}(P)$ zu bestimmen, der der Gleichung*

$$-\operatorname{div} \mathfrak{v} = f(P) \tag{3}$$

*genügt und den Gradienten einer auf $S$ verschwindenden skalaren Funktion darstellt.*

Wir führen den Raum der Vektorfunktionen, in dem das Salarprodukt und die Norm durch die Formeln (11) und (12) des § 3 definiert sind, in die Betrachtung ein. Der Kürze halber bezeichnen wir diesen Raum mit $\mathfrak{H}$. Wir führen in $\mathfrak{H}$ zwei Unterräume[1]) ein, die wir mit $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ bezeichnen; als $\mathfrak{H}_1$ nehmen wir den Unterraum derjenigen Vektoren, die Gradienten von auf $S$ verschwindenden skalaren Funktionen sind, als $\mathfrak{H}_2$ den Unterraum der Vektoren, die der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{4}$$

genügen. Das weitere gründet sich auf die wichtige Formel

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2. \tag{5}$$

Formel (5) enthält zwei Behauptungen, die wir zu beweisen haben:

1. Wenn der Vektor $\mathfrak{v}_1$ der Gradient eines auf $S$ verschwindenden Skalars ist und wenn die Divergenz des Vektors $\mathfrak{v}_2$ gleich Null ist, dann sind diese Vektoren in dem Sinne orthogonal, daß

$$(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = \int_\Omega \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 \, d\Omega = 0$$

gilt;

[1]) Sie wurden in Beispiel 4 des vorigen Paragraphen erwähnt. Man muß beachten, daß die Unterräume $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ außer den im Text genannten Vektoren auch noch die Grenzwerte der Folgen solcher Vektoren enthalten.

2. jeder Vektor mit endlicher Norm läßt sich als Summe zweier Vektoren darstellen, von denen der eine der Gradient eines Skalars ist, der auf $S$ gleich Null ist, während der andere eine Divergenz hat, die gleich Null ist.

Es sei $\mathfrak{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi(P)$, $\varphi(P)|_S = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{v}_2 = 0$. Nach einer bekannten Formel der Vektoranalysis ist

$$\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_2 \cdot \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\varphi \mathfrak{v}_2) - \varphi \operatorname{div} \mathfrak{v}_2 .$$

Integriert man diese Gleichung über $\Omega$ und benutzt die Formel von OSTROGRADSKI in Vektorform (§ 2), so findet man

$$(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = \int_S \varphi \mathfrak{v}_2 \, dS - \iiint_\Omega \varphi \operatorname{div} \mathfrak{v}_2 \, d\Omega = 0,$$

da $\varphi = 0$ auf $S$ und $\operatorname{div} \mathfrak{v}_2 = 0$ in $\Omega$ ist. Damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

Die Behauptung 2 beweisen wir unter der Voraussetzung, daß der gegebene Vektor $\mathfrak{v}$ in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ stetige erste Ableitungen besitzt. Wir bezeichnen mit $\varphi(P)$ eine Funktion, die auf $S$ gleich Null ist und der Gleichung $\Delta \varphi = \operatorname{div} \mathfrak{v}$ genügt; die Existenz einer solchen Funktion ist in § 22 bewiesen worden. Jetzt genügt es, $\mathfrak{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi$, $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_1$ zu setzen.

Im allgemeinen Falle kann man eine Folge von Vektoren $\mathfrak{v}^{(n)}(P)$ bilden, welche in $\Omega$ stetige erste Ableitungen haben und gegen den gegebenen Vektor $\mathfrak{v}$ streben, so daß

$$\|\mathfrak{v} - \mathfrak{v}^{(n)}\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{6}$$

gilt. Jeden der Vektoren $\mathfrak{v}^{(n)}$ kann man in die Summe $\mathfrak{v}^{(n)} = \mathfrak{v}_1^{(n)} + \mathfrak{v}_2^{(n)}$ zerlegen, wobei $\mathfrak{v}_1^{(n)} \in \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{v}_2^{(n)} \in \mathfrak{H}_2$ gilt. Daher ist

$$\mathfrak{v}^{(n)} - \mathfrak{v}^{(m)} = (\mathfrak{v}_1^{(n)} - \mathfrak{v}_1^{(m)}) + (\mathfrak{v}_2^{(n)} - \mathfrak{v}_2^{(m)}).$$

Die Summanden rechts sind orthogonal, deshalb ist (§ 10)

$$\|\mathfrak{v}^{(n)} - \mathfrak{v}^{(m)}\|^2 = \|\mathfrak{v}_1^{(n)} - \mathfrak{v}_1^{(m)}\|^2 + \|\mathfrak{v}_2^{(n)} - \mathfrak{v}_2^{(m)}\|^2. \tag{7}$$

Aus (6) folgt, daß $\|\mathfrak{v}^{(n)} - \mathfrak{v}^{(m)}\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$ gilt, und dann gilt infolge der Beziehung (7) für $n \to \infty$, $m \to \infty$ gleichzeitig

$$\|\mathfrak{v}_1^{(n)} - \mathfrak{v}_1^{(m)}\| \to 0 ; \quad \|\mathfrak{v}_2^{(n)} - \mathfrak{v}_2^{(m)}\| \to 0 .$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{v}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{v}_2^{(n)}$ im Mittel gegen entsprechende Grenzwerte $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ konvergieren. Da $\mathfrak{v}_1^{(n)} \in \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{v}_2^{(n)} \in \mathfrak{H}_2$ ist, so wird $\mathfrak{v}_1 \in \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{v}_2 \in \mathfrak{H}_2$. Geht man durch $n \to \infty$ in der Gleichung $\mathfrak{v}^{(n)} = \mathfrak{v}_1^{(n)} + \mathfrak{v}_2^{(n)}$ zur Grenze über, so erhält man

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 ,$$

was zu beweisen war.

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zur Darstellung des Verfahrens der orthogonalen Projektionen über. Wir bilden einen beliebigen Vektor $\mathfrak{V}(P)$, der der Glei-

chung (3) genügt. Im vorliegenden Fall ist das ganz leicht: Man kann z. B.

$$\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_y = 0, \qquad \mathfrak{V}_z = -\int f(x, y, z)\, dz$$

setzen. Wir setzen $\mathfrak{V} = \mathfrak{v} + \mathfrak{w}$, wo $\mathfrak{v}$ der gesuchte Vektor ist. Dann wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = \operatorname{div} \mathfrak{V} - \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0,$$

so daß $\mathfrak{w} \in \mathfrak{H}_2$ ist. Gleichzeitig ist nach den Voraussetzungen der Aufgabe $\mathfrak{v} \in \mathfrak{H}_1$. Jetzt ist klar, daß *der gesuchte Vektor die Projektion des Vektors* $\mathfrak{V}$ *auf den Unterraum* $\mathfrak{H}_1$ *ist*, und darin besteht das Verfahren der orthogonalen Projektionen.

In § 49 wurde eine Methode zur Bildung der Projektion angegeben, die man zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{v}$ verwenden kann; es ist leicht zu sehen, daß diese Methode auf die Orthogonalreihe des § 12 führen würde. Wie wir unten sehen werden, *erweist es sich als zweckmäßig, den Vektor* $\mathfrak{V}$ *nicht auf den für uns notwendigen Unterraum* $\mathfrak{H}_1$ *zu projizieren, sondern auf den „komplementären" Unterraum* $\mathfrak{H}_2$, was den Vektor $\mathfrak{w}$ ergibt; danach ergibt sich der Vektor $\mathfrak{v}$ nach der Formel $\mathfrak{v} = \mathfrak{V} - \mathfrak{w}$.

Zur Bestimmung der Projektion von $\mathfrak{w}$ wählen wir eine Folge von Vektoren $\psi_i(P)$, die der Gleichung $\operatorname{div} \vec{\psi}_i = 0$ genügen; wenn diese Folge orthonormiert und vollständig in $\mathfrak{H}_2$ ist, dann ist nach Formel (1) des § 49

$$\mathfrak{w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\psi}_n, \qquad a_n = (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n),$$

und die Lösung unseres Problems ergibt sich aus der Formel

$$\mathfrak{v}(P) = \mathfrak{V}(P) - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)\, \vec{\psi}_n(P). \tag{8}$$

Wir verweilen ein wenig bei der Analyse der Formel (8). Wir schreiben sie in die Form

$$\mathfrak{V}(P) = \mathfrak{v}(P) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)\, \vec{\psi}_n(P) \tag{9}$$

um. Alle Summanden auf der rechten Seite in (9) sind paarweise orthogonal: Die Vektoren $\vec{\psi}_n(P)$ sind nach Voraussetzung orthogonal, außerdem sind $\mathfrak{v}(P)$ und $\vec{\psi}_n(P)$ orthogonal, da sie in den orthogonalen Unterräumen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ liegen. In diesem Falle wird nach den Formeln (2) und (4) des § 10

$$\| \mathfrak{V} \|^2 = \| \mathfrak{v} \|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)^2$$

und demzufolge

$$\| \mathfrak{v} \|^2 = \| \mathfrak{V} \|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)^2. \tag{10}$$

Wenn man in der Reihe (10) nur die endliche Anzahl der $m$ ersten Glieder beibehält, wird die rechte Seite der Gleichung vergrößert, und man erhält

$$\|\mathfrak{v}\|^2 \leq \|\mathfrak{V}\|^2 - \sum_{n=1}^{m} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)^2. \tag{11}$$

Das entspricht der Ersetzung der exakten Lösung (8) durch eine angenäherte nach der Formel

$$\mathfrak{v}(P) \approx \mathfrak{v}^{(m)}(P) = \mathfrak{V}(P) - \sum_{n=1}^{m} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)\, \vec{\psi}_n(P).$$

Nach Definition der Norm einer Vektorfunktion [Formel (12), § 3] ist

$$\|\mathfrak{v}\|^2 = \int_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, d\Omega.$$

Wir bezeichnen mit $u_0(P)$ eine Funktion, die den Gleichungen (1) und (2) genügt; wir haben dann $\mathfrak{v} = \operatorname{grad} u_0$ und

$$\|\mathfrak{v}\|^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega$$

oder nach der Formel (4) des § 22

$$\|\mathfrak{v}\|^2 = (-\Delta u_0, u_0) = |\, u_0 \,|^2. \tag{12}$$

Andererseits ist nach Formel (4) des § 11

$$|\, u_0 \,|^2 = -\min F(u), \tag{13}$$

wo $F(u) = (-\Delta u, u) - 2(u, f)$ das bei der energetischen Methode benutzte Funktional ist. Jetzt folgt aus den Formeln (11) bis (13)

$$\min F(u) \geq -\left\{\|\mathfrak{V}\|^2 - \sum_{n=1}^{m} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)^2\right\}. \tag{14}$$

Kehren wir jetzt zu § 48 zurück, so sehen wir, daß *es die Methode der orthogonalen Projektionen gestattet, den Fehler einer nach dem* RITZ*schen Verfahren gebildeten Näherungslösung abzuschätzen.* Die Ungleichung (14) besagt nämlich, daß man in den Formeln (4) und (5) des § 48

$$\delta = -\|\mathfrak{V}\|^2 + \sum_{n=1}^{m} (\mathfrak{V}, \vec{\psi}_n)^2 \tag{15}$$

setzen kann; dabei ergibt sich, wie ersichtlich, aus den Formeln (10), (12) und (13)

$$\lim_{m\to\infty} \delta = d = \min F(u).$$

Auf die Frage der Fehlerabschätzung kommen wir im folgenden Paragraphen noch zurück.

## § 51. Allgemeine Formulierung des Verfahrens der orthogonalen Projektionen

Nachdem wir in § 50 das Dirichletsche Problem betrachtet haben, ist es nun nicht mehr schwer, eine allgemeine Formulierung des Verfahrens der orthogonalen Projektionen zu geben, eine Formulierung, die es gestattet, dieses Verfahren auf eine Reihe anderer Randwertaufgaben anzuwenden.

Es sei die Gleichung

$$A u = f \tag{1}$$

zu lösen, wo das gegebene Element $f$ und das gesuchte Element $u$ beide in einem Hilbert-Raum $H$ liegen, während der Operator $A$ in diesem Raum positiv-definit ist. Wir nehmen ferner an, daß das gegebene Problem auf die Bestimmung eines gewissen Elementes $v$ eines im allgemeinen neuen Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}$ führt, wobei das Element $v$ der Gleichung

$$B v = f \tag{2}$$

genügen möge, in welcher $B$ ein linearer Operator ist.

Wir betrachten die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung

$$B v = 0. \tag{3}$$

Diese Menge ist linear; wir fügen zu ihr ihre Grenzelemente hinzu, die wir als verallgemeinerte Lösung der Gleichung (3) deuten; wir erhalten damit einen Unterraum des Raumes $\mathfrak{H}$; diesen Unterraum bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_2$. Wir machen noch eine für das Verfahren der orthogonalen Projektionen wichtige Annahme: Wir nehmen an, daß *das gesuchte Element $v$ im zum Unterraum $\mathfrak{H}_2$ orthogonalen Unterraum $\mathfrak{H}_1$ liegt.*

Nach der Methode der orthogonalen Projektionen wird die Gleichung (2) wie folgt gelöst. Wir bilden ein beliebiges Element $V$, das der Gleichung $BV = f$ genügt und setzen $V - v \doteq w$. Dann ist $Bw = BV - Bv = 0$; das bedeutet, daß $w$ ein Element des Unterraumes $\mathfrak{H}_2$ ist; die Gleichung $V = v + w$ besagt, daß $v$ die orthogonale Projektion des Elementes $V$ auf den Unterraum $\mathfrak{H}_1$ ist.

Die Konstruktion des Elementes $v$ kann auf zweierlei Weise geschehen. Man kann ein in $\mathfrak{H}_1$ orthonormiertes und vollständiges System von Elementen $\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ bilden; dann ist

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (V, \varphi_n)\varphi_n. \tag{4}$$

Gewöhnlich ist die Formel (4) identisch mit der Formel (2) des § 12, die die Lösung der Gleichung (1) liefert, und deshalb fällt diese Variante der Methode der orthogonalen Projektionen im wesentlichen mit dem Ritzschen Verfahren zusammen. Anders kann man das gesuchte Element $v$ bilden, indem man ein in $\mathfrak{H}_2$ *vollständiges* Orthonormalsystem $\psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ wählt. Dann wird

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n)\psi_n$$

und

$$v = V - \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n)\psi_n. \tag{5}$$

Im Falle des im vorigen Paragraphen betrachteten DIRICHLETschen Problems ist $H$ der Raum $L_2(\Omega)$ der in dem gegebenen Gebiet $\Omega$ quadratisch summierbaren Funktionen, während $\mathfrak{H}$ der Raum der ebenfalls in $\Omega$ quadratisch summierbaren Vektorfunktionen ist. Ferner ist $B\mathfrak{v} = -\operatorname{div}\mathfrak{v}$; $\mathfrak{H}_2$ ist der Unterraum der Vektoren mit verschwindender Divergenz; der zu $\mathfrak{H}_2$ orthogonale Unterraum $\mathfrak{H}_1$ besteht wie in § 50 erläutert wurde, aus den Gradienten der skalaren Funktionen, die auf dem Rand $S$ des Gebietes $\Omega$ identisch verschwinden.

Wenn man in der Reihe (5) nur eine endliche Zahl von $m$ Summanden beibehält, dann führt die Methode der orthogonalen Projektionen auf die Näherungslösung

$$v_m = V - \sum_{n=1}^{m} (V, \psi_n)\psi_n. \tag{6}$$

Wir machen noch eine praktisch nützliche Bemerkung. Um die Näherungslösung (6) zu bilden, genügt es, wenn man $m$ paarweise orthogonale und normierte Elemente $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ hat, die im Unterraum $\mathfrak{H}_2$ liegen. Wir nehmen jetzt an, daß wir $m$ nicht notwendig orthonormierte, wohl aber linear unabhängige Elemente $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ dieses Raumes konstruiert haben. Das Orthogonalisierungsverfahren (siehe § 10) gibt uns die Möglichkeit, die Elemente $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ umzuwandeln und wiederum die Näherungslösung des Problems nach Formel (6) zu bilden. Es zeigt sich, daß man den Orthogonalisierungsprozeß vermeiden kann.

Wir betrachten den Ausdruck

$$V - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \psi_n \tag{7}$$

und stellen folgende Aufgabe: Die Koeffizienten $\alpha_n$ sind so zu bestimmen, daß die Norm des Ausdrucks (7) ein Minimum wird. Da die Elemente $\psi_n$ orthogonal und normiert sind, so findet man bei Wiederholung der Überlegungen des § 10, daß $\alpha_n = (V, \psi_n)$ ist. Demnach löst das Element $v_m$ [Formel (6)] das Minimalproblem für den Ausdruck $\left\| v - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \psi_n \right\|$.

Wie sich aus dem Orthogonalisierungsprozeß ergibt, lassen sich die Elemente $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ linear durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ ausdrücken und umgekehrt. Daraus folgt, daß man $v_m$ als das Element bestimmen kann, das die Größe

$$\| V - \sum_{n=1}^{m} b_n \omega_n \| \tag{8}$$

zum Minimum macht; darin sind $b_1, b_2, \ldots, b_m$ Konstanten; das Minimalproblem für die Größe (8) läßt sich einfach lösen.

Zunächst kann man anstelle des Minimums der Größe (8) das Minimum der Größe

$$\| V - \sum_{n=1}^{m} b_n \omega_n \|^2 - \| V \|^2 = (V - \sum_{n=1}^{m} b_n \omega_n,\ V - \sum_{n=1}^{m} b_n \omega_n) - (V, V) \tag{9}$$

bestimmen. Die Größe (9) stellt eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dar. Um das Minimum dieser Funktion zu finden, setzen wir ihre

partiellen Ableitungen nach diesen Veränderlichen gleich Null. Indem wir die Überlegungen des § 14 wiederholen, erhalten wir das System

$$\sum_{n=1}^{m} b_n(\omega_n, \omega_k) = (V, \omega_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Aus diesem System ermittelt man die $b_n$ und erhält $v_m$ in der Gestalt

$$v_m = V - \sum_{n=1}^{m} b_n \omega_n. \tag{11}$$

Die Auflösung des Systems (10) ist im allgemeinen weniger mühsam als der Orthogonalisierungsprozeß.

**Anmerkung.** Das System (10) behält seine Gestalt auch im komplexen HILBERT-Raum.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß das Verfahren der orthogonalen Projektionen es gestattet, die nach dem RITZschen Verfahren gebildete Näherungslösung abzuschätzen. Im allgemeinen Falle stützt sich diese Abschätzung auf eine Zusatzannahme, die in einer sehr großen Zahl von Fällen erfüllt ist:

*Das Element $u_0$, welches der Gleichung (1) genügt, und das Element $v$, auf dessen Bestimmung nach der Methode der orthogonalen Projektionen die Ermittlung des Elementes $u$ hinausläuft, sind durch die Beziehung*

$$\|v\| = |u_0| \tag{12}$$

*verknüpft; die Norm des Elementes $v$ ist im Raum $\mathfrak{H}$ zu berechnen.*

Unter der Annahme, daß die Beziehung (12) erfüllt ist, führen wir die weiteren Betrachtungen wie in § 50 durch. Wir haben

$$\|v\|^2 = \|V\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n)^2 \quad \text{und} \quad \|v_m\|^2 = \|V\|^2 - \sum_{n=1}^{m} (V, \psi_n)^2.$$

Daraus folgt, daß

$$\|v\|^2 \leq \|v_m\|^2 \tag{13}$$

und

$$\lim_{m \to \infty} \|v_m\|^2 = \|v\|^2 \tag{14}$$

gilt. Setzt man

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f),$$

so hat man nach Formel (4) des § 11 und nach den Beziehungen (12) und (13)

$$\min F(u) = F(u_0) = -\|v\|^2 \geq -\|v_m\|^2.$$

In den Formeln (4) und (5) des § 48 kann man jetzt

$$\delta = -\|v_m\|^2 = -\|V\|^2 + \sum_{n=1}^{m} (V, \psi_m)^2 \tag{15}$$

setzen, wobei

$$\lim_{m \to \infty} \delta = d = \min F(u)$$

gilt. Wir erwähnen noch, daß nach Formel (12) des § 14 $F(u_n) = -|u_n|^2$ ist, wo $u_n$ die Näherungslösung nach Ritz der Gleichung (1) ist. Formel (4) des § 48 liefert jetzt eine Fehlerabschätzung des Ritzschen Verfahrens:

$$|u_0 - u_n| \leq \sqrt{\|v_m\|^2 - |u_n|^2}. \tag{16}$$

Genauso ist infolge der Formel (5) des § 48

$$\|u_0 - u_n\| \leq \frac{1}{\gamma} \sqrt{\|v_m\|^2 - |u_n|^2}. \tag{17}$$

Wir bemerken, daß nach Formel (8) des § 48

$$|u_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(f, \varphi_k)$$

gilt. Analog erhält man

$$\|v_m\|^2 = \|V\|^2 - \sum_{k=1}^{m} b_k(V, \omega_k). \tag{18}$$

Es ist nicht schwer, auch eine Abschätzung der nach der Methode der orthogonalen Projektionen gebildeten Näherungslösung (6) zu geben. Wir setzen

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (V, \psi_n)\psi_n, \qquad w_m = \sum_{n=1}^{m} (V, \psi_n)\psi_n.$$

Man hat zunächst

$$v - v_m = w_m - w \text{ und } \|v - v_m\| = \|w - w_m\|.$$

Ferner ist $V = v + w$. Daraus ergibt sich

$$v_m = V - w_m = v + (w - w_m).$$

Die Summanden rechts sind orthogonal, da $v \in \mathfrak{H}_1$ und $(w - w_m) \in \mathfrak{H}_2$ gilt. Daraus ergibt sich

$$\|v_m\|^2 = \|v\|^2 + \|w - w_m\|^2$$

und

$$\|v - v_m\|^2 = \|w - w_m\|^2 = \sqrt{\|v_m\|^2 - \|v\|^2}.$$

Wie früher sei $u_n$ die Näherungslösung der Gleichung (1) nach Ritz. Dann ist

$$|u_n|^2 \leq |u_0|^2 = \|v\|^2,$$

und die letzte Gleichung liefert die gesuchte Abschätzung

$$\|v - v_m\| \leq \sqrt{\|v_m\|^2 - |u_n|^2}. \tag{19}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die rechten Seiten in den Abschätzungen (16) und (19) identisch sind.

In Kapitel VIII wird ein numerisches Beispiel für die Fehlerabschätzung mit Hilfe des Verfahrens der orthogonalen Projektionen gegeben.

Zum Abschluß dieses Paragraphen machen wir noch folgende Anmerkung. Das Element $v$, das die Projektion des Elementes $V$ darstellt, hat eine minimale Norm; da $V$ ein willkürliches, der Gleichung (2) genügendes Element ist, ist das Element $v$ die Lösung folgender Variationsaufgabe: *Es ist die Lösung der Gleichung* $Bv = f$ *mit der kleinsten Norm zu bestimmen.*

## § 52. Einige ergänzende Betrachtungen[1])

Im vorigen Paragraphen wurde eine Darstellung der Methode der orthogonalen Projektionen gegeben, die sich auf folgende Annahmen gründete:

a) Die Lösung der Gleichung $Au = f$ führt auf die Bestimmung eines Elementes $v$, das in einem neuen HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$ liegt und der Gleichung $Bv = f$ genügt;

b) das Element $v$ liegt in einem Unterraum, der orthogonal zum Unterraum der Lösungen der homogenen Gleichung $Bv = 0$ ist;

c) $\|v\| = |u|$.

Im vorliegenden Paragraphen wird eine ziemlich allgemeine Bedingung genannt, deren Erfüllung auch die Erfüllung der oben aufgezählten Annahmen nach sich zieht. Diese Bedingung besteht in folgendem: *Der positive Operator* $A$ *möge als Produkt*

$$A = T^*T \tag{1}$$

*zweier adjungierter Operatoren dargestellt sein,* wobei der Operator $T$ aus dem gegebenen HILBERT-Raum $H$ in einen HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$ wirkt und insbesondere auf dem ganzen Raum $H_A$ definiert ist.

Wir bemerken, daß dabei der adjungierte Operator $T^*$ aus dem Raum $\mathfrak{H}$ in den Raum $H$ wirkt. Die Gleichung $Au = f$ nimmt nun die Form

$$T^*Tu = f \tag{2}$$

an. Wir setzen $Tu = v$. Dann wird

$$T^*v = f. \tag{3}$$

Damit wird die Annahme a) bestätigt, wenn man $B = T^*$ setzt. Von praktischem Interesse ist der Fall, daß die homogene Gleichung

$$T^*u = 0 \tag{4}$$

von Null verschiedene Lösungen besitzt. Die Menge dieser Lösungen bildet einen Unterraum $\mathfrak{H}_2$ des Raumes $\mathfrak{H}$. Wir zeigen, daß das gesuchte Element $v = Tu$ orthogonal zu $\mathfrak{H}_2$ ist. Wenn nämlich $w \in \mathfrak{H}_2$ ist, dann ist $T^*w = 0$, und es gilt

$$(v, w)_{\mathfrak{H}} = (Tu, w)_{\mathfrak{H}} = (u, T^*w)_H = 0 \tag{5}$$

(das Zeichen unten besagt, in welchem Raum das Skalarprodukt zu berechnen ist). Gleichung (5) zeigt die Erfüllung der Annahme b).

---

[1]) Für das Verständnis des vorliegenden Paragraphen ist die Kenntnis der Grundlagen der Funktionalanalysis notwendig.

Wir wenden uns der Annahme c) zu. Es sei $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$. Dann setzen wir $Tu_1 = v_1$, $Tu_2 = v_2$ und erhalten

$$[u_1, u_2] = (Au_1, u_2)_H = (T^*T_1, u_2)_H = (Tu_1, Tu_2)_{\mathfrak{H}} = (v_1, v_2)_{\mathfrak{H}}.$$

Wenn insbesondere $u_1 = u_2 = u$, $Tu = v$ ist, dann wird

$$|u| = \|v\|_{\mathfrak{H}}. \tag{6}$$

Durch Grenzübergang ergibt sich die Gleichung (6) für alle $u \in H_A$ und Annahme c) ist bewiesen. Wir bemerken, daß für die Skalarprodukte die Beziehung

$$[u_1, u_2] = (Tu_1, Tu_2)_{\mathfrak{H}} \tag{7}$$

gilt.

Nachdem die Annahmen a), b), c) bestätigt sind, ist der weitere Aufbau sehr einfach. $\mathfrak{H}_1$ sei der zu $\mathfrak{H}_2$ orthogonale Unterraum und $V$ eine beliebige Lösung der Gleichung (3). Dann ist das gesuchte Element $v$ die Projektion des Elementes $V$ in den Unterraum $\mathfrak{H}_1$. Nachdem das Element $v$ konstruiert ist, bleibt noch die Bestimmung von $u$ aus der Gleichung $Tu = v$. Aus Formel (6) [Annahme c)] ergibt sich, daß der Operator $T^{-1}$ auf dem ganzen Raum $\mathfrak{H}_1$ definiert ist, und daß seine Norm als die eines aus $\mathfrak{H}_1$ in $H_A$ wirkenden Operators gleich Eins ist. In Aufgaben von praktischem Charakter ist der Operator $T^{-1}$ gewöhnlich sehr einfach und die Gleichung $Tu = v$ läßt sich ohne Mühe lösen; ein derartiges Beispiel haben wir in § 50 betrachtet.

Wir zeigen jetzt, daß die Projektion in den Unterraum $\mathfrak{H}_1$ unmittelbar zu Formel (2) des § 12 führt und demzufolge gleichbedeutend mit der Anwendung des Ritzschen Verfahrens ist.

Es sei $\{\eta_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{H}_1$, so daß

$$(\eta_j, \eta_k)_{\mathfrak{H}} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k \end{cases} \tag{8}$$

gilt. Dann ist

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (V, \eta_j)\eta_j. \tag{9}$$

Wir setzen $T^{-1}\eta_j = \varphi_j$. Es ist leicht zu sehen, daß die Folge $\{\varphi_j\}$ in $H_A$ orthonormiert und vollständig ist. Es wird nämlich

$$(\eta_j, \eta_k)_{\mathfrak{H}} = (T\varphi_j, T\varphi_k)_{\mathfrak{H}}$$

und nach den Formeln (7) und (8)

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Wir nehmen an, daß die Folge $\{\varphi_j\}$ in $H_A$ nicht vollständig ist. Dann existiert ein normiertes Element $\varphi \in H_A$ derart, daß $[\varphi, \varphi_j] = 0$; $j = 1, 2, \ldots$ ist. Nach Formel (7) ist $(T\varphi, \eta_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Da das System $\{\eta_j\}$ in $\mathfrak{H}_1$ vollständig ist, ist $T\varphi \in \mathfrak{H}_2$. Aber dann ist $T^*(T\varphi) = 0$ oder $A\varphi = 0$, und da der Operator $A$ positiv ist, ist $\varphi = 0$, entgegen der Voraussetzung.

Wendet man auf beide Seiten der Gleichung (9) den Operator $T^{-1}$ an, der in $\mathfrak{H}_1$ beschränkt ist, so hat man

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (V, \eta_j)_{\mathfrak{H}} \varphi_j. \tag{10}$$

Ferner ist $V = v + w$, $w \in \mathfrak{H}_2$. Daraus folgt

$$(w, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = 0$$

und

$$(V, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = (v, \eta_j)_{\mathfrak{H}} = (Tu, T\varphi_j)_{\mathfrak{H}} = [u, \varphi_j] = (Au, \varphi_j)_H = (f, \varphi_j)_H.$$

Formel (10) nimmt die Form

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)_H \varphi_j$$

an, was mit Formel (2) des § 12 identisch ist.

## § 53. Das NEUMANNsche Problem

Das NEUMANNsche Problem für die POISSONsche Gleichung besteht in der Bestimmung einer Funktion $u(P)$, die im Innern eines Gebietes $\Omega$ der Gleichung

$$-\Delta u = -\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f(P) \tag{1}$$

genügt sowie der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0 \tag{2}$$

auf dem Rand $S$ von $\Omega$. Die Lösung existiert, wenn die Funktion $f(P)$, deren Norm als endlich vorausgesetzt wird, zu Eins orthogonal ist, so daß

$$\int_\Omega f(P)\, d\Omega = 0 \tag{3}$$

gilt; die Lösung ist eindeutig, wenn man sie ebenfalls, der Forderung

$$\int_\Omega u(P)\, d\Omega = 0 \tag{4}$$

orthogonal zu Eins zu sein, unterwirft.

Im Hinblick auf die Anwendung des Verfahrens der orthogonalen Projektionen wählen wir als Raum $H$ die Menge der Funktionen, die eine endliche Norm besitzen und orthogonal zu Eins sind, als Raum $\mathfrak{H}$ die Menge der Vektoren, deren Norm und Skalarprodukt durch die Formeln (11) und (12) des § 3 definiert sind. Wir setzen $\operatorname{grad} u = \mathfrak{v}$; die Gleichungen (1) und (2) ergeben dann

$$-\operatorname{div} \mathfrak{v} = f(P), \qquad v_\nu|_S = 0. \tag{5}$$

Danach ist der Operator $B$ in unserer Aufgabe der Operator — div, gegeben auf den Vektoren, deren Normalkomponente auf $S$ gleich Null ist. Der Unterraum $\mathfrak{H}_2$ besteht aus den die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = 0, \qquad w_\nu|_S = 0 \tag{6}$$

erfüllenden Vektoren. Die Wiederholung der Überlegungen des § 50 führt zu dem Ergebnis, daß das orthogonale Komplement zu $\mathfrak{H}_2$ der Unterraum $\mathfrak{H}_1$ der Gradienten *aller möglichen* skalaren Funktionen darstellt.

Wenn man einen Vektor $\mathfrak{V}$ bestimmen kann, so daß $-\operatorname{div} \mathfrak{V} = f$ und $V_\nu|_S = 0$ ist, dann findet man $\mathfrak{v}$ als Projektion des Vektors $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{H}_1$. Zu deren Bildung muß man eine in $\mathfrak{H}_2$ vollständige Folge von Vektoren $\mathfrak{w}^{(n)}(P)$ wählen, welche wir zur Vereinfachung der Darstellung als orthonormiert annehmen; dann wird

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} u = \mathfrak{V} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{V}, \mathfrak{w}^{(n)})\, \mathfrak{w}^{(n)}(P).$$

Die Koordinatenvektoren $\mathfrak{w}^{(n)}$ müssen den Gleichungen (6) genügen; die effektive Bildung eines solchen Systems stößt auf gewisse technische Schwierigkeiten.

**Anmerkung.** Das Verfahren der orthogonalen Projektionen läßt sich ohne Mühe auf elliptische Gleichungen der allgemeinen Gestalt

$$-\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P) \tag{7}$$

ausdehnen. Hier kann man für $\mathfrak{H}$ den Raum der Vektoren $\mathfrak{v}\,(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \int\limits_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} C_{jk} v_j w_k \, d\Omega \tag{8}$$

nehmen, wo die Matrix $\|C_{jk}\|_{j,k=1}^{j,k=m}$ die Inverse der Matrix $\|A_{jk}\|_{j,k=1}^{j,k=m}$ ist. Z. B. sei die Randbedingung $u|_S = 0$ gestellt. Als Unterraum $\mathfrak{H}_1$ wählen wir die Menge der Vektoren $\mathfrak{v}\,(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, wo

$$v_j = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \tag{9}$$

und $u(P)$ Funktionen sind, die auf $S$ verschwinden. Man kann leicht zeigen, daß der orthogonale Unterraum $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ aus den der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{10}$$

genügenden Vektoren besteht. Wenn die Randbedingung

$$\left[\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j)\right]_S = 0 \tag{11}$$

gestellt ist, dann besteht $\mathfrak{H}_1$ aus der Gesamtheit der Vektoren (9), doch jetzt ist die

Funktion $u(P)$ keiner Randbedingung unterworfen; das orthogonale Komplement $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ besteht aus den Vektoren, die der Gleichung (10) genügen und außerdem der Randbedingung

$$v_\nu|_S = 0. \tag{12}$$

Die Konstruktion des Raumes $\mathfrak{H}$ und seine Zerlegung in orthogonale Unterräume wird schwieriger, wenn auf der linken Seite der Gleichung (7) ein Summand der Form $C(P) \cdot u(P)$ hinzutritt; ein derartiges Beispiel wurde in einem Aufsatz von M. I. Wischik [1] bearbeitet. In anderen Arbeiten desselben Verfassers [2], [3] werden Beispiele für Gleichungen höheren Grades behandelt.

## § 54. Das Prinzip von Castigliano und zweiseitige Abschätzungen in der Elastizitätstheorie

Das bekannte Castiglianosche Prinzip der Elastizitätstheorie kann man ausgehend vom Verfahren der orthogonalen Projektionen erhalten. Zur Vereinfachung der Schreibweise beschränken wir uns auf den Fall eines homogenen isotropen elastischen Mediums, obgleich der Fall eines inhomogenen anisotropen Mediums keine wesentliche Erschwerung mit sich bringt. Wir wollen die Randbedingungen ebenfalls als homogen voraussetzen.

Wir betrachten einen Körper $\Omega$, der von der Fläche $S$ begrenzt wird. Wie gewöhnlich nehmen wir an, daß der Körper endlich und die ihn begrenzende Fläche stückweise glatt ist. Wir betrachten die Gesamtheit aller in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ definierten Spannungstensoren. Wir bezeichnen einen derartigen Tensor mit $T$, seine Komponenten mit $\sigma_x, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{xy}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{xz}, & \tau_{yz}, & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Mit jedem Tensor $T$ ist ein Tensor $E(T)$ nach den Formeln

$$E(T) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x, & \gamma_{xy}, & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy}, & \varepsilon_y, & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz}, & \gamma_{yz}, & \varepsilon_z \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \sigma(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \sigma(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \sigma(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\sigma)}{E}\tau_{yz} \end{aligned} \tag{3}$$

verknüpft. Hier bedeutet $E$ den Elastizitätsmodul, $\sigma$ die Poissonsche Zahl des Materials des Körpers. Wenn der Spannungszustand des Körpers elastisch ist,

sind $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{yz}$ die Verzerrungskomponenten: Sie sind mit den Verschiebungskomponenten durch die Formeln (1) des § 26 verknüpft. Die Gleichungen (3) sind gleichbedeutend mit den LAMÉschen Gleichungen (§ 26).

Wir wandeln die Menge der Tensoren $T$ in einen reellen HILBERT-Raum[1]) um, indem wir das Skalarprodukt und die Norm durch die Formeln

$$(T', T'') = \int_\Omega (\sigma'_x \varepsilon''_x + \sigma'_y \varepsilon''_y + \sigma'_z \varepsilon''_z + \tau'_{xy}\gamma''_{xy} + \tau'_{xz}\gamma''_{xz} + \tau'_{yz}\gamma''_{yz})\, d\Omega; \tag{4}$$

$$\| T \|^2 = \int_\Omega (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})\, d\Omega \tag{5}$$

definieren. Unter Verwendung der Formeln (3) läßt sich leicht zeigen, daß das durch Formel (4) definierte Skalarprodukt den Axiomen A bis D des § 3 genügt. Insbesondere kann man leicht zeigen, daß

$$\sigma'_x \varepsilon''_x + \cdots + \tau'_{yz}\gamma''_{yz} = \sigma''_x \varepsilon'_x + \cdots + \tau''_{yz}\gamma'_{yz}$$

gilt; daraus folgt die Symmetrie des Skalarproduktes. Den so gebildeten HILBERT-Raum bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$.

Wenn $T$ ein Tensor *elastischer* Spannungen ist, dann ist $\frac{1}{2}\,\| T \|^2$ die potentielle Energie der Deformation des Körpers $\Omega$. In Erweiterung der Definition werden wir die Größe $\frac{1}{2}\,\| T \|^2$ für einen beliebigen Spannungstensor $T$ als potentielle Energie der Deformation bezeichnen.

Wir wollen das gemischte Problem der Elastizitätstheorie [Aufgabe c) in § 26] betrachten; daraus erhält man Aufgabe a) über Körper mit eingespanntem Rand und Aufgabe b) über Körper mit freiem Rand als Spezialfälle. Wir erinnern daran, daß das gemischte Problem der Elastizitätstheorie in der Bestimmung des Vektors der elastischen Verschiebung $\mathfrak{u}(u_x, u_y, u_z)$ sowie der mit ihm verbundenen Verzerrungen und Spannungen besteht; die angeführten Größen hängen untereinander durch die Gleichungen (3) (oder die LAMÉschen Gleichungen) und die Gleichungen (1) des § 26 zusammen. Ferner genügen die Spannungskomponenten den Gleichgewichtsbedingungen[2])

$$\left.\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) &= X, \\
-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) &= Y, \\
-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) &= Z,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

[1]) Genauer gesagt, den HILBERT-Raum bildet die Gesamtheit derjenigen Tensoren, für die das unten eingeführte Integral (5) endlich ist.

[2]) Vgl. die Gleichung (5) des § 26.

wo $X$, $Y$, $Z$ die Komponenten der Volumkraft $\mathfrak{K}$ sind. Schließlich formuliert man die Randbedingungen wie folgt: Die Fläche $S$ zerlegt man in die Teile $S_1$ und $S_2$, wobei

$$\mathfrak{u}\,|_{S_1} = 0 \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{t}^{(\nu)}\,|_{S_2} = 0 \tag{8}$$

gilt; $\mathfrak{t}^{(\nu)}$ ist der auf das Flächenelement mit der Normalen $\nu$ wirkende Spannungsvektor.

Wir betrachten die Menge der Spannungstensoren, die der Randbedingung (8) und den homogenen Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

genügen. Diese Menge bildet einen Unterraum in $\mathfrak{H}$, den wir mit $\mathfrak{H}_2$ bezeichnen. Wir bemerken, daß im Falle der Aufgabe a), wenn der ganze Rand des Körpers eingespannt ist, die Bedingung (8) entfällt und die im Unterraum $\mathfrak{H}_2$ liegenden Tensoren keinerlei Randbedingungen zu erfüllen brauchen.

Als Unterraum $\mathfrak{H}_1$ wählen wir die Menge[1]) der Spannungstensoren mit der Eigenschaft, daß die ihnen entsprechenden Größen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{yz}$ die Verzerrungen sind, die mit dem Vektor $\mathfrak{u}(P)$ durch die Formeln (1) des § 26 zusammenhängen; wir fordern noch, daß der Vektor $\mathfrak{u}(P)$ der Randbedingung (7) genügt. Im Falle der Aufgabe b), wenn der Rand des Körpers frei von Spannungen ist, entfällt die Randbedingung (7), und die Vektoren $\mathfrak{u}(P)$, mit denen die Tensoren aus dem Unterraum $\mathfrak{H}_1$ zusammenhängen, brauchen keine Randbedingungen zu erfüllen.

Als grundlegend für die ganze Theorie erweist sich die Gleichung

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2. \tag{10}$$

Der Beweis der Gleichung (10) läuft auf die Bestätigung zweier Tatbestände hinaus:

1. Wenn $T' \in \mathfrak{H}_1$ und $T'' \in \mathfrak{H}_2$ gilt, ist $(T', T'') = 0$. Wir haben

$$(T', T'') = \int\limits_{\Omega} (\varepsilon'_x \sigma''_x + \varepsilon'_y \sigma''_y + \varepsilon'_z \sigma''_z + \gamma'_{xy} \tau''_{xy} + \gamma'_{xz} \tau''_{xz} + \gamma'_{yz} \tau''_{xz})\, d\Omega.$$

Die Größen $\varepsilon'_x, \ldots, \gamma'_{yz}$ hängen durch die Formeln (1) des § 26 mit dem Vektor $\mathfrak{u} = (u_x, u_y, u_z)$ zusammen. Benutzt man diese Formeln und integriert partiell, so erhält man

$$(T', T'') = \int\limits_{\Omega} \left\{ u'_x \left( \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} \right) + u'_y \left( \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial z} \right) \right.$$
$$\left. + u'_z \left( \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma''_z}{\partial z} \right) \right\} d\Omega + \int\limits_{S} \mathfrak{u}' \mathfrak{t}''^{(\nu)}\, dS.$$

---

[1]) Zu welcher ihre Grenzelemente (im Sinne der Konvergenz im Raum $\mathfrak{H}$) hinzuzufügen sind.

Da der Tensor $T''$ im Unterraum $\mathfrak{H}_2$ liegt, genügen seine Komponenten den homogenen Gleichgewichtsbedingungen (9) und das Volumintegral verschwindet. Das Flächenintegral verschwindet ebenfalls, da $\mathfrak{u}'|_{S_1} = 0$, $\mathfrak{t}''^{(\nu)}|_{S_2} = 0$ gilt. Also ist $(T', T'') = 0$ und die Unterräume $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind orthogonal.

2. Wenn $T$ ein beliebiger Tensor aus $\mathfrak{H}$ ist, dann kann man ihn in der Form $T = T' + T''$ darstellen, wo $T' \in \mathfrak{H}_1$ und $T'' \in \mathfrak{H}_2$ gilt. Den Beweis führen wir unter der Voraussetzung, daß die Komponenten des Tensors $T$ stetig und stetig differenzierbar in $\bar{\Omega} = \Omega + S$ sind; die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall wird ebenso wie in § 50 durchgeführt. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{u}'$ den Vektor der elastischen Verschiebungen, der zusammen mit dem ihm entsprechenden Spannungstensor $T'$ den Gleichungen (1) des § 26 genügt, sowie auch den Gleichungen (3), (6) und den Randbedingungen (7) und (8). Jetzt genügt es, $T'' = T - T'$ zu setzen.

Wir wenden uns jetzt dem Elastizitätsproblem zu. Es sei $\tilde{T}$ ein beliebiger Tensor, der den Gleichungen (6) und der Randbedingung (8) genügt, und $T_0$ der unsere Aufgabe lösende Tensor der elastischen Spannungen. Dann ist $T_0$ die Projektion des Tensors $\tilde{T}$ in den Unterraum $\mathfrak{H}_1$. Da $(\tilde{T} - T_0) \in \mathfrak{H}_2$ gilt, wird $(T_0, \tilde{T} - T_0) = 0$ und

$$\|\tilde{T}\|^2 = \|T^0\|^2 + \|\tilde{T} - T_0\|^2 \geq \|T\|_0^2. \tag{11}$$

Ungleichung (11) drückt das Prinzip von CASTIGLIANO aus: *Unter allen Tensoren, die den Gleichgewichtsbedingungen und der Randbedingung auf dem freien Teil des Randes genügen, erteilt der Tensor der elastischen Spannungen einem Körper die kleinste potentielle Deformationsenergie.*

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{u}_0$ den Verschiebungsvektor, der dem Tensor der elastischen Spannungen $T_0$ entspricht. Aus den Formeln (14) des § 26 und (4) des § 11 schließen wir, daß $|\mathfrak{u}_0|^2 = 2\,W(\mathfrak{u}_0)$ ist, wo $W(\mathfrak{u}_0)$ die der Verschiebung $\mathfrak{u}_0$ entsprechende potentielle Deformationsenergie ist. Jetzt besagt Formel (5), daß $\|T\| = |\mathfrak{u}_0|$ ist; daraus ergibt sich, wie oben gesagt wurde, die Möglichkeit, eine nach dem RITZschen Verfahren oder nach der Methode der orthogonalen Projektionen gebildete Näherungslösung abzuschätzen. Die Herleitung der entsprechenden Formeln überlassen wir dem Leser.

## § 55. Das TREFFTZsche Verfahren

Eine andere Methode, die es gestattet, das Minimum des Funktionals der energetischen Methode nach unten abzuschätzen, ist mit dem Namen E. TREFFTZ [1] verknüpft. Die Besonderheit dieser Methode besteht in der Konstruktion eines positiven Funktionals, dessen Minimum in der Klasse der Funktionen zu suchen ist, die der gegebenen Differentialgleichung genügen, jedoch keinerlei Randbedingungen unterworfen sind. TREFFTZ selbst führte sein Verfahren für das DIRICHLETsche Problem der LAPLACE-Gleichung aus.[1]) Diesem Fall widmen auch wir den vorliegenden Paragraphen; im folgenden Paragraphen wird eine Verallgemeinerung des TREFFTZschen Verfahrens betrachtet.

---

[1]) Ohne Konvergenzbeweis.

Es sei gefordert, eine im Gebiet $\Omega$ harmonische und der Randbedingung

$$u|_S = f(P) \tag{1}$$

genügende Funktion zu bestimmen, wobei wir die Funktion $f(P)$ der Einfachheit halber als stetig auf dem Rand $S$ voraussetzen. Die gesuchte Funktion läßt sich als die Funktion bestimmen, die das Integral

$$A(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega \tag{2}$$

zum Minimum macht, verglichen mit einer beliebigen anderen die Bedingung (1) erfüllenden Funktion (siehe § 18).

Das TREFFTZsche Verfahren besteht in folgendem. Wir nehmen an, es stände uns eine Folge von in $\Omega$ linear unabhängigen harmonischen Funktionen zur Verfügung, die in folgendem Sinne vollständig ist: Für jede in $\Omega$ harmonisch und zusammen mit ihren ersten Ableitungen quadratisch summierbare Funktion $\varphi$ soll es möglich sein, zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n$ und Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ derart zu finden, daß

$$A\left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) = \int_\Omega \left\{\operatorname{grad}\left(\varphi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)\right\}^2 d\Omega < \varepsilon$$

gilt. Wir suchen eine Näherungslösung unseres Problems in der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

wo $n$ eine willkürlich gewählte Zahl ist; die Koeffizienten $a_k$ ermitteln wir aus der Bedingung

$$A(u - u_n) = \min, \tag{3}$$

wo $u$ die gesuchte Lösung des Problems ist. Wir setzen die Ableitungen $\dfrac{\partial A(u - u_k)}{\partial a_k}$ gleich Null und kommen dadurch zu dem Gleichungssystem

$$A(u_n - u, \varphi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

wo wir der Kürze halber

$$A(u, v) = \int_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\Omega$$

gesetzt haben. Auf den ersten Blick möchte man sagen, daß das System (4) außer von den Koeffizienten $a_k$ noch von der unbekannten Funktion $u$ abhängt. Tatsächlich ist das jedoch nicht der Fall. Um uns davon zu überzeugen, wenden wir die GREENsche Formel an, nach der

$$A(u_n - u, \varphi_k) = -\int_\Omega (u_n - u)\, \Delta\varphi_k \, d\Omega + \int_S (u_n - u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, dS$$

ist, wo $\nu$ die äußere Normale zu $S$ ist. Nun ist aber $\Delta \varphi_k = 0$, deshalb verschwindet das erste Integral, und wir kommen zu dem System

$$\int_S (u_n - u) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Der Wert der gesuchten Funktion $u$ auf $S$ ist bekannt und gleich $f$. Wir ersetzen $u$ durch $f$ und $u_n$ durch $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ und erhalten schließlich das folgende System linearer algebraischer Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_j \int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = \int_S f \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Wir untersuchen das System (6) näher. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß $u_n$ sich nicht ändert, wenn $u$ um eine Konstante verändert wird, da das Funktional (3) erhalten bleibt. Wenn ferner $u_n$ eine nach dem TREFFTZschen Verfahren gewonnene Näherungslösung ist, dann ist $u_n + \text{const}$ ebenfalls eine Lösung. Mit Rücksicht hierauf wollen wir annehmen, daß die Mittelwerte der harmonischen Funktionen $u$ und $\varphi_k$, genommen über den Rand $S$, gleich Null sind. Das ist gleichbedeutend mit der Subtraktion einer Konstanten von jeder dieser Funktionen. Jetzt ist es nicht schwer, die Lösbarkeit des Systems (6) zu zeigen. Wir nehmen das Gegenteil an und finden, daß das homogene System

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} \int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Wir setzen $\sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} \varphi_j = v$. Dann nimmt (7) die Form

$$\int_S v \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} dS = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

an.

Multiplikation mit $a_k^{(0)}$ und anschließende Summation ergibt

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0.$$

Nach der GREENschen Formel ist

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = \int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 \, d\Omega - \int_\Omega v \, \Delta v \, d\Omega.$$

Das Integral links ist gleich Null; außerdem ist $\Delta v = 0$, da die Funktion $v$ harmonisch ist. Daraus folgt

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 \, d\Omega = 0,$$

was nur möglich ist, wenn grad $v \equiv 0$ oder $v = \text{const}$ gilt. Da aber der Mittelwert $v|_S$ gleich Null ist, so wird $v = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(0)} \varphi_j = 0$. Jetzt ergibt sich aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_j$, daß $a_j^{(0)} = 0$ ist, entgegen der Voraussetzung.

Wenn das System (6) lösbar ist, kann die Näherungslösung $u_n$ für beliebiges $n$ gebildet werden. Wir zeigen jetzt, daß

$$A(u_n) \leq A(u) \tag{8}$$

gilt. Wir setzen $u - u_n = w_n$. Dann ist

$$A(u) = A(u_n + w_n) = A(u_n) + 2A(u_n, w_n) + A(w_n).$$

Nun ist

$$A(u_n, w_n) = A(u_n, u - u_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k A(\varphi_k, u - u_n) = 0$$

auf Grund der Gleichungen (4). Jetzt wird

$$A(u) = A(u_n) + A(w_n),$$

woraus sich die Ungleichung (8) unmittelbar ergibt.

Zum Schluß behandeln wir die Frage der Konvergenz des TREFFTZschen Verfahrens. Wir beschränken uns auf den Fall eines ebenen Gebietes $\Omega$ und nehmen an, daß seine Berandung $S$ glatt ist und stetige Krümmung besitzt. Man kann zeigen, daß der Operator $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ positiv-definit im Raum $\overline{H}$ ist, der aus den in $\Omega$ harmonischen Funktionen besteht, die mit Hilfe der GREENschen Funktion durch ihre Randwerte darstellbar sind; von letzteren wird vorausgesetzt, daß sie quadratisch summierbar sind und der Gleichung

$$\int_S u \, dS = 0$$

genügen. Da $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ein positiv-definiter Operator ist, existiert eine positive Konstante $\gamma$ derart, daß die Ungleichung[1])

$$\int_S v \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS \geq \gamma^2 \int_S v^2 \, dS, \qquad v \in \overline{H} \tag{9}$$

gilt. Da die Mittelwerte von $u|_S$ und $\varphi_k|_S$ gleich Null sind, sind diese Funktionen Elemente von $\overline{H}$. Nach der Voraussetzung über die Vollständigkeit der Folge $\{\varphi_k\}$ kann man zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N$ und Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ derart finden, daß

$$A\left(u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k\right) < \varepsilon$$

---

[1]) Wir schreiben diese Ungleichung unter der Voraussetzung, daß die Funktion $v$ reell ist.

ist. Erst recht ist $\Lambda(u_N - u) < \varepsilon$, wo $u_N$ die nach dem TREFFTZschen Verfahren gebildete Näherungslösung ist. Für $n \geq N$ ist $\Lambda(u - u_n) \leq \Lambda(u - u_N) < \varepsilon$. Die Funktion $u - u_n$ ist harmonisch, und nach der GREENschen Formel wird

$$\Lambda(u - u_n) = \int_S (u - u_n) \frac{\partial(u - u_n)}{\partial \nu} \, dS.$$

Infolge der Ungleichung (9) gilt

$$\int_S (u - u_n)^2 \, dS < \frac{\varepsilon}{\gamma^2}. \tag{10}$$

$G(P, Q)$ sei die GREENsche Funktion des Gebietes $\Omega$. Dann ist

$$u(P) - u_n(P) = \int_S (u(Q) - u_n(Q)) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \nu} \, dS. \tag{11}$$

Wir nehmen an, daß $P$ in einem abgeschlossenen Gebiet variiert, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt. Dann ist die Funktion $\frac{\partial G(P, Q)}{\partial \nu}$ bekanntlich beschränkt, und ebenso auch alle ihre Ableitungen nach den Koordinaten des Punktes $P$. Wendet man auf (11) die Ungleichung von BUNJAKOWSKI an und benutzt die Abschätzung (10), so findet man, daß $u - u_n \to 0$ gilt, und zwar *gleichmäßig in einem beliebigen abgeschlossenen Gebiet, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt.*

Differenziert man (11), so kann man sich in derselben Weise überzeugen, daß die Ableitungen beliebiger Ordnung von $u_n$ gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von $u$ konvergieren in einem beliebigen, ganz im Innern von $\Omega$ liegenden, abgeschlossenen Gebiet.[1])

Zum Abschluß bemerken wir, daß es bei der Aufstellung des Systems (6) nicht nötig ist, die Mittelwerte der Funktionen $u$ und $\varphi_k$ tatsächlich zu Null zu machen. Wenn man nämlich $u$ durch $u + c$ und $\varphi_k$ durch $\varphi_k + c_k$ ersetzt, wo $c$ und $c_k$ Konstanten sind, dann nehmen die Koeffizienten und freien Glieder in (6) folgendes Aussehen an:

$$\int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, dS + c_j \int_S \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, dS; \qquad \int_S f \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, dS + c \int_S \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, dS.$$

Nun ist

$$\int_S \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, dS = 0,$$

da die Funktion $\varphi_k$ harmonisch ist. Daraus ist ersichtlich, daß eine Änderung von $u$ und $\varphi_k$ um Konstanten das System (6) nicht ändert.

---

[1]) Wir erinnern daran, daß wir für die Mittelwerte sowohl von $u$ als auch von $v$ gleich Null angenommen haben; ohne das gilt die Konvergenz $u_n \to u$ im allgemeinen nicht. Die Konvergenz der Ableitungen gilt unabhängig davon, ob die erwähnten Mittelwerte gleich oder ungleich Null sind.

## § 56. Die biharmonische Gleichung. Das Verfahren der anharmonischen Reste

Eine Modifikation des TREFFTZschen Verfahrens wurde von S. CH. RAFALSON [1, 2] für den Fall der biharmonischen Gleichung vorgeschlagen.[1])

Wie in § 27 festgestellt wurde, ist die Integration der biharmonischen Gleichung

$$\Delta^2 u = f \tag{1}$$

bei den Randbedingungen

$$u|_L = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_L = 0 \tag{2}$$

gleichbedeutend mit dem Minimalproblem für das Funktional

$$F(u) = (\Delta^2 u, u) - 2(u, f) = \int_S \{(\Delta u)^2 - 2fu\}\, dS \tag{3}$$

bei denselben Randbedingungen (2). In demselben Paragraphen wurde die Lösbarkeit dieses Problems mit Hilfe der energetischen Methode bewiesen.

Das Verfahren der anharmonischen Reste beruht auf folgendem Satz:

**Satz 1.** *Es sei $\tilde{u}(P)$ eine beliebige zusammen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in $S$ stetige Funktion, die auf dem Rand $L$ des Gebietes $S$ den Bedingungen (2) genügt. Ferner sei $q(P)$ eine beliebige in $\overline{S} = S + L$ stetige und stetig differenzierbare Funktion, die in $S$ der Gleichung*

$$\Delta q = f \tag{4}$$

*genügt.[2]) Dann gilt*

$$F(\tilde{u}) \geq -\int_S q^2\, dS.$$

Der Beweis ist sehr einfach. Man hat

$$\int_S f \tilde{u}\, dS = \int_S \tilde{u}\, \Delta q\, dS = \int_S q\, \Delta \tilde{u}\, dS + \int_L \left(\tilde{u}\, \frac{\partial q}{\partial \nu} - q\, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\right) dL = \int_S q\, \Delta \tilde{u}\, dS$$

auf Grund der Bedingung (2). Jetzt wird

$$F(\tilde{u}) + \int_S q^2\, dS = \int_S \{(\Delta \tilde{u})^2 - 2\,\tilde{u} f + q^2\}\, dS$$

$$= \int_S \{(\Delta \tilde{u})^2 - 2q\, \Delta \tilde{u} + q^2\}\, dS = \int_S (\Delta \tilde{u} - q)^2\, dS \geq 0,$$

was zu beweisen war.

[1]) Wir erwähnen in diesem Zusammenhang die sehr interessanten und bedeutend früheren Arbeiten von S. ZAREMBA [3, 4], deren Resultate den Ergebnissen von S. CH. RAFALSON teilweise nahekommen.

[2]) Wir nehmen an, daß eine solche Funktion existiert.

Wenn wir $\tilde{u} = u$ annehmen, wo $u$ eine den Bedingungen (2) genügende Lösung der biharmonischen Gleichung (1) ist, dann gilt nach dem Bewiesenen

$$F(u) \geq -\int\limits_S q^2\,dS. \tag{5}$$

Gewöhnlich bereitet es keine Schwierigkeiten, irgendeine Lösung der Gleichung (4) zu finden, und dann gibt das Integral

$$-\int\limits_S q^2\,dS = -\|q\|^2$$

eine untere Schranke für das Minimum des Funktionals (5). Im folgenden kommt es darauf an, diese Schranke zu verschärfen. Das geschieht folgendermaßen. Wir wählen eine Folge $\{\varphi_k(P)\}$ in $S$ harmonischer und in $\overline{S}$ stetiger und stetig differenzierbarer Funktionen. Wir setzen sie als orthonormiert in $S$ voraus, so daß

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \int\limits_S \varphi_k(P)\,\varphi_m(P)\,dS = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m \end{cases}$$

gilt. Das kann man stets erreichen, indem man auf die gewählte Folge den Orthogonalisierungsprozeß anwendet. Wir setzen jetzt

$$q_n(P) = q(P) - \sum_{k=1}^{n} (q, \varphi_k)\,\varphi_k(P).$$

Die Funktion $q_n(P)$ genügt allen Bedingungen des Satzes 1, und als untere Schranke für die Größe $F(u)$ erhalten wir jetzt die Größe $-\|q_n\|^2$, die, wie leicht zu sehen ist, gleich

$$-\|q_n\|^2 = -\|q\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (q, \varphi_k)^2 \tag{6}$$

und folglich größer als $-\|q\|^2$ ist. Wir nehmen jetzt an, daß die Folge $\{\varphi_k(P)\}$ vollständig auf der Menge der Funktionen ist, die in $S$ harmonisch sind und dort eine endliche Norm besitzen. Mit dieser letzten Bedingung kann man zeigen, daß dann

$$F(u_0) = -\|q\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (q, \varphi_k)^2 \tag{7}$$

gilt, wo $u_0$ ein der Bedingung (2) genügendes Integral der Gleichung (1) ist. Der Beweis gründet sich auf folgende Konstruktion.

Wir betrachten die Menge $G$ der Funktionen, die in $S$ harmonisch sind und endliche Norm besitzen. Man kann zeigen[1]), daß diese Menge einen Unterraum in $L_2(\Omega)$ bildet. Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die Gestalt des Gebietes $S$ kann man zeigen, daß die Funktionen aus dem Unterraum $G$ sich

[1]) Dieser Satz stammt von H. Weyl [2]. Seinen Beweis findet man in der Arbeit von S. Ch. Rafalson [2]; auf den allgemeinsten Fall einer Gleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ wurde dieser Satz vom Verfasser [11] ausgedehnt.

mit beliebiger Genauigkeit durch in $S$ stetig differenzierbare Funktionen im Mittel approximieren lassen.[1]) Das ist z. B. der Fall, wenn das Gebiet $S$ *sternförmig* ist, d. h. wenn im Innern von $S$ ein Punkt mit der Eigenschaft liegt, daß ein beliebiger von ihm ausgehender Strahl den Rand des Gebietes nicht mehr als in einem Punkt schneidet.[2]) Man kann auch andere hinreichende Kriterien angeben. Die Funktionen, die in dem orthogonalen Unterraum $\overline{G} = L_2(S) \ominus G$ liegen, wollen wir als *anharmonische Reste* bezeichnen. Aus der Definition ergibt sich folgendes: Wenn $v(P)$ eine in $S$ harmonische quadratisch summierbare Funktion ist und $w(P)$ ein anharmonischer Rest, dann ist

$$(v, w) = \int_S v(P)\, w(P)\, dS = 0.$$

Wir setzen $\Delta u_0 = w_0$. Wie leicht zu sehen ist, ist $w_0$ ein anharmonischer Rest. Es sei nämlich $v(P)$ eine in $S$ harmonische und in $\overline{S}$ stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$(w_0, v) = \int_S v\, \Delta u_0\, dS$$

oder, wenn man die GREENsche Formel anwendet,

$$(w_0, v) = \int_S u_0\, \Delta v\, dS + \int_L \left(v \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - u_0 \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS = 0,$$

da $\Delta v = 0$ ist und $u_0$ den Bedingungen (2) genügt. Wenn $v(P)$ nicht stetig differenzierbar in $\overline{S}$ ist, dann approximieren wir $v$ durch stetig differenzierbare harmonische Funktionen $v_n(P)$, und der Grenzübergang in der Gleichung $(w_0, w_n) = 0$ liefert $(w_0, v) = 0$.

Wir haben $\Delta w_0 = \Delta^2 u_0 = f$. Wir setzen $q = v_0 + w_0$. Dann wird $\Delta v_0 = \Delta q - \Delta w_0 = 0$ und folglich $(w_0, v_0) = 0$. Die Funktion $q$ wird zerlegt in zwei orthogonale Summanden $v_0 \in G$ und $w_0 \in \overline{G}$. Dann gilt $\|q\|^2 = \|v_0\|^2 + \|w_0\|^2$ oder

$$\|w_0\|^2 = \|q\|^2 - \|v_0\|^2. \tag{8}$$

Nach dem oben Gesagten ist klar, daß die orthonormierten Funktionen $\varphi_n(P)$ ein in $G$ vollständiges System bilden. Daraus ergibt sich

$$v_0(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_0, \varphi_n)\, \varphi_n(P) \quad \text{und} \quad \|v_0\|^2 = \sum_{u=1}^{\infty} (v_0, \varphi_n)^2.$$

Dabei ist

$$(v_0, \varphi_n) = (q, \varphi_n) - (w_0, \varphi_n) = (q, \varphi_n),$$

da $w_0$ und $\varphi_0$ in den zueinander orthogonalen Unterräumen $\overline{G}$ und $G$ liegen, und deshalb ist $(w_0, \varphi_n) = 0$. Damit wird

$$\|v_0\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (q, \varphi_n)^2.$$

---

[1]) Wir setzen unten voraus, daß eine derartige Approximation möglich ist.

[2]) Siehe z. B. S. CH. RAFALSON [2].

Setzt man das in (8) ein, so erhält man

$$\|w_0\|^2 = \|q\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (q, \varphi_n)^2. \tag{9}$$

Andererseits gilt

$$\|w_0\|^2 = \|\Delta u_0\|^2 = \int_S (\Delta u_0)^2 \, dS.$$

Vergleicht man das mit Formel (15) des § 27, so findet man $\|w_0\|^2 = |u_0|^2 = -F_{\min}(u)$, und Formel (7) ist bewiesen. Behält man in der Reihe (7) nur eine endliche Anzahl von Gliedern bei, so erhält man eine Größe, die kleiner als $F_{\min}(u)$ ist, aber beliebig dicht dabei liegt, wenn man hinreichend viele Glieder nimmt.

Aus der oben durchgeführten Rechnung ergibt sich leicht die Formel

$$w_0(P) = \Delta u_0 = q(P) - \sum_{n=1}^{\infty} (q, \varphi_n)\, \varphi_n(P); \tag{10}$$

kennt man $w_0(P)$, so kann man die Funktion $u_0(P)$ nach der Formel

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S w_0(Q) \ln r \, dS_Q \tag{11}$$

bilden, wo $r$ der Abstand der Punkte $P$ und $Q$ ist. Eine Herleitung der Formel (11) wurde in der Arbeit von S. CH. RAFALSON [2] gegeben.

## § 57. Verallgemeinerung des TREFFTZschen Verfahrens

Das TREFFTZsche Verfahren wurde in den Arbeiten von M. S. BIRMAN [3, 5, 6] für eine große Klasse von Randwertaufgaben verallgemeinert. Wir nehmen an, es sei folgendes Problem gestellt: In einem Gebiet $\Omega$ ist eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$Lu = f(P) \tag{1}$$

bei den Randbedingungen — wir nehmen sie der Einfachheit halber als homogen an —

$$G_1 u\,|_S = 0, \quad G_2 u\,|_S = 0, \quad \ldots, \quad G_r u\,|_S = 0 \tag{2}$$

zu finden. $A$ sei ein positiv-definiter Operator, der für die den Bedingungen (2) genügenden Funktionen mit dem Differentialoperator $L$ zusammenfällt. Dann machen die den Gleichungen (1) und (2) genügenden Funktionen, wie wir wissen, das Funktional[1])

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \tag{3}$$

zum Minimum, wobei

$$F_{\min} u = -|u_0|^2 = -(Au_0, u_0) \tag{4}$$

ist.

[1]) Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall reeller Funktionen.

Die Verallgemeinerung des TREFFTZschen Verfahrens geschieht im allgemeinen folgendermaßen: Man bildet ein neues Funktional $\varphi(u)$, das nur auf den der Differentialgleichung (1) genügenden Funktionen betrachtet wird; die Erfüllung irgendwelcher Randbedingungen wird nicht vorausgesetzt. Von dem Funktional $\varphi(u)$ fordern wir, daß es für die den Gleichungen (1) und (2) genügende Funktion $u_0(P)$ sein Minimum annimmt und daß

$$\varphi_{\min}(u) = \varphi(u_0) = |u_0|^2 \tag{5}$$

gilt. Wir bemerken, daß das Funktional $\varphi(u)$ auf den Lösungen der Gleichung (1) notwendig positiv ist; das ergibt sich aus Formel (5).

Jetzt sei $u(P)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (1). Aus Formel (5) folgt dann, daß $\varphi(u) \geq |u_0|^2$ und demzufolge $-\varphi(u) \leq F_{\min}(u)$ ist. Demnach kann man in den Ungleichungen (4) und (5) des § 48 $-\varphi(u)$ für die Zahl $\delta$ setzen. Weiter sei $u_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ eine das Funktional $\varphi(u)$ zum Minimum machende Folge von Lösungen der Gleichung (1), so daß

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = |u_0|^2$$

gilt. Dann gilt $-\varphi(u) \to F_{\min}(u)$, und wir erhalten eine Folge von Zahlen $\delta_n = -\varphi(u_n)$, die sich bei hinreichend großem $n$ beliebig wenig von $d = F_{\min}(u)$ unterscheiden.

Bei jedem konkreten Randwertproblem kommt es also auf die Wahl eines geeigneten Funktionals $\varphi(u)$ an.

In den §§ 58 und 59 werden wir die von M. S. BIRMAN [6] stammende Konstruktion des Funktionals $\varphi(u)$ für einige besonders wichtige Randwertaufgaben kurz erläutern; es handelt sich um Probleme, die mit der POISSONschen Gleichung und mit der Gleichung der Plattenbiegung zusammenhängen; wie wir sehen werden, geschieht die Konstruktion des Funktionals $\varphi(u)$ nicht in eindeutiger Weise, so daß für jedes Randwertproblem eine unendliche Menge von „TREFFTZschen Verfahren" existiert. Wir bemerken noch, daß es gewöhnlich gelingt, die Konvergenz der Minimalfolge gegen die exakte Lösung des Problems zu beweisen; eben deshalb stellt das TREFFTZsche Verfahren eine geeignete Methode zur angenäherten Lösung von Randwertaufgaben dar.

Wir erwähnen noch, daß in der zitierten Arbeit von M. S. BIRMAN die Funktionale des verallgemeinerten TREFFTZschen Verfahrens auch für einige komplizierte Probleme aus der Theorie dünner Platten gebildet worden sind.

## § 58. Anwendungen auf die POISSONsche Gleichung

Wir betrachten das Problem der Integration der POISSONschen Gleichung

$$-\Delta u = f(P) \tag{1}$$

bei den gemischten Randbedingungen ($S_1 + S_2 = S$)

$$u\,|_{S_1} = 0, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right]_{S_2} = 0, \qquad \sigma > 0. \tag{3}$$

In diesem Falle erhält man ohne Mühe durch partielle Integration und Ausnutzung der Randbedingungen

$$|u|^2 = (-\Delta u, u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega + \int_{S_2} \sigma u^2 \, dS. \tag{4}$$

Um die Darstellung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß die Lösung unseres Problems eine im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$ stetig differenzierbare Funktion ist.

Wir wählen eine beliebige, nicht negative Funktion $\tilde{\sigma}$, die auf der ganzen Fläche $S$ definiert ist und der Ungleichung

$$\tilde{\sigma} < \sigma \text{ auf } S_2 \tag{5}$$

genügt. Wir setzen jetzt

$$\varphi(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega + \int_S \tilde{\sigma} u^2 \, dS + \int_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} u\right)^2 dS. \tag{6}$$

Das zugehörige „bilineare" Funktional hat die Form

$$\varphi(u, v) = \int_\sigma \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega + \int_S \tilde{\sigma} u v \, dS$$
$$+ \int_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} u\right) \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v\right) dS; \tag{7}$$

dabei ist

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + 2\varphi(u, v) + \varphi(v). \tag{8}$$

Offensichtlich ist stets $\varphi(u) \geq 0$. Wir erwähnen noch zwei wichtige Eigenschaften des Funktionals $\varphi(\omega)$:

a) Wenn die Funktion $u(P)$ den Randbedingungen (2) und (3) genügt, dann ist $\varphi(u) = |u|^2$. In diesem Falle ist nämlich auf $S_2$ $\frac{\partial u}{\partial v} = -\sigma u$. Setzt man das in (6) ein, so erhält man leicht

$$\varphi(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 \, d\Omega + \int_{S_2} \sigma u^2 \, dS + \int_{S_1} \tilde{\sigma} u^2 \, dS.$$

Infolge der Bedingung (2) verschwindet das letzte Integral und ein Vergleich mit Formel (4) ergibt $\varphi(u) = |u|^2$.

b) Wenn $u(P)$ den Bedingungen (2) und (3) genügt und $v(P)$ eine willkürliche in $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbare harmonische Funktion ist, dann ist $\varphi(u, v) = 0$. Denn wenn man das erste Integral in (7) partiell integriert und die Randbedingungen

berücksichtigt, denen die Funktion $u(P)$ genügt, dann erhält man

$$\varphi(u, v) = -\int_{\Omega} u \, \Delta v \, d\Omega + \int_{S} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS + \int_{S} \tilde{\sigma} u v \, dS$$

$$+ \int_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} u\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v\right) dS$$

$$= \int_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v\right) dS = 0.$$

**Satz 1.** *Von allen in $\Omega$ stetig differenzierbaren Lösungen der Gleichung* (1) *erteilt die den Randbedingungen* (2) *und* (3) *genügende Lösung $u_0(P)$ dem Funktional $\varphi(u)$ seinen kleinsten Wert. Dabei ist*

$$\varphi_{\min}(u) = \varphi(u_0) = |u_0|^2. \tag{9}$$

Es sei $u(P)$ eine in $\Omega$ stetig differenzierbare Lösung der Gleichung (1). Wir setzen $u = u_0 + v$, so daß $\Delta v = 0$ wird, d. h. die Funktion $v$ ist harmonisch. Nach Eigenschaft b) ist $\varphi(u_0, v) = 0$. Jetzt folgt aus Formel (8), daß bei $v \neq 0$, d. h. bei $u \neq u_0$,

$$\varphi(u) = \varphi(u_0 + v) = \varphi(u_0) + \varphi(v) > \varphi(u_0) \tag{10}$$

gilt, und das bedeutet, daß $\varphi_{\min}(u) = \varphi(u_0)$ ist. Nach Eigenschaft a) ist $\varphi(u_0) = |u_0|^2$, da $u_0$ den Randbedingungen (2) und (3) genügt. Damit ist der Satz bewiesen; gleichzeitig ist gezeigt, daß das Funktional $\varphi(u)$ alle Forderungen des § 57 erfüllt.

Jetzt sei $u_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge von Lösungen der Gleichung (1); diese Folge möge das Funktional $\varphi(u)$ zum Minimum machen, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(u_n) = \varphi(u_0)$$

gilt. Nach Formel (10) haben wir

$$\varphi(u_n) = \varphi(u_n - u_0) + \varphi(u_0).$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(u_n - u_0) = 0.$$

Auf Grund der Formel (6) schließen wir, daß dann für $\Omega$ im Mittel grad $u_n \to$ grad $u_0$ gilt. Wenn noch $\tilde{\sigma} > 0$ ist, dann gilt $u_n \to u_0$ im Mittel auf $S_1$ und $\frac{\partial u_n}{\partial v} \to \frac{\partial u_0}{\partial v}$ im Mittel auf $S_2$.

Wir verweilen bei den beiden wichtigsten Spezialfällen.

1. Möge $S_2$ entfallen, so daß $u = 0$ auf der ganzen Fläche $S$ gilt, unsere Aufgabe ist dann das DIRICHLETsche Problem für die Gleichung (1). In diesem Falle ist

$$\varphi(u) = \int_\Omega (\text{grad}\, u)^2 \, d\Omega + \int_S \tilde{\sigma} u^2 \, dS, \tag{10*}$$

wo $\tilde{\sigma}$ eine willkürliche, auf $S$ nicht negative Funktion ist.

Wenn $u_n$, $n = 1, 2, \ldots$ eine Minimalfolge für das Funktional (10*) ist, dann konvergiert grad $u_n$ in $\Omega$ im Mittel gegen $u_0$, wie oben gesagt wurde, und wenn $\tilde{\sigma} > 0$ ist, gilt in $S$ im Mittel $u_n \to u_0$. Mit Hilfe des schon mehrfach zitierten „Einbettungssatzes" von S. L. SOBOLEW kann man zeigen, daß in $\Omega$ im Mittel $u_n \to u_0$ gilt; da $u_n$ Lösungen der Gleichung (1) sind, so folgt daraus bekanntlich, daß $u_n \to u_0$ gilt, und zwar gleichmäßig zusammen mit allen Ableitungen in einem beliebigen abgeschlossenen Gebiet, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt.

Man kann in (10*) $\tilde{\sigma} \equiv 0$ setzen, was genau dem TREFFTZschen Verfahren selbst entspricht. Wenn dabei $u_n$ eine Minimalfolge ist, dann kann man behaupten, daß grad $u_n \to$ grad $u_0$ gilt, aber die Konvergenz der Funktionen selbst läßt sich nicht behaupten. Auf diese Tatsache stießen wir in § 55.

2. Wir betrachten das NEUMANNsche Problem

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0. \tag{11}$$

Wie wir wissen (§ 22), ist dieses Problem lösbar, wenn

$$\int_\Omega f \, d\Omega = 0$$

gilt, und die Lösung ist eindeutig, wenn man zusätzlich fordert, daß

$$\int_\Omega u \, d\Omega = 0$$

gilt. In diesem Falle kann man

$$\varphi(u) = \int_\Omega (\text{grad}\, u)^2 \, d\Omega - \alpha \int_S u^2 \, dS + \frac{1}{\sigma} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \alpha u\right)^2 dS \tag{12}$$

setzen, wo $\alpha$ eine hinreichend kleine positive Konstante ist. Man kann zeigen[1]), daß das Funktional (12) allen in § 57 formulierten Forderungen genügt.

Beim NEUMANNschen Problem hat das verallgemeinerte TREFFTZsche Verfahren den Vorzug gegenüber dem Verfahren der orthogonalen Projektionen, daß es bei der Bestimmung des Minimums des Funktionals (12) nicht notwendig ist, die Funktion $u$ irgendwelchen Randbedingungen zu unterwerfen. Beim DIRICHLETschen Problem entfällt dieser Vorteil, da beim Verfahren der orthogonalen Projektionen für das DIRICHLETsche Problem die Vektoren $\mathfrak{w}$ keinerlei Randbedingungen zu erfüllen brauchen.

---

[1]) Siehe M. S. BIRMAN [6].

Das verallgemeinerte TREFFTZsche Verfahren läßt sich leicht auf elliptische Gleichungen zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten ausdehnen und ebenfalls auf den Fall inhomogener Randbedingungen.

## § 59. Verallgemeinerung des TREFFTZschen Verfahrens auf das Problem der Biegung einer frei gestützten Platte

Wir wenden uns Biegeproblemen für dünne Platten zu, die mit der biharmonischen Gleichung zusammenhängen, doch beschränken wir uns auf die zwei einfachsten Fälle des fest eingespannten und des frei gestützten Randes, und für jeden von ihnen bringen wir nur eine (die nach unserer Meinung einfachste) Form des Funktionals der TREFFTZschen Methode. Für den Fall des fest eingespannten Randes wurde diese Form in § 56 angegeben; im vorliegenden Paragraphen betrachten wir die Platte mit frei gestütztem Rand.

Der Bildung des Funktionals der TREFFTZschen Methode schicken wir die Herleitung einer Hilfsformel voran. Die Formel (6) des § 27 stellen wir in der Form

$$2\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dx\,dy=\int\limits_L\left[\frac{\partial w}{\partial y}\,d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial w}{\partial x}\,d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$=\int\limits_L\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dy-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dx-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy\right)$$

dar. Es ist leicht zu sehen, daß der Ausdruck unter dem Randintegral invariant gegen eine Verschiebung oder Drehung des kartesischen Koordinatensystems ist. Wir dürfen deshalb in jedem Punkt des Randes $L$ die $x$- bzw. $y$-Achse durch die Außennormale $\nu$ und die Tangente $s$ ersetzen. Dabei wird auf dem Rand offensichtlich $d\nu = 0$, und wir erhalten

$$2\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dx\,dy=\int\limits_L\left(\frac{\partial w}{\partial s}\,w_{\nu s}-\frac{\partial w}{\partial \nu}\,w_{ss}\right)ds. \tag{1}$$

In Formel (1) sind die Größen $w_{\nu s}$ und $w_{ss}$ die zweiten Ableitungen in Richtung von Tangente und Normale, berechnet unter der Voraussetzung, daß sich die Richtungen von Tangente und Normale nicht ändern; genauer ist

$$w_{\nu s}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos(\nu,x)\cos(s,x)+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\left[\cos(\nu,x)\cos(s,y)\right.$$

$$\left.+\cos(\nu,y)\cos(s,x)\right]+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos(\nu,y)\cos(s,y);$$

$$w_{ss}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2(s,x)+2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos(s,x)\cos(s,y)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos^2(s,y).$$

Eine Rechnung analog zu der in § 27 durchgeführten zeigt, daß

$$w_{\nu s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}; \qquad w_{ss} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu}$$

gilt, wo $\varrho$ der Krümmungsradius des Randes ist. Setzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so erhält man

$$2\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS$$
$$= -\int_L \left[\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right] ds.$$

Da die Kurve $L$ geschlossen ist, und die Funktion $w$ und ihre Ableitungen als eindeutig vorausgesetzt werden, ergibt partielle Integration

$$\int_L \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) ds = -\int_L \frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\, ds,$$

was zu der gesuchten Formel

$$2\iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dS$$
$$= -\int_L \left[2\frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right] ds \tag{2}$$

führt. Ersetzt man in (2) rechts $w$ durch $u + v$ und ebenso durch $u - v$ und subtrahiert, so erhält man noch eine nützliche Formel

$$\iint_S \left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dS$$
$$= -\int_L \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}\right). \tag{3}$$

Beim Problem der frei gestützten Platte muß das Funktional des verallgemeinerten TREFFTZschen Verfahrens in Abhängigkeit davon gebildet werden, ob der Rand der Platte überall konvex ist, oder ob er auch nicht konvexe Teile enthält. Wenn der Rand $L$ konvex ist, kann man

$$\Phi(w) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] dS$$
$$+ \frac{1}{\sigma}\int_L \varrho\left[\Delta w - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right]^2 ds \tag{4}$$

setzen; hier bedeutet $\sigma$ die POISSONsche Zahl, die wir als positiv annehmen.

Wir zeigen, daß das Funktional (4) alle in § 58 angeführten Eigenschaften besitzt.

a) Für eine beliebige Funktion $w$ gilt $\Phi(w) \geq 0$, da der Rand $L$ konvex ist und folglich $\varrho \geq 0$ ist.

b) Wir bilden das bilineare Funktional

$$\Phi(u, v) = \iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dS$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\int\limits_L \varrho\left[\Delta u - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right]\left[\Delta v - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\right] ds. \tag{5}$$

Wir zeigen, daß $\Phi(u, v) = 0$ ist, wenn $u$ den Bedingungen für den frei gestützten Rand

$$u|_L = 0, \qquad \left[\Delta u - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_L = 0 \tag{6}$$

und $v$ der biharmonischen Gleichung

$$\Delta^2 v = 0 \tag{7}$$

genügt.

Zum Beweis bemerken wir, daß infolge der Bedingungen (6) auf dem Rand $L$

$$\Delta u - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \Delta u - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\sigma}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \nu}$$

gilt, was die Vereinfachung des Randintegrals in (5) gestattet. Ferner ist

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dS$$

$$= \iint\limits_S \Delta u\,\Delta v\,dS + \iint\limits_S \left(2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dS,$$

was infolge der Formeln (3) und (6) die Form

$$\iint\limits_S \Delta u\,\Delta v\,dS - \int\limits_L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds$$

annimmt. Jetzt wird

$$\Phi(u, v) = \iint\limits_S \Delta u\,\Delta v\,dS - \int\limits_L \Delta v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds.$$

Ersetzt man in der GREENschen Formel [Formel (10) des § 2] $v$ durch $\Delta v$, so erhält man

$$\iint_S \Delta u \, \Delta v \, d\Omega = \iint_S u \Delta^2 v \, dS + \int_L \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta v - u \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \right) ds .$$

Daraus folgt

$$\Phi(u, v) = \iint_S u \Delta^2 v \, dS - \int_L u \frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \, ds ,$$

was infolge der Gleichungen (6) und (7) gleich Null ist.

c) Es sei $w$ eine willkürliche Lösung der Plattengleichung

$$D \Delta^2 w = q$$

und $w_0$ eine Lösung dieser Gleichung, die den Bedingungen der freien Stützung genügt. Die Funktion $v = w - w_0$ genügt der Gleichung (7); nach dem Bewiesenen ist $\Phi(w_0, v) = 0$. Jetzt haben wir

$$\Phi(w) = \Phi(w_0 + v) = \Phi(w_0) + 2\Phi(w_0, v) + \Phi(v) = \Phi(w_0) + \Phi(v) .$$

Daraus ist ersichtlich, daß

$$\Phi_{\min}(w) = \Phi(w_0)$$

gilt.

d) Wir berechnen $\Phi(w_0)$. Benutzt man die Bedingungen (6), welchen die Funktion $w_0$ genügt, so erhält man

$$\Phi(w_0) = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right] dS + \sigma \int_L \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right)^2 ds .$$

Dieselben Bedingungen (6) gestatten es, die Identität (2) in der Form

$$\int_L \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right)^2 ds = 2 \iint_S \left[ \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] dS$$

darzustellen. Setzt man das in $\Phi(w_0)$ ein, so ergibt sich

$$\Phi(w_0) = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] dS ;$$

nach Formel (21) des § 27 ist $\Phi(w_0) = |w_0|^2$.

Wenn der Rand $L$ nicht konvexe Teilstücke enthält[1]), dann bleibt das Funktional (3) nicht mehr positiv und wird für unsere Zwecke ungeeignet. In diesem Falle kann man

$$\Phi(w) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] dS$$
$$+ \int_L \left\{\beta w^2 - \alpha\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\left[\Delta w - (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)\right]^2\right\} ds \qquad (8)$$

setzen[2]), wo $\alpha$ und $\beta$ positive Konstanten sind, dabei ist $\alpha$ hinreichend klein.

## § 60. Das Verfahren von M. G. Slobodjanski

In einigen Fällen kann man zur Gewinnung einer Abschätzung des Minimalfunktionals nach unten günstig ein einfaches Verfahren anwenden, das von M. G. Slobodjanski [8] vorgeschlagen wurde. Dieses Verfahren, das eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Friedrichsschen Transformation darstellt, besteht in folgendem.

$A$ sei ein symmetrischer positiv-definiter Operator,

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \qquad (1)$$

und $u_0$ eine Lösung der Gleichung

$$Au = f. \qquad (2)$$

Wir nehmen an, daß sich der Operator $A$ in der Form der Summe

$$A = \sum_{k=1}^{p} A_k \qquad (3)$$

darstellen läßt, wobei jeder Operator $A_k$ positiv und symmetrisch ist.

$U$ bezeichne ein System $u_1, u_2, \ldots, u_p$ von Elementen derart, daß $u_k$ im Definitionsbereich des Operators $A_k$ liegt und daß die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{p} A_k u_k = f \qquad (4)$$

erfüllt ist. Wir bilden das Funktional

$$\Psi(U) = \sum_{k=1}^{p} (A_k u_k, u_k). \qquad (5)$$

Es gilt

**Satz 1.** *Das Funktional $\Psi(U)$ nimmt sein Minimum bei $u_k = u_0$, $k = 1, 2, \ldots, p$ an; dabei wird*

$$\min \Psi(U) = |u_0|^2. \qquad (6)$$

---

[1]) Auf solchen Abschnitten ist $\varrho < 0$.

[2]) Siehe M. S. Birman [6].

Wir setzen $\eta_k = u_k - u_0$. Dann wird

$$\sum_{k=1}^{p} A_k \eta_k = \sum_{k=1}^{p} A_k u_k - \sum_{k=1}^{p} A_k u_0 = f - A u_0 = 0. \tag{7}$$

Jetzt ist

$$\Psi(U) = \sum_{k=1}^{p} (A_k(u_0 + \eta_k), u_0 + \eta_k) = (A u_0, u_0)$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} (A_k \eta_k, u_0) + \sum_{k=1}^{p} (A_k u_0, \eta_k) + \sum_{k=1}^{p} (A_k \eta_k, \eta_k).$$

Wegen Gleichung (7) gilt

$$\sum_{k=1}^{p} (A_k \eta_k, u_0) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{p} (A_k u_0, \eta_k) = \sum_{k=1}^{p} (u_0, A_k \eta_k) = 0,$$

und wir erhalten

$$\Psi(U) = |u_0|^2 + \sum_{p=1}^{p} (A_k \eta_k, \eta_k).$$

Da der Operator $A_k$ positiv ist, gilt $\Psi(U) \geq |u_0|^2$; das Gleichheitszeichen ist nur dann möglich, wenn $\eta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$ ist, d. h. wenn $u_k = u_0$, $k = 1, 2, \ldots, p$ ist.

Im allgemeinsten Falle kann man den positiv-definiten Operator $A$ in der Form $A = A_1 + A_2$ darstellen, wenn man eine beliebige Konstante $c$ derart wählt, daß $0 < c < \gamma$ ist, und $A_1 u = Au - cu$, $A_2 u = cu$ setzt. Dann wird $\Psi(U) = (Au_1 - cu_1, u_1) + c(u_2, u_2)$; die Elemente $u_1$ und $u_2$ sind durch die Gleichung

$$A u_1 - c u_1 + c u_2 = f$$

verknüpft. Daraus folgt

$$\Psi(U) = (A u_1 - c u_1, u_1) + \frac{1}{c} (f - A u_1 + c u_1, f - A u_1 + c u_1); \tag{8}$$

hier ist $u_1$ ein willkürliches Element aus dem Definitionsbereich des Operators $A$.

Wir erwähnen noch einige Spezialfälle. Wenn

$$A u = - \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(P) u$$

gilt, wo $C(P)$ eine im strengen Sinne positive Funktion ist, und wenn die Randbedingungen so sind, daß der Operator

$$A_1 u = - \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

positiv auf der Menge der diesen Bedingungen genügenden Funktionen ist, dann kann man $A_2 u = C(P) u$ und $A = A_1 + A_2$ setzen. Die Funktion $u_1$ kann man willkürlich wählen, jedoch so, daß sie den Randbedingungen des Problems genügt; dann ist $u_2$ durch die Gleichung

$$- \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{jk} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right) + C(P) u_2 = f(P)$$

bestimmt; dabei ist

$$\Psi(U) = -\int_{\Omega} u_1 \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right) d\Omega + \int_{\Omega} C u_2^2 \, d\Omega.$$

Wenn insbesondere die Randbedingungen die Form $u|_S = 0$ haben, dann genügt auch die Funktion $u_1$ dieser Bedingung. Durch partielle Integration geben wir $\Psi(U)$ die Form

$$\Psi(U) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + C u_2^2 \right\} d\Omega.$$

Wir betrachten noch die Gleichung

$$A u = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k}\right] = f(x)$$

bei den Randbedingungen

$$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Wenn die Koeffizienten derart sind, daß $p_m(x) \geq \tilde{p} > 0$, $p_k(x) \geq 0$ ist, dann kann man

$$A_k u = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k}\right], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

$$u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0, \qquad j \leq k-1$$

setzen. In unserem Falle ist $U = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m)$; die Funktionen $u_k$ hängen durch die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d u_k}{dx^k}\right] = f(x)$$

zusammen; das Funktional $\Psi(U)$ hat die Form

$$\Psi(U) = \int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u_k}{dx^k}\right)^2 dx.$$

## § 61. Zweiseitige Abschätzung von Funktionalen

Manchmal kommt es vor, daß es wichtig ist, nicht die Lösung der Gleichung

$$A u = f \tag{1}$$

selbst zu finden, sondern nur ein bestimmtes mit dieser Lösung zusammenhängendes Funktional der Form $(u, g)$, wo $g$ eine gegebene Funktion ist. Aus einer Reihe von Arbeiten, in denen dieses Problem behandelt wird, greifen wir die Arbeit

von M. G. SLOBODJANSKI[1]) [6] heraus, von der im vorliegenden Paragraphen eine kurze Darstellung gegeben werden soll; am Ende des Paragraphen wird noch über die interessante, aber schwierige Arbeit von T. KATO [1] gesprochen.

$A$ sei ein positiv-definiter symmetrischer Operator, und es sei die Berechnung des Skalarproduktes $(u_0, g)$ gefordert, wo $g$ eine gegebene Funktion[2]) und $u_0$ eine Lösung der Gleichung (1) ist. Die einfachste Art, diese Aufgabe zu lösen, ist folgende: Wir bilden eine Näherungslösung $u_n$ der Gleichung (1) und setzen angenähert

$$(u_0, g) \sim (u_n, g). \tag{2}$$

Der Fehler dieser Näherungsgleichung läßt sich leicht mit der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI abschätzen:

$$|(u_0, g) - (u_n, g)| = |(u_0 - u_n, g)| \leq \|g\| \cdot \|u_0 - u_n\|. \tag{3}$$

Wenn $u_n$ z. B. nach der energetischen Methode konstruiert worden ist, dann kann man die Größe $\|u_0 - u_n\|$ abschätzen, indem man das Verfahren der orthogonalen Projektionen benutzt. Die Gleichung (2) kann man präzisieren.

Es sei $v_0$ eine Lösung der Gleichung

$$Av = g \tag{4}$$

und $v_n$ eine Näherungslösung dazu. Wir setzen

$$Au_n = f_n, \quad Av_n = g_n, \quad b_n = (u_n, g) + (f - f_n, v_n). \tag{5}$$

Angenähert setzen wir

$$(u_0, g) \sim b_n \tag{6}$$

und schätzen den Fehler der entsprechenden Ungleichung ab. Man bestätigt leicht die Identität

$$(u_0, g) - b_n = (u_0 - u_n, g - g_n).$$

Der gesuchte Fehler ist

$$|(u_0 - u_n, g - g_n)| = |u_0 - u_n, A(v_0 - v_n)| = |[u_0 - u_n, v_0 - v_n]|,$$

und nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI wird

$$|(u_0, g) - b_n| \leq |u_0 - u_n| \cdot |v_0 - v_n|. \tag{7}$$

Die rechte Seite kann man mit den in diesem Kapitel dargestellten Methoden abschätzen, wenn $u_n$ und $v_n$ nach der energetischen Methode oder nach dem Verfahren der orthogonalen Projektionen gebildet worden sind.[3])

Wir führen noch einige Ergebnisse von T. KATO [1] an, ohne auf die Herleitung einzugehen. Es sei $A = T^*T$, bezüglich der Operatoren $A$, $T$, $T^*$ nehmen wir die

---

[1]) Siehe auch die Arbeiten [3, 4, 9] dieses Autors.

[2]) Im allgemeineren Falle ein gegebenes Element des betrachteten HILBERT-Raumes.

[3]) In der Arbeit [9] von M. G. SLOBODJANSKI ist die Bildung einer Formel skizziert, die genauer als die Formel (6) ist.

Bedingungen des § 52 als gegeben an. Wie früher möge $u_0$ der Gleichung (1) genügen. Weiter seien $u$ und $v$ willkürliche Elemente aus dem Definitionsbereich des Operators $T$ und $u'$, $v'$ willkürliche Lösungen der Gleichungen $T^*v' = f$, $T^*u' = g$. Wir setzen

$$\alpha = (u, g) + (f, v) - (Tu, Tv), \quad \beta = (u', v').$$

Dann übersteigt der Fehler der Gleichung

$$(u_0, g) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \tag{8}$$

nicht die Größe

$$\frac{1}{2}\|Tu - u'\| \cdot \|Tv - v'\|. \tag{9}$$

## § 62. Zweiseitige Abschätzung von Eigenwerten

**1.** Wie wir wissen, liefert das Ritzsche Verfahren die Eigenwerte zu groß (mit einem Überschuß); im vorliegenden Paragraphen stellen wir die Aufgabe, Verfahren zur Gewinnung von Näherungswerten anzugeben, die kleiner als die Eigenwerte sind (einen Unterschuß haben). Diese Aufgabe ist als noch nicht vollständig gelöst anzusehen: Gegenwärtig ist es kaum möglich, ein solches Verfahren (oder eine Gruppe solcher Verfahren) anzugeben, das es gestatten würde, für einen beliebigen positiv-definiten Operator Näherungswerte für die Eigenwerte mit einem Unterschuß und dazu noch mit beliebiger Genauigkeit effektiv anzugeben. In diesem Paragraphen weisen wir auf zwei spezielle Verfahren hin, von denen jedes einen ziemlich begrenzten Anwendungsbereich hat. Das erste von ihnen hängt mit der Integralgleichungsmethode zusammen und stammt vom Verfasser [7]; das zweite Verfahren, das von J. W. Swirski [1] vorgeschlagen wurde, beruht auf einer Minimaxeigenschaft der Eigenwerte.

**2.** In vielen Fällen gelingt es, die sogenannte Greensche Funktion $G(P, Q)$ eines gegebenen symmetrischen und positiv-definiten Operators $A$ zu konstruieren. Dann kann man die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $A$ als die charakteristischen Zahlen und Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$u(P) - \lambda \int_\Omega G(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q = 0 \tag{1}$$

finden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den am häufigsten vorkommenden Fall, wo das „Doppelintegral“

$$\int_\Omega \int_\Omega G^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q$$

einen endlichen Wert hat. Wir bemerken, daß aus der Symmetrie des Operators $A$ die Symmetrie der zugehörigen Greenschen Funktion folgt.

Wir betrachten $G(P, Q)$ als Kern einer Integralgleichung und bezeichnen mit $G_m(P, Q)$ $m = 1, 2, \ldots$ die zugehörigen iterierten Kerne, die durch die bekannten

Rekursionsformeln

$$G_1(P, Q) = G(P, Q), \quad G_m(P, Q) = \int_\Omega G(P, R)\, G_{m-1}(R, Q)\, d\Omega_R$$

definiert sind. Wir führen die sogenannten *Spuren* der iterierten Kerne,

$$a_m = \int_\Omega G_m(P, P)\, d\Omega,$$

in die Betrachtung ein. Für die Spuren mit geradem Index gilt die Formel

$$a_{2m} = \int_\Omega \int_\Omega G_m^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q, \tag{*}$$

die es gestattet, die Spur mit der halben Anzahl von Iterationen zu berechnen. Wenn die Spuren $a_{2m}$ berechnet sind, ist es nicht schwer, die kleinste charakteristische Zahl der Gleichung (1) zu finden. Die Spuren $a_m$ hängen nämlich mit den charakteristischen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ durch die Beziehung

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}, \qquad m \geq 2 \tag{2}$$

zusammen. Die charakteristischen Zahlen seien nach wachsender Größe geordnet. Wir ersetzen in der letzten Gleichung $m$ durch $2m$ und unterdrücken alle Glieder der Reihe mit Ausnahme der ersten; wir erhalten

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}}}. \tag{3}$$

Auf diese Weise liefert die Näherungsgleichung

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}}} \tag{4}$$

den Wert $\lambda_1$ mit einem Unterschuß. Man kann zeigen, daß

$$\lambda_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}}}$$

gilt, so daß für hinreichend großes $n$ die Näherungsgleichung (4) beliebig genau wird. Wenn die Vielfachheit $p$ der charakteristischen Zahl $\lambda$ bekannt ist, kann man anstelle von (3) die genauere Ungleichung

$$\lambda_1 \geq \sqrt[2m]{\frac{p}{a_{2m}}} \tag{5}$$

erhalten und den zugehörigen genaueren Näherungswert mit Unterschuß

$$\lambda_1 \approx \sqrt[2m]{\frac{p}{a_{2m}}}. \tag{6}$$

Wir bemerken, daß man aus der Reihe (2) für $\lambda_1$ auch einen Näherungswert mit Überschuß erhalten kann, nämlich

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{a_{2m}}{a_{2m+2}}}, \tag{7}$$

was in der Grenze in die exakte Formel

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{a_{2m}}{a_{2m+2}}}$$

übergeht.

Man kann Näherungsformeln mit Unterschuß auch für die folgenden charakteristischen Zahlen der Gleichung (1) angeben. So wird, wenn die charakteristischen Zahlen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beide einfach sind,

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt[2m]{\frac{2}{a_{2m}^2 - a_{4m}}}. \tag{8}$$

Wenn $\lambda_1$ exakt (oder mit Überschuß) bekannt ist, dann liefert die Formel (8) den Wert $\lambda_2$ mit Unterschuß; für $m \to \infty$ erhält man die exakte Formel

$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}^2 - a_{4m}}}.$$

Die ausfürliche Herleitung der hier gegebenen Formeln sowie einige numerische Beispiele sind in dem Buch [7], §§ 15 und 17, des Verfassers angeführt. Das oben dargelegte Verfahren gibt oft gute Ergebnisse, wenn $A$ ein Differentialoperator mit einer unabhängigen Veränderlichen ist, da dann in vielen Fällen die Berechnung der GREENschen Funktion und ihrer Iterierten keinen großen Aufwand erfordert.

**3.** $A$ und $B$ seien symmetrische positiv-definite Operatoren, und $B \leq A$ (siehe § 40). Dann sind, wie wir wissen, die Eigenwerte des Operators $B$ kleiner als die entsprechenden Eigenwerte des Operators $A$. Wenn der Operator $B$ konstruiert ist und seine Eigenwerte leicht zu finden sind, dann stehen uns Näherungswerte mit Unterschuß (wenn auch im allgemeinen grobe) für die Eigenwerte des Operators $A$ zur Verfügung. Beispiele, in welchen man einen solchen kleineren Operator konstruieren kann, lassen sich leicht angeben. So bezeichnen wir z. B. mit $A$ den Operator $-\Delta$, gegeben auf den im Gebiet $\Omega$ definierten Funktionen, die auf dem Rand des Gebietes gleich Null sind, und mit $B$ denselben Operator $-\Delta$, jedoch gegeben auf den in einem weiteren Gebiet $\Omega_1$ definierten Funktionen, die auf dem Rand dieses Gebietes gleich Null sind. Wir zeigen, daß $B < A$ ist. Dazu erweitern wir die Definition der Funktionen aus $H_A$, indem wir sie gleich Null in $\Omega_1 - \Omega$ setzen. Dann kann man sie als Funktionen aus $H_B$ betrachten. Demnach ist $H_B$ weiter als $H_A$. Wenn $u \in H_A$ ist, gilt gleichzeitig

$$|u|_A^2 = \int_\Omega (\text{grad } u)^2 \, d\Omega = \int_{\Omega_1} (\text{grad } u)^2 \, d\Omega_1 = |u|_B^2.$$

Nach der in § 40 gegebenen Definition ist $B < A$, und die Eigenwerte des Operators $B$ sind kleiner als die entsprechenden Eigenwerte des Operators $A$. Wenn man als Gebiet $\Omega$ z. B. ein Parallelepiped wählt, dann kann man die Eigenwerte des Operators $B$ leicht gewinnen.

Wir geben noch ein einfacheres Beispiel. Es sei

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)\,u,$$

die Funktion $u \in D_A$ werde durch die Randbedingung $u(0) = u(1) = 0$ festgelegt. Es sei $p(x) \geq p_0 > 0$ und $r(x) \geq r_0 \geq 0$, wo $p_0$ und $r_0$ Konstanten sind. Für $B$ kann man den Operator

$$Bu = -p_0\frac{d^2u}{dx^2} + r_0 u$$

nehmen, und zwar bei denselben Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Die Eigenwerte des Operators $B$ lassen sich elementar ermitteln, sie sind gleich $r_0 + p_0 n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, und da offensichtlich $B < A$ ist, so ist $\lambda_n > r_0 + p_0 n^2 \pi^2$, wo $\lambda_n$ der $n$-te Eigenwert des Operators $A$ ist.

Das zu Anfang des Paragraphen erwähnte Verfahren von I. W. Swirski gestattet es, Operatoren $A_n$ zu konstruieren, die zwischen $B$ und $A$ eingeschlossen sind; wenn sich dabei der kleinste Eigenwert des Operators $A_n$ als in strengem Sinne größer erweist als der kleinste Eigenwert des Operators $B$, dann erhalten wir für den kleinsten Eigenwert des gegebenen Operators $A$ eine genauere Näherung mit Unterschuß.

Wir setzen $A - B = C$. Der Operator $C$ ist nicht negativ; der Einfachheit halber (das ist jedoch nicht notwendig) nehmen wir an, daß er positiv-definit ist. Wir wählen $n$ beliebige linear unabhängige Funktionen[1]) $f_1, f_2, \ldots, f_n$, die im Definitionsbereich des Operators $C$ liegen. Indem man nötigenfalls das Orthogonalisierungsverfahren anwendet, kann man erreichen, daß diese Funktionen orthonormiert bezüglich der Energie des Operators $C$ sind, so daß

$$[f_k, f_m]_C = (Cf_k, f_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m \end{cases} \tag{9}$$

wird.

Wir führen die Bezeichnung

$$Cf_k = g_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

ein und setzen

$$C_n u = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k]_C g_k = \sum_{k=1}^{n} (Cu, f_k) g_k \tag{11}$$

und

$$A_n = B + C_n. \tag{12}$$

[1]) Allgemeiner Elemente des gegebenen Hilbert-Raumes.

Wir zeigen, daß $C_n$ ein der Ungleichung $0 \leq C_n \leq C$ genügender symmetrischer Operator ist; daraus folgt, daß $B \leq A_n \leq A$ ist. Wir haben

$$(C_n u, v) = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k]_C (g_k, v) = \sum_{k=1}^{n} (Cu, f_k)(Cf_k, v)$$

oder, da der Operator $C$ symmetrisch ist,

$$(C_n u, v) = \sum_{k=1}^{n} (Cu, f_k)(f_k, Cv).$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man das Skalarprodukt $(u, C_n v)$ berechnet; damit ist die Symmetrie des Operators $C$ bewiesen.

Um die Ungleichung $0 \leq C_n \leq C$ zu beweisen, berechnen wir die Größe (das Zeichen $C$ beim energetischen Produkt unterdrücken wir)

$$(C_n u, u) = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k]\,(Cf_k, u) = \sum_{k=1}^{n} [u, f_k][f_k, u] = \sum_{k=1}^{n} |[u, f_k]|^2 \geq 0.$$

Daraus folgt $C_n \geq 0$. Andererseits ist nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |\,[u, f_k]_C|^2 \leq |u|_C^2 = (Cu, u).$$

Daraus ergibt sich $(C_n u, u) \leq (Cu, u)$; nach Definition ist $C_n \leq C$.

4. Es ist nicht schwierig, zu klären, welcher Art die Funktionen $f_k$ sein müssen, damit der kleinste Eigenwert $\mu_1^{(n)}$ des Operators $A_n$ in strengem Sinne größer als der kleinste Eigenwert $\mu_1$ des Operators $B$ ist. $\varphi_1$ sei eine normierte Eigenfunktion des Operators $B$, die zum Eigenwert $\mu_1$ gehört. Wir haben

$$\mu_1 = \inf_{\|u\|=1} (Bu, u) = (B\varphi_1, \varphi_1),$$

$$\mu_1^{(n)} = \inf_{\|u\|=1} (A_n u, u) = \inf_{\|u\|=1} \left\{ (Bu, u) + \sum_{k=1}^{n} |[u, f_k]_C|^2 \right\}. \tag{13}$$

Der erste Summand rechts nimmt sein Minimum, das gleich $\mu_1$ ist, bei $u = \varphi_1$ an. Wenn die Funktion $\varphi_1$ orthogonal bezüglich der Energie des Operators $C$ zu allen Funktionen $f_k$ ist, dann ist offensichtlich $\mu_1^{(n)} = \mu$ und das Verfahren von I. W. Swirski ergibt in diesem Falle nichts. Jetzt sei mindestens eins der Produkte $[\varphi_1, f_k]_c \neq 0$, und in (13) werde das Minimum bei $u = \tilde{\varphi}$ angenommen:

$$\mu_1^{(n)} = (B\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) + \sum_{k=1}^{n} |\,[\tilde{\varphi}, f_k]_C|^2. \tag{14}$$

Wenn $\tilde{\varphi} \neq \varphi_1$ ist, dann ist schon $(B\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) > \mu_1$; wenn aber $\tilde{\varphi} = \varphi_1$ ist, wird die Summe in (14) positiv. In beiden Fällen ist $\mu_1^{(n)} > \mu_1$. Demnach verbessert der Übergang vom Operator $B$ zum Operator $A_n$ die Annäherung von unten an den kleinsten Eigenwert des Operators $A$ dann und nur dann, wenn mindestens eine der Funktionen $f_k$ nicht orthogonal (bezüglich der Energie des Operators $C$) zu einer der Eigenfunktionen des Operators $B$ ist, die zu dem kleinsten Eigenwert dieses Operators gehören.

## § 63. Abschätzung des Fehlers, der von Vernachlässigungen in der Gleichung herrührt

Oft erweist es sich als vorteilhaft, eine gegebene Gleichung

$$Au = f \tag{1}$$

durch eine benachbarte, aber einfachere Gleichung, die wir in der Form

$$Bu = f \tag{2}$$

schreiben, zu ersetzen.

Es erhebt sich die Frage, wie sich diese Veränderung auf die Lösung auswirkt, anders ausgedrückt, was kann man über den Grad der Nachbarschaft der Lösungen der Gleichungen (1) und (2) aussagen, wenn man irgend etwas über den Grad der Nachbarschaft der Operatoren $A$ und $B$ aussagen kann.

Im vorliegenden Paragraphen formulieren wir einige Ergebnisse, die in unserem Aufsatz [9] enthalten sind[1]; die Beweise übergehen wir, da sie über den Rahmen dieses Buches hinausgehen.

Wir nehmen an, daß die Operatoren $A$ und $B$ symmetrisch und positiv-definit sind.[2] Wir nehmen ferner an, daß die zu diesen Operatoren gehörenden Räume $H_A$ und $H_B$ (§ 46) zusammenfallen, anders ausgedrückt, daß jede Funktion mit endlicher Energie bezüglich des Operators $A$ endliche Energie bezüglich des Operators $B$ besitzt und umgekehrt. Man kann zeigen, daß sich dann solche positiven Konstanten $\alpha_1$ und $\alpha_2$ finden lassen, daß für beliebige Funktionen $u \in H_A$ (oder, was dasselbe ist, $u \in H_B$) die Ungleichung

$$\alpha_1 |u|_B^2 \leq |u|_A^2 \leq \alpha_2 |u|_B^2 \tag{3}$$

gilt. Sobald die Operatoren $A$ und $B$ gegeben sind, stößt die Bestimmung der Konstanten $\alpha_1$ und $\alpha_2$ gewöhnlich auf keine wesentlichen Schwierigkeiten, wir wollen diese Konstanten als bekannt annehmen.

Wenn $u_0$ und $u_1$ Lösungen der Gleichungen (1) und (2) sind, so daß $Au_0 = f$ und $Bu_1 = f$ gilt, dann besteht die Ungleichung

$$|u_1 - u_0|_B \leq \eta |u_1|_B, \tag{4}$$

in welcher die Konstante $\eta$ sich aus der Formel

$$\eta = \max\left(\frac{|\alpha_1 - 1|}{\alpha_1}; \quad \frac{|\alpha_2 - 1|}{\alpha_2}\right) \tag{5}$$

bestimmt. Die Formeln (4) und (5) lösen das am Anfang des Paragraphen gestellte Problem.

---

[1]) Siehe auch die Arbeiten [10] und [17] des Verfassers.

[2]) Es wäre auch möglich, sich auf die Forderung zu beschränken, daß die Operatoren $A$ und $B$ positiv sind.

Als Beispiel betrachten wir das NEUMANNsche Problem für die elliptische Gleichung

$$Au = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P). \tag{6}$$

Dieses Problem besteht in der Ermittlung einer in einem Gebiet $\Omega$ des Raumes mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ definierten Funktion; diese Funktion muß der Gleichung (6) im Innern des Gebietes $\Omega$ und der Randbedingung ($\nu$ ist die Außennormale)

$$\left[\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_k)\right]_S = 0 \tag{7}$$

auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ genügen. Wie gewöhnlich nehmen wir das Gebiet $\Omega$ als endlich und seinen Rand als stückweise glatt an. Die Koeffizienten $A_{jk}$ setzen wir als beschränkt, die Gleichung (6) als nicht singulär voraus. Dann kann man die Existenz zweier solcher positiver Konstanten $\mu_0$ und $\mu_1$ beweisen, daß für beliebige reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ und bei beliebiger Lage des Punktes $P$ im Innern oder auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ die Ungleichung

$$\mu_0 \sum_{j=1}^{m} t_j^2 \leq \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P)\, t_j t_k \leq \mu_1 \sum_{j=1}^{m} t_j^2 \tag{8}$$

erfüllt ist. Wir erinnern daran, daß für die Lösbarkeit des NEUMANNschen Problems notwendig und hinreichend ist, daß

$$\int_{\Omega} f(P)\, d\Omega = 0 \tag{9}$$

gilt; die Lösung ist eindeutig, wenn man sie der Bedingung

$$\int_{\Omega} u(P)\, d\Omega = 0 \tag{10}$$

unterwirft. Beide Bedingungen nehmen wir als erfüllt an.

Wir führen einen reellen HILBERT-Raum $H$ als Unterraum von $L_2(\Omega)$ ein, definiert durch die Gleichung (10). In diesem Raum ist der Operator $A$ positiv-definit auf der Menge der der Bedingung (7) genügenden Funktionen. Dabei ist

$$|u|_A^2 = \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\Omega. \tag{11}$$

Die Bedingung (7) ist natürlich, deshalb besteht der Raum $H_A$ (anders ausgedrückt, die Menge der Funktionen mit endlicher Energie bezüglich des Operators $A$) aus allen Funktionen, die dem Integral (11) einen endlichen Wert erteilen; aus den Ungleichungen (8) folgt, daß man $H_A$ als die Menge derjenigen Funktionen betrachten kann, die dem einfachen Integral

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega \tag{12}$$

einen endlichen Wert erteilen. In demselben Gebiet $\Omega$ lösen wir das NEUMANNsche Problem für die elliptische Gleichung

$$-\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = f(P). \tag{13}$$

Die Randbedingung hat die Form

$$\left[\sum_{j,k=1}^{m} B_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cos(\nu, x_k)\right]_S = 0. \tag{14}$$

Der Raum $H_B$ besteht aus den Funktionen, die dem Integral (12) einen endlichen Wert erteilen, d. h. aus denselben Funktionen wie der Raum $H_A$.

Wir stellen mit unbekanntem $\lambda$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} B_{11}-\lambda A_{11}, & B_{12}-\lambda A_{12}, & \ldots, & B_{1n}-\lambda A_{1n} \\ B_{21}-\lambda A_{21}, & B_{22}-\lambda A_{22}, & \ldots, & B_{2n}-\lambda A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1}-\lambda A_{n1}, & B_{n2}-\lambda A_{n2}, & \ldots, & B_{nn}-\lambda A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

auf. Alle Wurzeln dieser Gleichung sind positiv (vgl. § 32). Es sei $\lambda'(P)$ die kleinste, $\lambda''(P)$ die größte Wurzel der Gleichung (15). Dann gilt, wie aus der linearen Algebra bekannt ist[1]),

$$\lambda'(P)\sum_{j,k=1}^{m} B_{jk}(P)t_j t_k \le \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P)t_j t_k \le \lambda''(P)\sum_{j,k=1}^{m} B_{jk}t_j t_k, \tag{16}$$

wo $t_j$ beliebige reelle Zahlen sind. Wir setzen jetzt

$$\alpha_1 = \inf_{P\in\Omega}\lambda'(P); \qquad \alpha_2 = \sup_{P\in\Omega}\lambda''(P).$$

In der Ungleichung (16) ersetzen wir $\lambda'$ durch $\alpha_1$ und $\lambda''$ durch $\alpha_2$, wodurch die Ungleichung verstärkt wird und setzen $t_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Wir integrieren die gewonnene Ungleichung über $\Omega$ und erhalten

$$\alpha_1 |u|_B^2 \le |u|_A^2 \le \alpha_2 |u|_B^2.$$

Bezeichnen $u$ bzw. $v$ die Lösungen des NEUMANNschen Problems für die Gleichungen (16) bzw. (12), so hat man $|u-v| \le \eta |v|$, wo $\eta$ durch die Formel (5) bestimmt ist. Die letzte Ungleichung besagt insbesondere folgendes: Wenn $A_{jk}(P) \to B_{jk}(P)$ gleichmäßig im abgeschlossenen Gebiet gilt, dann konvergieren im Mittel sowohl die Funktion $u(P)$ selbst als auch ihre ersten partiellen Ableitungen in $\Omega$ gegen die Funktion $v(P)$ und ihre ersten partiellen Ableitungen.

---

1) Siehe z. B. R. COURANT und D. HILBERT [1], Kap. I. Ungleichung (16) kann man erhalten, wenn man die Überlegungen des § 34 auf die linearen Transformationen anwendet, die durch die Matrizen mit den Koeffizienten $A_{jk}(P)$ und $B_{jk}(P)$ bestimmt sind.

KAPITEL VIII

# ZAHLENBEISPIELE

Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, an Beispielen die Anwendung der Verfahren der vorangegangenen Kapitel zu zeigen, die dabei auftretenden Rechenschwierigkeiten zu erläutern und Wege zu ihrer Überwindung anzugeben. Eine der Hauptschwierigkeiten, die mit der Anwendung der direkten Methoden verbunden sind, stellt die Konstruktion eines vollständigen Systems von Koordinatenfunktionen dar. Wegen der großen Bedeutung dieser Frage beginnen wir dieses Kapitel mit einem Paragraphen, der theoretischen Charakter trägt. In den folgenden Paragraphen werden Zahlenbeispiele für Randwertaufgaben und Eigenwertprobleme behandelt; dort, wo das möglich ist, wird der Fehler der gebildeten Näherung abgeschätzt.

## § 64. Über die Koordinatenfunktionen

**1.** Die Anwendung des Ritzschen Verfahrens erfordert zunächst die Wahl eines Systems von Koordinatenfunktionen, das vollständig im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie ist. Den Vollständigkeitsnachweis für das gewählte System kann man häufig führen, indem man sich auf folgenden Satz stützt.

**Satz 1.** *Es sei $A$ ein positiv-definiter symmetrischer Operator und $\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ seien Funktionen aus seinem Definitionsbereich. Wenn das Funktionensystem $\{A\varphi_n\}$ vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel ist, dann ist das Funktionensystem $\{\varphi_n\}$ vollständig im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie.*

**Beweis.** Es sei $v(P)$ eine willkürliche Funktion aus dem Definitionsbereich des gegebenen Operators $A$. Da das System $\{A\varphi_n\}$ vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel ist, kann man eine solche natürliche Zahl $n$ und solche Konstanten $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ finden, daß

$$\left\| Av - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k \right\| = \left\| A\left(v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) \right\| < \frac{1}{2}\gamma\varepsilon \tag{1}$$

gilt, wo $\varepsilon$ eine willkürliche positive Zahl und $\gamma$ die Konstante der Formel (7) des § 6 ist.

Wir schätzen jetzt die Größe $\left| v - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k \right|$ ab. Setzt man kurz $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k = v_n$, so hat man

$$|v - v_n|^2 = (A(v - v_n), v - v_n).$$

Wendet man die Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI und noch einmal die Ungleichung (1) an, so erhält man

$$|v - v_n|^2 \leq \|A(v - v_n)\| \cdot \|v - v_n\| < \frac{1}{2} \varepsilon\gamma \|v - v_n\|. \tag{2}$$

Nach Ungleichung (2) des § 8 ist $\|v - v_n\| \leq \frac{1}{\gamma} |v - v_n|$. Setzt man dies in die Ungleichung (2) dieses Paragraphen ein und kürzt durch $|v - v_n|$, so erhält man

$$|v - v_n| < \frac{1}{2} \varepsilon. \tag{3}$$

Jetzt sei $u(P)$ eine willkürliche Funktion mit endlicher Energie. Nach Definition (§ 16) kann man eine Funktion $v \in D_A$ derart finden, daß $|u - v| < \frac{1}{2} \varepsilon$ ist. Für die Funktion $v$ wählen wir die Zahlen $n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so, daß Ungleichung (3) erfüllt ist. Jetzt wird nach der Dreiecksungleichung

$$\left| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right| = |u - v_n| \leq |u - v| + |v - v_n| < \varepsilon,$$

was zu beweisen war.

**Anmerkung.** Satz 1 läßt sich offensichtlich auf den Fall eines beliebigen HILBERT-Raumes übertragen. In diesem Falle spricht man den Satz so aus:

$A$ sei ein positiv-definiter und symmetrischer Operator[1]) in einem HILBERT-Raum und $\varphi_n \in D_A$, $n = 1, 2, \ldots$. Wenn die Folge $\{A\varphi_n\}$ in $H$ vollständig ist, dann ist die Folge $\{\varphi_n\}$ vollständig in $H_A$.

**Beispiel.** $\Omega$ sei das Rechteck $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, und es sei $Au = -\Delta u$, wobei auf dem Rand des Rechtecks $u = 0$ gilt. Es sei

$$\varphi_{m,n}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}; \qquad m, n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

dann ist

$$A\varphi_{m,n} = -\Delta\varphi_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Aus der Theorie der FOURIERschen Doppelreihen ist bekannt, daß das System der Funktionen

$$\sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}; \qquad m, n = 1, 2, \ldots$$

vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel ist; da die Multiplikation jeder Funktion mit einer von Null verschiedenen Konstanten die Vollständigkeit des Systems nicht beeinträchtigt, so ist das System der Funktionen $A\varphi_{m,n}$ im Rechteckgebiet $\Omega$ vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel; aus Satz 1 ergibt sich,

[1]) Wenn der HILBERT-Raum komplex ist, dann braucht man die Symmetrie des Operators $A$ nicht hervorzuheben.

daß das System (4) vollständig in demselben Gebiet im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie ist. In unserem Falle bedeutet das insbesondere folgendes: Es sei $u(x, y)$ eine beliebige Funktion, die im Rechteck $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ stetig und stetig differenzierbar ist und auf den Seiten des Rechtecks verschwindet; für jede positive Zahl $\varepsilon$ kann man dann solche natürliche Zahlen $m$ und $n$ und solche Konstanten $\alpha_{kl}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$; $l = 1, 2, \ldots, n$) finden, daß die Ungleichung

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} k \alpha_{kl} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} l \alpha_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{l\pi y}{b} \right)^2 \right\} dx\, dy < \varepsilon^2$$

erfüllt ist. Wir bemerken, daß man die Vollständigkeit des Systems (4) im Raum $H_A$ ebenfalls zeigen kann, indem man sich auf den Satz 3 des § 41 stützt, da das System (4) das System der Eigenfunktionen des LAPLACE-Operators bei der Randbedingung $u|_S = 0$ für das Rechteck ist.

Wir überlassen es dem Leser zu beweisen, daß das System der Funktionen

$$(x - a)^m (b - x)^m x^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

vollständig bezüglich der Energie des Operators

$$(-1)^m \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}}$$

bei den Randbedingungen

$$u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m - 1$$

ist.

**2.** Wir weisen auf ein Verfahren zur Konstruktion der Koordinatenfunktionen hin, das zwar speziellen Charakter trägt, jedoch für eine große Zahl von Fällen brauchbar ist.

In einem Gebiet $\Omega$ betrachten wir das DIRICHLETsche Problem für die POISSONsche Gleichung; die Randbedingung ist, daß die gesuchte Funktion auf dem Rand $S$ des Gebietes $\Omega$ verschwindet. In diesem Falle verschwinden die Funktionen mit endlicher Energie auf $S$, und es wird

$$|u|^2_{-\Delta} = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy;$$

der Klarheit halber haben wir angenommen, daß es sich um Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen handelt. Ein bezüglich der Energie vollständiges System von Koordinatenfunktionen kann man folgendermaßen bilden. Es sei $\omega(x, y)$ eine Funktion, die gleich Null in den Punkten des Randes $S$ und positiv in

den inneren Punkten des Gebietes $\Omega$ ist; wir nehmen noch an, daß diese Funktion in $\overline{\Omega}$ stetig ist, während ihre ersten Ableitungen im Innern von $\Omega$ stetig und beschränkt seien. Dann ist das System der Funktionen

$$\omega(x, y)\, x^k y^l; \qquad k, l = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

in $\Omega$ vollständig bezüglich der Energie. Der Beweis dieser wichtigen Behauptung wurde von L. W. KANTOROWITSCH angegeben, er findet sich in dem Buch von L. W. KANTOROWITSCH und W. J. KRYLOW [1], S. 258—259. Die Konstruktion der Funktion $\omega(x, y)$ bereitet gewöhnlich keine Schwierigkeit. So kann man z. B. für das oben erwähnte Rechteck $\omega = xy(a - x)(b - y)$ setzen. Keine Schwierigkeit bereitet auch der Übergang zu Funktionen einer größeren Anzahl von Veränderlichen.

Das System (5) von Koordinatenfunktionen oder das ihm analoge im Falle einer größeren Anzahl unabhängiger Veränderlicher kann man nicht nur bei der Lösung der POISSONschen Gleichung verwenden, sondern auch bei komplizierteren Aufgaben. Es sei im Gebiet $\Omega$ die nicht singuläre Gleichung von elliptischem Typ ($A$, $B$, $C$ hängen von $x$ und $y$ ab)

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y)$$

bei der Randbedingung $u|_S = 0$ zu integrieren. In diesem Falle wird

$$|u|_L^2 = \iint\limits_{\Omega} \left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Indem wir voraussetzen, daß die gegebene Gleichung nicht singulär ist, nehmen wir die Existenz einer positiven Konstanten $\mu_0$ derart an, daß

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geq \mu_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \tag{6}$$

gilt. Wir nehmen noch an, daß die Koeffizienten $A$, $B$, $C$ beschränkt sind. Dann gibt es offensichtlich eine positive Konstante $\mu_1$ derart, daß

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \leq \mu_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \tag{7}$$

gilt. Aus den Ungleichungen (6) und (7) folgt

$$\sqrt{\mu_0}\,|u|_{-\Delta} \leq |u|_L \leq \sqrt{\mu_1}\,|u|_{-\Delta}.$$

Daraus ersieht man unschwer, daß ein beliebiges System, insbesondere das System (5), vollständig bezüglich der Energie des Operators $A$ ist, wenn es vollständig bezüglich der Energie des Operators $-\Delta$ ist.

**3.** Für den biharmonischen Operator bei den Randbedingungen $u|_S = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$ ist das System der Funktionen

$$\omega^2 x^k y^l; \qquad k, l = 0, 1, 2, \ldots$$

vollständig bezüglich der Energie, dabei ist $\omega(x, y)$ die unter Punkt 2 beschriebene Funktion. Allgemein gilt: Für den polyharmonischen Operator $(-1)^p \Delta^p$ bei den Randbedingungen

$$u|_S = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_S = \cdots = \frac{\partial^{p-1} u}{\partial \nu^{p-1}}\bigg|_S = 0$$

ist das System der Funktionen

$$\omega^p x^k y^l; \quad k, l = 1, 2, \ldots$$

vollständig bezüglich der Energie.

4. Es handele sich z. B. um das DIRICHLETsche Problem für die POISSONsche Gleichung. Der Umstand, daß das System der Funktionen (5) vollständig bezüglich der Energie ist, bedeutet folgendes: Wenn $u(x, y)$ eine beliebige Funktion mit endlicher Energie ist und $\varepsilon$ eine willkürliche positive Zahl, dann existiert ein Polynom $P(x, y)$ derart, daß

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(\omega P)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial(\omega P)}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy < \varepsilon^2 \tag{8}$$

gilt. In einigen Fällen kann man ein schärferes Ergebnis erhalten. Es sei nämlich $\omega(x, y)$ eine Funktion, die $k$-mal stetig differenzierbar in $\Omega$ ist, wobei auf $S$ $\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \neq 0$ gilt. Möge ferner die Funktion $u(x, y)$ auf $S$ verschwinden und $k$-mal stetig differenzierbar in $\overline{\Omega}$ sein. Dann existiert eine Folge von Polynomen $P_n(x, y)$, deren Grad $\leq n$ ist in jedem der Argumente $x$ und $y$, für welche die Abschätzung

$$|D^r u - D^r(\omega P_n)| < \frac{C}{n^{k-r-1}}, \qquad r = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{8a}$$

gilt, wo $C$ eine Konstante ist, während $D^r$ eine beliebige Ableitung der Ordnung $r$ bezeichnet. Zur letzten Abschätzung siehe den Artikel von I. J. CHARRIK [1], in welchem eine etwas schärfere Behauptung bewiesen wird.

Aus der Abschätzung (8a) kann man eine Abschätzung für die Geschwindigkeit der Konvergenz des RITZschen Verfahrens entnehmen. Es sei die gesuchte Funktion $u_0(x, y)$ $k$-mal stetig differenzierbar in $\Omega$. Setzt man in (8a) $r = 1$, so findet man, daß

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial(\omega P_n)}{\partial x}\right| \leq \frac{C}{n^{k-2}}, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial(\omega P_n)}{\partial y}\right| \leq \frac{C}{n^{k-2}}$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$|u_0 - \omega P_n| = \left\{\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial(\omega P_n)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial(\omega P_n)}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_1}{n^{k-2}},$$

wo $C_1$ eine neue Konstante ist. Wir nehmen jetzt die Funktionen (5) als Koordinatenfunktionen und bilden nach dem RITZschen Verfahren eine Näherungslösung. Diese Lösung hat die Form $u_n = \omega Q_n$, wo $Q_n$ ein Polynom ist, dessen Grad

wir gleich $n$ wählen können; das läuft darauf hinaus, daß man eine bestimmte, wohldefinierte Anzahl von Koordinatenfunktionen benutzt. Das RITZsche Verfahren führt bei gegebenen Koordinatenfunktionen zum kleinsten Wert der Norm bezüglich der Energie $|u - u_n|$. Daraus schließen wir, daß $|u_0 - \omega Q_n| \leq |u_n - \omega P_n|$ ist, und demzufolge

$$|u_0 - \omega Q_n| \leq \frac{C_1}{n^{k-2}}. \tag{9}$$

5. Wenn $u_n$ eine nach dem RITZschen Verfahren gebildete Näherungslösung ist, dann gilt, wie wir gesehen haben, $u_n \to u$ im Sinne der Konvergenz im Mittel, aber auch im Sinne der Konvergenz bezüglich der Energie.[1] Zugleich ist es nicht möglich, zu behaupten, daß im allgemeinen Falle $A u_n \to f$ gilt; anders ausgedrückt, im allgemeinen ist die Behauptung falsch, daß die Näherungslösung nach RITZ der gegebenen Gleichung angenähert genügt. Unter gewissen Bedingungen ist eine solche Behauptung jedoch richtig. Zunächst ist sie trivialerweise richtig, wenn $A$ ein beschränkter Operator ist. Jetzt sei $A$ ein unbeschränkter positiv-definiter symmetrischer Operator. Wir nennen den Operator $B$ *ähnlich* zum Operator $A$, wenn: 1. $B$ ein positiv-definiter symmetrischer Operator ist; 2. die Definitionsbereiche der Operatoren $A$ und $B$ zusammenfallen; 3. die Mengen der Funktionen mit endlicher Energie für die Operatoren $A$ und $B$ zusammenfallen. Es gilt

**Satz 2.** *Es möge der Operator $B$ ähnlich zum Operator $A$ sein und ein diskretes Spektrum besitzen. Die Eigenfunktionen des Operators $B$ seien als Koordinatenfunktionen gewählt, und es sei mit ihrer Hilfe die Näherungslösung $u_n$ der Gleichung $Au = f$ nach* RITZ *gebildet worden. Dann gilt $Au_n \to f$ im Sinne der Konvergenz im Mittel.*[2]

**Beispiele. 1.** Bei der Randbedingung des DIRICHLETschen Problems ($S$ ist der Rand des Gebietes $\Omega$)

$$u|_S = 0$$

sind die Operatoren $Bu = -\Delta u$ und

$$Au = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)u$$

ähnlich, sofern der Operator $A$ nicht singulär ist. Deshalb ist es bei der Lösung des DIRICHLETschen Problems für die Gleichung

$$-\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)u = f(P)$$

zweckmäßig, als Koordinatenfunktionen die der Randbedingung $u|_S = 0$ genügenden Eigenfunktionen des LAPLACE-Operators für das Gebiet $\Omega$ zu nehmen.

---

[1] Wenn eine Gleichung in einem willkürlichen HILBERT-Raum $H$ betrachtet wird, dann gilt $u_n \to u$ im Sinne der Konvergenz im Raum $H$, aber auch im Sinne der Konvergenz im Raum $H_A$.

[2] Siehe die Arbeit [18] des Verfassers.

2. Bei der Randbedingung des NEUMANNschen Problems

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$$

sind die positiv-definiten Operatoren $-\Delta u + u$ und $-\Delta u + C(P)u$, wo $C(P) > 0$ ist, ähnlich. Bei der Lösung des NEUMANNschen Problems für die Gleichung $-\Delta u + C(P)u = f(P)$ ist es zweckmäßig, als Koordinatenfunktionen die (der Randbedingung $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0$ genügenden) Eigenfunktionen des Operators $-\Delta u + u$ zu nehmen oder, was dasselbe ist, die des LAPLACE-Operators für das gegebene Gebiet $\Omega$.

## § 65. Torsion eines Stabes von rechteckigem Querschnitt

**1. Lösung nach dem RITZschen Verfahren.** Wir verweilen bei diesem einfachsten Fall deshalb, weil für ihn eine verhältnismäßig einfache exakte Lösung bekannt ist, mit welcher wir unsere Näherung bequem vergleichen können. Dieses Problem führt bekanntlich auf die Integration der POISSONschen Gleichung

$$-\Delta \psi = 2G\theta$$

($G$ ist der Schubmodul, $\theta$ der Drillwinkel bezogen auf die Längeneinheit) im Rechteck $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ bei den Randbedingungen $\psi(\pm a, y) = \psi(x, \pm b) = 0$. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir $\psi = 2G\theta u$, dann wird

$$-\Delta u = 1, \tag{1}$$

$$u(\pm a, y) = u(x, \pm b) = 0. \tag{2}$$

In § 12 wurde eine Lösung dieser Aufgabe in Form einer bezüglich der Energie orthogonalen Reihenentwicklung gegeben. Wir wenden jetzt auf dasselbe Problem das RITZsche Verfahren an und nehmen als Koordinatenfunktionen Polynome.

Aus Symmetriegründen ist klar, daß die Funktion $u(x,y)$ gerade sowohl in $x$ als auch in $y$ ist. Die Polynome, die diese Eigenschaften besitzen und auf dem Rand des Rechtecks, d. h. auf den Geraden $x = \pm a$, $y = \pm b$, verschwinden, haben die Form

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \cdots).$$

Wir beschränken uns auf drei Glieder und setzen näherungsweise

$$u \approx u_3 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2). \tag{3}$$

Nach Durchführung der notwendigen Rechnungen finden wir als System der RITZschen Gleichungen für die Unbekannten $a_1$, $a_2$, $a_3$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{128}{45}a^3b^3(a^2+b^2)a_1+\frac{128}{45}a^5b^3\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{5}\right)a_2\\
&\qquad+\frac{128}{45}a^3b^5\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{7}\right)a_3=\frac{16a^3b^3}{9},\\
&\frac{128}{45}a^5b^3\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{5}\right)a_1+\frac{128}{45\cdot 7}a^5b^5\left(\frac{11}{5}b^2+\frac{1}{3}a^2\right)a_2\\
&\qquad+\frac{128}{45\cdot 35}a^5b^5\,(a^2+b^2)a_3=\frac{16a^5b^3}{45},\\
&\frac{128}{45}a^3b^3\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{7}\right)a_1+\frac{128}{45\cdot 35}a^5b^5(a^2+b^2)a_2\\
&\qquad+\frac{128}{45\cdot 7}\left(\frac{11}{5}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)a_3=\frac{16a^3b^5}{45}
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

als dessen Lösung wir

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=\frac{35(9a^4+130a^2b^2+9b^4)}{16(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)};\\
a_2&=\frac{105(9a^2+b^2)}{16(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)};\\
a_3&=\frac{105(a^2+9b^2)}{16(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)}
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

erhalten. Wenn man nur den einen Koeffizienten $a_1$ beibehält, indem man

$$u\approx u_1=a_1(x^2-a^2)(y^2-b^2)\tag{6}$$

setzt, findet man leicht

$$a_1=\frac{5}{8(a^2+b^2)}.\tag{7}$$

Um den Genauigkeitsgrad der hier und in § 12 konstruierten Lösung zu beurteilen, gehen wir wie folgt vor. Bekanntlich ergibt sich das Torsionsmoment $M$ aus der Formel

$$M=2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\psi\,dx\,dy=4G\theta\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}u\,dx\,dy,$$

was man in der Form

$$M=(2a)^3(2b)G\theta k_1\left(\frac{b}{a}\right)\tag{8}$$

darstellen kann.[1])

[1]) Siehe S. P. TIMOSCHENKO [1], § 78; dort haben wir auch alle folgenden Angaben über die exakte Lösung unseres Problems entnommen.

Die größte Tangentialspannung tritt bei rechteckigem Querschnitt bekanntlich in der Mitte der längeren Seite auf. Es sei $a > b$. Die größte Tangentialspannung $\tau$ kann man in der Form

$$\tau = G\theta \cdot 2ak\left(\frac{b}{a}\right) \tag{9}$$

darstellen.

Wir bilden neue Näherungslösungen $u_1, u_3, u_6$, indem wir in der Reihe (8), § 12 ein, drei oder sechs Glieder beibehalten:

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x,y) &= \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},\\
u_3(x,y) &= \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{3(9a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+\frac{1}{3(a^2+9b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right\},\\
u_6(x,y) &= \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left\{\frac{1}{a^2+b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right.\\
&\quad+\frac{1}{3(9a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}+\frac{1}{3(a^2+9b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\\
&\quad+\frac{1}{5(25a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{5\pi y}{b}+\frac{1}{81(a^2+b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\\
&\quad\left.+\frac{1}{5(a^2+25b^2)}\sin\frac{5\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Mit Hilfe dieser Näherungslösungen berechnen wir die beiden wesentlichen mechanischen Kenngrößen des Torsionsproblems, das Torsionsmoment und die maximale Tangentialspannung und vergleichen die erhaltene Näherungslösung mit der bekannten exakten. Wir bezeichnen die Näherungswerte von $M$ mit $M_1$, $M_3$, $M_6$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{256\,G\theta a^3b^3}{\pi^6(a^2+b^2)},\\
M_3 &= \frac{256\,G\theta a^3b^3}{\pi^6}\left[\frac{1}{(a^2+b^2)}+\frac{1}{9(9a^2+b^2)}+\frac{1}{9(a^2+9b^2)}\right]\\
M_6 &= \frac{256\,G\theta a^3b^3}{\pi^6}\left[\frac{730}{729(a^2+b^2)}+\frac{1}{9(9a^2+b^2)}+\frac{1}{9(a^2+9b^2)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{25(25a^2+b^2)}+\frac{1}{25(a^2+25b^2)}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir bemerken, daß in den Formeln (10) und (11) die Länge der Rechteckseiten mit $a$ und $b$ bezeichnet worden ist, nicht mit $2a$ und $2b$; übrigens ist das für das Folgende unwesentlich.

Wir bezeichnen mit $k_{1,i}(\gamma)$, $k^{(i)}(\gamma)$, $i = 1, 3, 6$ die Näherungswerte von $k_1(\gamma)$ und $k(\gamma)$, $\gamma = b/a$, berechnet nach den Näherungslösungen $u_i$ der Formeln (10). Man findet ohne Mühe

$$k_{1,1}(\gamma) = \frac{256}{\pi^6} \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},$$

$$k_{1,3}(\gamma) = \frac{256\gamma^2}{\pi^6}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} + \frac{1}{9(9+\gamma^2)} + \frac{1}{9(1+9\gamma^2)}\right],$$

$$k_{1,6}(\gamma) = \frac{256\gamma^2}{\pi^6}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} + \frac{1}{9(9+\gamma^2)} + \frac{1}{9(1+9\gamma^2)} + \frac{1}{25(25+\gamma^2)} + \frac{1}{25(1+25\gamma^2)}\right]$$

und

$$k^{(1)}(\gamma) = \frac{32}{\pi^3} \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2},$$

$$k^{(3)}(\gamma) = \frac{32\gamma^2}{\pi^3}\left[\frac{1}{1+\gamma^2} - \frac{1}{3(\gamma^2+9)} + \frac{1}{1+9\gamma^2}\right],$$

$$k^{(6)}(\gamma) = \frac{32\gamma^2}{\pi^3}\left[\frac{1}{1+\gamma^3} - \frac{1}{3(\gamma^2+9)} + \frac{1}{1+9\gamma^2} + \frac{1}{5(\gamma^2+25)} + \frac{1}{1+25\gamma^2}\right].$$

Die unten folgenden Tabellen 1 und 2 gestatten es, die exakten Werte der Größen $k_1$ und $k$ mit ihren Näherungswerten zu vergleichen.

Tabelle 1

| $\gamma$ | $k_1$ | $k_{1,1}$ | $k_{1,3}$ | $k_{1,6}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1406 | 0,133 | 0,139 | 0,1401 |
| 2 | 0,229 | 0,213 | 0,225 | 0,228 |
| 3 | 0,263 | 0,240 | 0,258 | 0,261 |
| 4 | 0,281 | 0,251 | 0,273 | 0,278 |
| 5 | 0,291 | 0,256 | 0,281 | 0,287 |
| $\infty$ | 0,333 | 0,266 | 0,299 | 0,311 |

Tabelle 2

| $\gamma$ | $k$ | $k^{(1)}$ | $k^{(3)}$ | $k^{(6)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,675 | 0,516 | 0,585 | 0,613 |
| 2 | 0,930 | 0,826 | 0,831 | 0,870 |
| 3 | 0,985 | 0,929 | 0,870 | 0,931 |
| 4 | 0,997 | 0,971 | 0,865 | 0,954 |
| 5 | 0,999 | 0,992 | 0,854 | 0,961 |
| $\infty$ | 1,000 | 1,032 | 0,803 | 1,012 |

Die Tabellen 1 und 2 zeigen, daß die Näherungslösungen die Werte des Torsionsmomentes ziemlich gut und wesentlich schlechter [besonders bezieht sich das auf $u_3(x, y)$] die Werte der maximalen Tangentialspannung wiedergeben. Das erklärt sich dadurch, daß die Genauigkeit der Berechnung des Momentes $M$ von der

Geschwindigkeit der *Konvergenz im Mittel der Reihe* (8) des § 12 abhängt, die Genauigkeit der Berechnung von $\tau$ aber von der Geschwindigkeit der *gleichmäßigen Konvergenz der Reihe der Ableitungen.* Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Reihe (8) des § 12 ziemlich schnell im Mittel konvergiert, während die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen dieser Reihe sehr langsam geschieht.

Wir führen zum Vergleich die mit den Näherungslösungen (3) und (6) berechneten Werte $k_{1,1}(\gamma)$, $k_{1,3}(\gamma)$, $k^{(1)}(\gamma)$ und $k^{(3)}(\gamma)$ an. Wir behalten die Bezeichnungen der Tabellen 1 und 2 bei.

Tabelle 3

| $\gamma$ | $k_1$ | $k_{1,1}$ | $k_{1,3}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,1406 | 0,139 | 0,1404 |
| 2 | 0,229 | 0,222 | 0,228 |
| 3 | 0,263 | 0,250 | 0,263 |
| 4 | 0,281 | 0,261 | 0,279 |
| 5 | 0,291 | 0,267 | 0,290 |
| $\infty$ | 0,333 | 0,278 | 0,311 |

Tabelle 4

| $\gamma$ | $k$ | $k^{(1)}$ | $k^{(3)}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,675 | 0,625 | 0,703 |
| 2 | 0,930 | 1,000 | 0,951 |
| 3 | 0,985 | 1,125 | 0,982 |
| 4 | 0,997 | 1,176 | 0,969 |
| 5 | 0,999 | 1,202 | 0,951 |
| $\infty$ | 1,000 | 1,250 | 0,875 |

Der Vergleich mit den Tabellen 1 und 2 zeigt, daß bei der gleichen Zahl von Näherungen die algebraischen Polynome im Vergleich mit den trigonometrischen eine bessere Näherung für das Moment und eine schlechtere für die größte Tangentialspannung ergeben. Wir können übrigens nicht behaupten, daß dieser Umstand auch für Näherungen höherer Ordnung bestehen bleibt.

**2. Lösung nach der Methode der orthogonalen Projektionen.** Gemäß dem Verfahren der orthogonalen Projektionen setzen wir

$$-\operatorname{grad} u = \mathfrak{v};$$

$\mathfrak{v}$ ist ein zweidimensionaler Vektor mit den Komponenten $v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$ und $v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Gleichung (1) liefert

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 1. \tag{12}$$

Wir bilden einen beliebigen der Gleichung (12) genügenden Vektor $\mathfrak{V}$. Man kann $\mathfrak{V} = (x; 0)$ setzen, d. h.

$$V_x = x, \qquad V_y = 0.$$

Wir wählen jetzt ein der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{w}_n = 0 \tag{13}$$

genügendes System von Vektoren $\mathfrak{w}_n$. Ein vollständiges System solcher Vektoren kann man erhalten, wenn man die $\mathfrak{w}_n$ so wählt, daß ihre Komponenten die Form von Potenzen von $x$ und $y$ haben. Wir brauchen jedoch nicht alle solche Vektoren. Das liegt daran, daß $u(x, y)$ eine gerade Funktion sowohl in $x$ als auch in $y$ ist,

deshalb muß die Komponente $v_x = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$ in $x$ ungerade und in $y$ gerade sein, die Komponente $v_y = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ jedoch gerade in $x$ und ungerade in $y$. Analoge Eigenschaften muß offensichtlich auch der Vektor $\mathfrak{w} = \mathfrak{V} - \mathfrak{v}$ besitzen. Da die Vektoren $\mathfrak{w}_n$ nur zur Approximation des Vektors $\mathfrak{w}$ gebraucht werden, kann man sie denselben Bedingungen, die Geradheit betreffend, unterwerfen. Man kann setzen

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{w}_1 = (x; -y),\ \mathfrak{w}_2 = (x^3; -3x^2y),\ \mathfrak{w}_3 = (3xy^2; -y^3),\\ &\mathfrak{w}_4 = (x^5; -5x^4y),\ \mathfrak{w}_5 = (x^3y^2; -x^2y^3),\ \mathfrak{w}_6 = (5xy^4; -y^5), \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Wir beschränken uns auf die ersten drei Glieder dieser Folge und setzen

$$\mathfrak{w} \approx \mathfrak{w}^{(3)} = a_1\mathfrak{w}_1 + a_2\mathfrak{w}_2 + a_3\mathfrak{w}_3$$

oder ausführlicher

$$w_x \approx w_x^{(3)} = a_1x + a_2x^3 + 3a_3xy^2,$$

$$w_y \approx w_y^{(3)} = -a_1y - 3a_2x^2y - a_3y^3.$$

Die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3$ sind aus der Bedingung

$$\|\mathfrak{V} - \mathfrak{w}\|^2 = \min$$

oder

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[(x - a_1x - a_2x^3 - 3a_3xy^2)^2 + (a_1y + 3a_2x^2y + a_3y^3)^2]\,dx\,dy = \min$$

zu bestimmen.

Nach Ausführung der Integration differenzieren wir die linke Seite wiederum nach $a_1$, $a_2$, $a_3$ und setzen die Ableitungen gleich Null, womit wir folgendes Gleichungssystem erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{4a^3b}{3} + \frac{4ab^3}{3}\right)a_1 + \left(\frac{4a^5b}{5} + \frac{4a^3b^3}{3}\right)a_2 + \left(\frac{4a^3b^3}{3} + \frac{4ab^5}{5}\right)a_3 = \frac{4a^3b}{3};\\ &\left(\frac{4a^5b}{5} + \frac{4a^3b^3}{3}\right)a_1 + \left(\frac{4a^7b}{7} + \frac{12a^5b^3}{5}\right)a_2\\ &\qquad + \left(\frac{4a^5b^3}{5} + \frac{4a^3b^5}{5}\right)a_3 = \frac{4a^5b}{5};\\ &\left(\frac{4a^3b^3}{3} + \frac{4ab^5}{5}\right)a_1 + \left(\frac{4a^5b^3}{5} + \frac{4a^3b^5}{5}\right)a_2\\ &\qquad + \left(\frac{12a^3b^5}{5} + \frac{4ab^7}{7}\right)a_3 = \frac{4a^3b^3}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Als Lösung dieses Systems erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{21\,a^2b^2(a^4-b^4)}{7a^8+114a^6b^2+214a^4b^4+114a^2b^6+7b^8}, \\ a_2 &= -\frac{7b^2(35a^4+38a^2b^2+3b^4)}{6(7a^8+114a^6b^2+214a^4b^4+114a^2b^6+7b^8)}, \\ a_3 &= \frac{7a^2(3a^4+38a^2b^2+35b^4)}{6(7a^8+114a^6b^2+214a^4b^4+114a^2b^6+7b^8)}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Wenn man eine mit dem Verfahren der orthogonalen Projektionen gebildete Lösung hat, kann man den Fehler sowohl der nach dem RITZschen Verfahren als auch der nach der Methode der orthogonalen Projektionen gebildeten Näherungslösung abschätzen. Zur Vereinfachung der Berechnungen beschränken wir uns auf den Fall eines Quadrates ($a = b$). In der allgemeinen Formel (4) des § 48 kann man infolge der Ungleichung (14) des § 50 $\delta = -\|\mathfrak{B} - \mathfrak{w}^{(3)}\|^2$ setzen. Wir haben

$$\|\mathfrak{B} - \mathfrak{w}^{(3)}\|^2 = \left\|\mathfrak{B} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathfrak{w}_k\right\|^2,$$

wo jetzt die Koeffizienten $a_k$ durch die Formeln (16) bestimmt sind. Weiter ist

$$\begin{aligned} \left\|\mathfrak{B} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathfrak{w}_k\right\|^2 &= \left(\mathfrak{B} - \sum_{j=1}^{3} a_j \mathfrak{w}_j,\ \mathfrak{B} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathfrak{w}_k\right) \\ &= \|\mathfrak{B}\|^2 - 2\sum_{k=1}^{3} a_k(\mathfrak{B}, \mathfrak{w}_k) + \sum_{j,k=1}^{3} a_j a_k(\mathfrak{w}_j, \mathfrak{w}_k). \end{aligned} \quad (17)$$

Die Koeffizienten $a_k$ genügen dem System

$$\sum_{j=1}^{3} a_j(\mathfrak{w}_j, \mathfrak{w}_k) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{w}_k); \qquad k = 1, 2, 3.$$

Multipliziert man mit $a_k$ und summiert, so erhält man

$$\sum_{j,k=1}^{3} a_j a_k(\mathfrak{w}_j, \mathfrak{w}_k) = \sum_{k=1}^{3} a_k(\mathfrak{B}, \mathfrak{w}_k).$$

Eingesetzt in (17) erhält man

$$\left\|\mathfrak{B} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathfrak{w}_k\right\|^2 = \|\mathfrak{B}\|^2 - \sum_{k=1}^{3} a_k(\mathfrak{B}, \mathfrak{w}_k).$$

Nun ist

$$\|\mathfrak{B}\|^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} x^2\,dx\,dy = \frac{4}{3}\,a^4.$$

Die Koeffizienten $a_k$ sind durch die Formeln (16) gegeben, die Größen $(\mathfrak{B}, \mathfrak{w}_k)$ sind die rechten Seiten der Gleichungen (15). Benutzt man diese Daten, so erhält man leicht

$$\left\| \mathfrak{B} - \sum_{k=1}^{3} a_k \mathfrak{w}_k \right\|^2 = \frac{76}{135} a^4 = 0{,}5630 a^4.$$

Wir berechnen jetzt $F(u_3)$, wo $u_3$ die nach dem RITZschen Verfahren gebildete Näherungslösung (3) ist. Nach Formel (8) des § 48 hat man

$$F(u_3) = -[a_1(f, \varphi_1) + a_2(f, \varphi_2) + a_3(f, \varphi_3)];$$

die hier auftretenden Skalarprodukte sind die freien Glieder des Systems (4), die Koeffizienten $a_1$, $a_2$, $a_3$ bestimmen sich aus den Formeln (5). Setzt man $a = b$, so erhält man

$$F(u_3) = -\frac{1400}{2493} a^4 = -0{,}5616 a^4.$$

Bezeichnet man mit $u_3$ die nach dem RITZschen Verfahren oder nach der Methode der orthogonalen Projektionen gebildete Näherungslösung, so hat man

$$|u - u_3| \leq a^2 \sqrt{0{,}5630 - 0{,}5616} = a^2 \sqrt{0{,}0014} = 0{,}037 a^2,$$

was einen relativen Fehler bezüglich der Energie von etwa 6% ergibt.

Bei Verwendung der Näherungslösung, die sich aus der Methode der orthogonalen Projektionen ergibt, kann man $\tau_{\max}$ berechnen; die entsprechenden Werte von $k(\gamma)$ sind in Tabelle 5 angeführt.

Tabelle 5

| $\gamma$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Genaue Lösung | 0,675 | 0,930 | 0,985 | 0,997 | 0,999 | 1,000 |
| Lösung nach der Methode der orthogonalen Projektion | 0,694 | 0,982 | 1,047 | 1,055 | 1,050 | 1,000 |

Der Vergleich mit den Tabellen 2 und 4 zeigt, daß die Genauigkeit der Berechnung von $\tau_{\max}$ nach der Methode der orthogonalen Projektionen etwas höher ist als bei Berechnung nach dem RITZschen Verfahren und nahe bei der Genauigkeit liegt, die durch die Reihe nach den Eigenfunktionen des LAPLACE-Operators (§ 12) geliefert wird.

**3. Anwendung des TREFFTZschen Verfahrens.** In Gleichung (1) setzen wir $u = p - \frac{x^2}{2}$, dann wird

$$\Delta p = 0, \quad p|_S = \frac{x^2}{2},$$

wo $S$ der Rand des Rechtecks ist. Wir wenden das TREFFTZsche Verfahren an, wobei wir uns auf einen Summanden beschränken, so daß die Näherungslösung die Form

$$p_1(x, y) = a_1 \varphi_1(x, y)$$

hat, wo $\varphi_1$ eine im Rechteck harmonische Funktion ist. Wir machen den Ansatz

$$\varphi_1 = \cos\frac{\pi x}{2a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2a}.$$

Das Gleichungssystem des TREFFTZschen Verfahrens (§ 55) führt auf die Gleichung

$$a_1\int\limits_S \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\,dS = \int\limits_S \frac{x^2}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}\,dS.$$

Die Ausführung der Rechnung ergibt

$$a_1 = -\frac{16a^3}{\pi^3}\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}};$$

der Näherungswert der Funktion $u$ ist bis auf einen konstanten Summanden gleich

$$u \approx -\frac{x^2}{2} - \frac{16a^2}{\pi^3}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2a}}{\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}}\cos\frac{\pi x}{2a}.$$

In der Tabelle sind die Werte $k(\gamma)$ angeführt, die dieser Näherungslösung entsprechen (siehe die zweite Spalte in Tabelle 6). Zur Berechnung wurde die Formel

$$\tau = |\tau_{yz}|_{x=a,\,y=0} = 2G\theta\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a,\,y=0}$$

benutzt.

Tabelle 6

| $\gamma$ | Lösung genau | Lösung nach TREFFTZ | Lösung nach TREFFTZ mit (18) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,675 | 0,676 | 0,694 |
| 2 | 0,930 | 0,930 | 0,931 |
| 3 | 0,985 | 0,985 | 0,971 |
| 4 | 0,997 | 0,997 | 0,973 |
| 5 | 0,999 | 0,999 | 0,970 |
| $\infty$ | 1,000 | 1,000 | 1,000 |

Wie man sieht, ist das Ergebnis bedeutend genauer als beim RITZschen Verfahren oder bei der Methode der orthogonalen Projektionen. Das hängt mit der Wahl der Koordinatenfunktion $\varphi_1$ zusammen, die die gesuchte harmonische Funktion $p(x, y)$ gut approximiert.

Ein etwas schlechteres Ergebnis erhält man, wenn man harmonische Polynome benutzt. Danach setzen wir

$$u = \tilde{u} - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \qquad \Delta\tilde{u} = 0, \qquad \tilde{u}\,|_S = \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Wir wenden auf die gesuchte Funktion $\tilde{u}$ das TREFFTZsche Verfahren an und führen als Koordinatenfunktionen harmonische Polynome ein; da die Funktion $\tilde{u}$ gerade in jeder der Koordinaten $x$ und $y$ ist, kann man sich allein auf die geraden Polynome beschränken. Wir setzen

$$\tilde{u} = a_1(x^2 - y^2) + a_2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + a_3(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6). \qquad (18)$$

Ohne näher auf die Berechnung einzugehen, geben wir die mit der Näherungslösung (18) gewonnenen Werte von $\tau_{\max}$ an (siehe die dritte Spalte in Tabelle 6).

## § 66. Biegung der am Rand fest eingespannten rechteckigen Platte

Die Aufgabe besteht in der Integration der biharmonischen Gleichung

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D} = p, \tag{1}$$

wo $q$ die Intensität der Belastung und $D$ die Steifheit der Platte ist, bei den Randbedingungen

$$w\,|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_S = 0. \tag{2}$$

Die Längen der Plattenseiten bezeichnen wir mit $2a$ und $2b$. Die Koordinatenachsen legen wir parallel zu den Seiten der Platte, den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt der Platte.

Wie in § 27 gezeigt wurde, führt die Aufgabe auf das Minimalproblem für das Funktional

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} \{(\Delta w)^2 - 2pw\}\, dy$$

auf der Menge der den Randbedingungen (2) genügenden Funktionen. Dieses letztere Problem kann mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens gelöst werden. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, daß die Belastung gleichmäßig verteilt ist, so daß $p = \text{const}$ wird.

Als Koordinatenfunktionen kann man die Polynome der Form

$$(x^2 - a^2)^2\,(y^2 - b^2)^2\,(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \cdots) \tag{4}$$

wählen; wir lassen die ungeraden Potenzen von $x$ und $y$ fort, da $w(x, y)$ offensichtlich symmetrisch bezüglich der Koordinatenachsen ist.

In dem Ausdruck (4) beschränken wir uns auf drei Glieder; mit den Bezeichnungen

$$\varphi_1 = (x^2 - a^2)^2\,(y^2 - b^2)^2, \quad \varphi_2 = x^2 \varphi_1, \quad \varphi_3 = y^2 \varphi_1$$

haben wir

$$w \approx w_3 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 .$$

Die Gleichungen des Ritzschen Verfahrens haben in unserem Falle die Form

$$\sum_{k=1}^{3} (\Delta \varphi_k, \Delta \varphi_m)\, a_k = p\,(1, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Nach Ausführung der notwendigen Rechnungen nimmt das System (5) folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{4}{7}\right) a_1 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{11\gamma^4}\right) b^2 a_2 + \left(\frac{1}{7} + \frac{\gamma^4}{11}\right) a^2 a_3 = \frac{7}{128 a^2 b^2}\, p,\\
&\left(\frac{\gamma^2}{7} + \frac{1}{11\gamma^2}\right) a_1 + \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{143\gamma^4} + \frac{4}{77\gamma^2}\right) b^2 a_2 + \frac{1}{77}(1 + \gamma^4)\, a^2 a_3 = \frac{1}{128 a^2 b^2}\, p,\\
&\left(\frac{1}{7\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{11}\right) a_1 + \frac{1}{77}\left(1 + \frac{1}{\gamma^4}\right) b^2 a_2 + \left(\frac{3}{7} + \frac{3\gamma^4}{143} + \frac{4\gamma^2}{77}\right) a^2 a_3 = \frac{1}{128 a^2 b^2}\, p .
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hier ist $\gamma = \frac{b}{a}$. Das Gleichungssystem (6) entsteht aus (5) nach Kürzung durch einige allgemeine Faktoren rechts und links.

Wenn die Platte quadratisch ist, ist $\gamma = 1$, und die Gleichungen (6) nehmen die einfachere Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{18}{7} a_1 + \frac{18}{77} a^2 a_2 + \frac{18}{77} a^2 a_3 &= \frac{7}{128 a^4} p; \\ \frac{18}{77} a_1 + \frac{502}{1001} a^2 a_2 + \frac{2}{77} a^2 a_3 &= \frac{1}{128 a^4} p; \\ \frac{18}{77} a_1 + \frac{2}{77} a^2 a_2 + \frac{502}{1001} a^2 a_3 &= \frac{1}{128 a^4} p \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

an. Als Lösung dieses Systems erhält man

$$w \approx w_3 = \frac{p}{a^4} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2 \left(0{,}02067 + 0{,}0038 \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right). \tag{8}$$

Für die Durchbiegung der Platte im Mittelpunkt erhält man

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0{,}02067\, p a^4. \tag{9}$$

Wenn man sich in dem Näherungsausdruck für $w$ auf ein Glied beschränkt und

$$w \approx w_1 = a_1 \varphi_1 = a_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

setzt, erhält man statt des Systems (6) die eine Gleichung

$$\left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{4}{7}\right) a_1 = \frac{7}{128 a^2 b^2} p,$$

woraus

$$a_1 = \frac{49}{128 (7 a^4 + 7 b^4 + 4 a^2 b^2)} p \tag{10}$$

folgt, was für die Durchbiegung der Platte im Zentrum den Wert

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{49 a^4 b^4}{128 (7 a^4 + 7 b^4 + 4 a^2 b^2)} \tag{11}$$

ergibt.

Im Falle eines Quadrates ($a = b$) erhalten wir

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0{,}02127\, p a^4. \tag{12}$$

Die Formeln (10) bis (12) sind in der Monographie von L. S. Leibenson [1] angeführt.

Wir wenden auf unser Problem jetzt das Verfahren der anharmonischen Reste an.[1]) Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Platte quadratisch mit der Seite $a$ ist. Als eine der Gleichung der $\Delta q = p$ genügende Funktion $q\,(x, y)$ wählen wir

$$q = \frac{p}{4}\,(x^2 + y^2).$$

Wir führen das System der harmonischen Polynome in die Betrachtungen ein; man kann zeigen, daß dieses System im Raum der in dem Quadrat harmonischen Funktionen vollständig ist und der Bedingung

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} u^2\,dx\,dy < \infty \tag{13}$$

genügen. Wir brauchen übrigens nicht das ganze System. Aus Symmetriegründen ist nämlich klar, daß die gesuchte Funktion $w(x, y)$ sowohl in $x$ als auch in $y$ gerade ist. Man braucht deshalb nur diejenigen harmonischen Polynome beizubehalten, die dieselbe Symmetrieforderung erfüllen. Wir schreiben die ersten drei derartigen Polynome hin:

$$N_1 = 1, \qquad N_2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$$
$$N_3 = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8.$$

Wir orthonormieren sie bezüglich des Quadratgebietes, wodurch wir drei neue harmonische Polynome erhalten:

$$M_1 = \frac{1}{2a}, \quad M_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{13}}\left[\frac{1}{2a} + \frac{15}{8a^5}\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\right],$$
$$M_3 = 0{,}356359\left(M_1 - \sqrt{\frac{7}{13}}\cdot 4{,}76724\,M_2 - 1{,}40625\,a^{-9}\,N_3\right).$$

Die zugehörigen FOURIER-Koeffizienten der Funktion $q(x, y)$ sind

$$q_1 = (q, M_1) = \frac{pa^3}{3}, \qquad q_2 = (q, M_2) = -\,0{,}1397\,pa^3,$$
$$q_3 = (q, M_3) = 0{,}0014\,pa^3.$$

Für $\delta$ [Formel (4) des § 48] kann man auf Grund des Satzes 1 des § 56 die Größe

$$\delta = -\left(\|q\|^2 - \sum_{i=1}^{3} q_i^2\right) = -0{,}02491\,p^2a^6$$

nehmen.

---

[1]) Die mit der Anwendung des Verfahrens der anharmonischen Reste zusammenhängenden Rechnungen dieses Paragraphen sind teilweise dem Artikel von S. CH. RAFALSON [2] entnommen.

Wir berechnen jetzt die Größe $F(w_3)$, wo $F$ durch Formel (3) definiert ist, $w_3$ durch Formel (8). Nach Formel (8) des § 48 ist

$$F(w_3) = -\sum_{i=1}^{3} a_i (f, \varphi_i), \qquad f = p.$$

Nach Formel (7) haben wir

$$a_1 = 0{,}02067 \frac{p}{a^4}, \qquad a_2 = a_3 = 0{,}0038 \frac{p}{a^6}.$$

Ferner gilt, wie man leicht sieht

$$(f, \varphi_1) = (p, \varphi_1) = p \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2 \, dx\, dy = \frac{256}{225} p a^{10},$$

$$(f, \varphi_2) = (f, \varphi_3) = p \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} x^2 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - a^2)^2 \, dx\, dy = \frac{256}{7 \cdot 225} p a^{12}.$$

Daraus folgt $F(w_3) = -\,0{,}02486\, p^2 a^6$ und

$$|w - w_3| \leq p a^3 \sqrt{0{,}00005} = 0{,}0071\, p a^3. \tag{14}$$

Jetzt läßt sich leicht auch die absolute Größe der Differenz $w - w_3$ abschätzen. Es sei $u(x, y)$ eine beliebige Funktion, die im abgeschlossenen Quadrat zweimal stetig differenzierbar ist und auf den Seiten des Quadrates zusammen mit ihren ersten Ableitungen verschwindet. Möge z. B. der Punkt $(x, y)$ im ersten Quadranten liegen. Wir haben

$$u(x, y) = \int_x^a \int_y^a \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi\, \partial \eta} \, d\xi\, d\eta.$$

Nach der Ungleichung von Bunjakowski ist

$$u^2(x, y) \leq \int_x^a \int_y^a 1^2 \cdot d\xi\, d\eta \int_x^a \int_y^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)^2 \cdot d\xi\, d\eta$$

$$= (a - x)(a - y) \int_x^a \int_y^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)^2 d\xi\, d\eta.$$

Im ersten Quadranten ist der größte Wert jeder der Differenzen $a - x$ und $a - y$ gleich $a$. Daraus erhält man leicht die Ungleichung

$$u^2(x, y) \leq a^2 \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 dx\, dy.$$

Sie ist im ganzen Quadrat richtig, wie leicht zu sehen ist. Wir erinnern uns, daß für unser Problem

$$|u|^2 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] dx\,dy$$

gilt und finden $u^2 \leq \frac{a^2}{2}|u|^2$; wenden wir diese Ungleichung auf die Funktion $w - w_3$ an und nutzen die Abschätzung (14) aus, so erhalten wir schließlich

$$|w - w_3| \leq \frac{0{,}0071}{\sqrt{2}}\, p a^4 = 0{,}005\, p a^4. \tag{15}$$

## § 67. Biegung einer halbkreisförmigen, am Rand elastisch eingespannten Platte

Für die Platte mit fest eingespanntem Rand gelten die Bedingungen

$$w|_L = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_L = 0,$$

für den frei gestützten Rand gilt

$$w|_L = 0, \quad \left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_L = 0.$$

Wir sagen, der Rand der Platte sei *elastisch eingespannt*, wenn auf diesem Rand die Bedingungen

$$w|_L = 0, \tag{1}$$

$$\left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \nu} + k\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_L = 0 \tag{2}$$

erfüllt sind, wo $k$ eine positive Konstante ist. Im Innern der Platte setzen wir wie gewöhnlich die Gleichung von Sophie Germain und Lagrange,

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \tag{3}$$

als erfüllt voraus.

Der biharmonische Operator ist symmetrisch und positiv-definit auf der Menge der den Bedingungen (1) und (2) genügenden Funktionen. Um das zu beweisen, bilden wir das Skalarprodukt

$$(\Delta^2 w_1, w_2) = \iint_S w_2\, \Delta^2 w_1\, dS,$$

worin beide Funktionen $w_1$ und $w_2$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

Nach der Greenschen Formel [Formel (10) des § 2] wird

$$\iint_S w_2\,\Delta^2 w_1\, dS = \iint_S \Delta w_1\, \Delta w_2\, dS + \int_L \left(w_2 \frac{\partial\, \Delta w_1}{\partial \nu} - \Delta w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \nu}\right) ds$$

oder mit Hilfe der Randbedingungen (1) und (2)

$$(\Delta^2 w_1, w_2) = \iint_S \Delta w_1 \, \Delta w_2 \, dS - \int_L \left(\frac{1-\sigma}{\varrho} - k\right) \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \frac{\partial w_2}{\partial \nu} \, ds. \tag{4}$$

Die rechte Seite der Gleichung (4) ändert sich nicht bei Vertauschung von $w_1$ und $w_2$, deshalb ist $(\Delta^2 w_1, w_2) = (w_1, \Delta^2 w_2)$, und unser biharmonischer Operator ist symmetrisch.

Wir setzen jetzt in (4) $w_1 = w_2 = w$. Dann kommt

$$\begin{aligned}(\Delta^2 w, w) &= \iint_S (\Delta w)^2 \, dS - \int_L \frac{1-\sigma}{\varrho} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds + k \int_L \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds \\ &\geq \iint_S (\Delta w)^2 \, dS - \int_L \frac{1-\sigma}{\varrho} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Formeln (20) und (21) des § 27 gelten für beliebige Funktionen, die auf dem Rand $L$ verschwinden. Der Vergleich dieser Formeln ergibt

$$\begin{aligned}&\iint_S (\Delta w)^2 \, dS - \int_L \frac{1-\sigma}{\varrho} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds = \\ &= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right\} dS. \end{aligned} \tag{6}$$

Jetzt wird nach Gleichung (5)

$$(\Delta^2 w, w) \geq \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \right\} ds. \tag{7}$$

Die weiteren Überlegungen verlaufen wie unter Punkt 4 des § 27 und führen auf die Ungleichung (26) des § 27, was bedeutet, daß unser Operator positiv-definit ist.

Aus dem Gesagten folgt, daß man das Gleichgewichtsproblem für die am Rand elastisch eingespannte Platte als Minimalproblem für das Funktional

$$\iint_S \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\sigma) \left[ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dS + k \int_L \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 ds - 2 \iint_S \frac{q}{D} \, w \, dS$$

auffassen kann; bei der Randbedingung (1) ist die Randbedingung (2), wie man leicht feststellt, natürlich.

Zur Illustration betrachten wir die am Rand elastisch eingespannte halbkreisförmige Platte. Den Radius der Platte nehmen wir als Eins an; die Lage der Platte zeigt die Abb. 18. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir $\sigma = 0$, $k = 1$, $\frac{q}{D} = 1$ an. Wir wenden das Ritzsche Verfahren an.

Die Koordinatenfunktionen wählen wir in der Form

$$x^{2k} y^l (1 - x^2 - y^2); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad l = 1, 2, 3, \ldots,$$

Abb. 18

sie genügen der wesentlichen Randbedingung (1); wir berücksichtigen keine ungeraden Potenzen von $x$, da die Durchbiegung der Platte symmetrisch in bezug auf die $x$-Achse ist. Wir beschränken uns auf Summanden, für welche $2k + l \leq 4$ ist, und setzen

$$w_6 = \sum_{k=1}^{6} a_k \varphi_k,$$

wo

$$\varphi_1 = y(1 - x^2 - y^2), \quad \varphi_2 = y\varphi_1, \quad \varphi_3 = x^2\varphi_1, \quad \varphi_4 = y^2\varphi_1, \quad \varphi_5 = x^2 y \varphi_1, \quad \varphi_6 = y^3\varphi_1$$

gilt.

Die Koordinatenfunktionen genügen der natürlichen Bedingung (2) nicht, und das Gleichungssystem des Ritzschen Verfahrens nehmen wir in der Form ($8_2$) des § 14. Da $\sigma = 0$ ist, wird in unserem Falle

$$[\varphi_i, \varphi_k] = \iint_S \left[ \Delta\varphi_i \, \Delta\varphi_k + 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \right] dS + \int_L \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \, ds;$$

nach Ausführung der notwendigen Rechnungen erhalten wir folgendes System:

$$26{,}1994 a_1 + 21{,}3333 a_2 + 6{,}43557 a_3 + 18{,}8496 a_4 + 4{,}2667 a_5 + 17{,}0667 a_6 = 0{,}266667,$$

$$21{,}3333 a_1 + 24{,}0855 a_2 + 4{,}87619 a_3 + 23{,}1619 a_4 + 4{,}02517 a_5 + 21{,}9911 a_6 = 0{,}130900,$$

$$6{,}43557 a_1 + 4{,}87619 a_2 + 5{,}54858 a_3 + 3{,}92699 a_4 + 3{,}25079 a_5 + 3{,}25079 a_6 = 0{,}038095,$$

$$18{,}8496 a_1 + 23{,}1619 a_2 + 3{,}92699 a_3 + 24{,}3473 a_4 + 3{,}05714 a_5 + 24{,}3810 a_6 = 0{,}076190,$$

$$4{,}26667 a_1 + 4{,}02517 a_2 + 3{,}25079 a_3 + 3{,}05714 a_4 + 2{,}36928 a_5 + 3{,}18080 a_6 = 0{,}016362,$$

$$17{,}0667 a_1 + 21{,}9911 a_2 + 3{,}25079 a_3 + 24{,}3810 a_4 + 3{,}18080 a_5 + 25{,}4076 a_6 = 0{,}049087.$$

Die Auflösung dieses Systems ergibt folgende Werte für die Koeffizienten:

$$a_1 = 0{,}02217; \quad a_2 = -0{,}01145; \quad a_3 = -0{,}01317;$$
$$a_4 = 0{,}00887; \quad a_5 = \phantom{-}0{,}00759; \quad a_6 = -0{,}01083.$$

## § 68. Berechnung der Eigenwerte einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

Um das Berechnungsverfahren zu illustrieren, betrachten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}\,\frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0 \tag{1}$$

bei den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Zur Bestimmung einer Lösung nach dem Ritzschen Verfahren wählen wir die Koordinatenfunktionen

$$\varphi_k(x) = (1-x)\,x^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Wir beschränken uns auf die ersten drei Funktionen

$$\varphi_1(x) = (1-x)\,x, \quad \varphi_2(x) = (1-x)\,x^2, \quad \varphi_3(x) = (1-x)\,x^3.$$

Bei Anwendung der Methode des § 32 (die Einzelheiten der Rechnung unterdrücken wir) erhält man zur Bestimmung von $\lambda$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0{,}404757774 - \frac{1}{30}\lambda, & 0{,}216156130 - \frac{1}{60}\lambda, & 0{,}135002282 - \frac{1}{105}\lambda \\ 0{,}216156130 - \frac{1}{60}\lambda, & 0{,}510789821 - \frac{1}{105}\lambda, & 0{,}675363337 - \frac{1}{168}\lambda \\ 0{,}135002282 - \frac{1}{105}\lambda, & 0{,}675363337 - \frac{1}{168}\lambda, & 1{,}023822057 - \frac{1}{252}\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Die einfachste grobe Näherung für den ersten Eigenwert erhält man, indem man den Diagonalminor erster Ordnung gleich Null setzt:

$$0{,}404757774 - \frac{1}{30}\lambda = 0, \tag{4}$$

was der Benutzung nur einer Koordinatenfunktion $\varphi_1(x)$ im Ritzschen Verfahren entspricht. Aus Gleichung (4) erhalten wir[1])

$$\lambda_1^{(1)} = 12{,}14273.$$

---

[1]) Der obere Index bei $\lambda$ bedeutet die Nummer der Näherung, der untere die Nummer des Eigenwertes.

Die zweite Näherung erhalten wir, indem wir den Minor zweiter Ordnung gleich Null setzen:

$$\begin{vmatrix} 0{,}404757774 - \frac{1}{30}\lambda, & 0{,}216156130 - \frac{1}{60}\lambda \\ 0{,}216156130 - \frac{1}{60}\lambda, & 0{,}510789821 - \frac{1}{105}\lambda \end{vmatrix} = 0; \tag{5}$$

die kleinste Wurzel der Gleichung (5) ist gleich

$$\lambda_1^{(2)} = 12{,}12781,$$

was eine genauere Näherung für den kleinsten Eigenwert des Problems (1), (2) liefert. Löst man Gleichung (3) nach dem Verfahren von NEWTON, so erhält man den noch genaueren Wert

$$\lambda_1^{(3)} = 12{,}12255. \tag{6}$$

Jede der Zahlen $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_1^{(3)}$ ist größer als der Eigenwert $\lambda_1$. Eine Annäherung an $\lambda_1$ von unten erhalten wir, wenn wir das in 2, § 62 erwähnte Verfahren benutzen, das auf der Überführung des gegebenen Problems in eine Integralgleichung beruht.

Gleichung (1) mit den Randbedingungen (2) ist gleichwertig mit der Integralgleichung

$$u(x) - \lambda \int_0^1 G(x, s)\, u(s)\, ds = 0, \tag{7}$$

wo $G(x, s)$ die GREENsche Funktion[1]) für das gegebene Problem bedeutet. Zur Bildung dieser Funktion integrieren wir die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}\,\frac{dv}{dx}\right) = 0;$$

ihr allgemeines Integral ist gleich $v = C_1 \sqrt{1+x} + C_2$. Wir bekommen zwei Lösungen, von denen die erste bei $x = 0$, die zweite bei $x = 1$ verschwindet:

$$v_1 = A\,(\sqrt{1+x} - 1), \qquad v_2 = B\,(\sqrt{1+x} - \sqrt{2}).$$

Wir erhalten die GREENsche Funktion, wenn wir $A$ und $B$ als Funktionen des Parameters $s$ annehmen und sie den Forderungen unterwerfen, daß bei $x = s$

$$v_1 = v_2, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1+s}}$$

gilt. Das liefert die Gleichung

$$A\,(\sqrt{1+s} - 1) = B\,(\sqrt{1+s} - \sqrt{2}); \qquad \frac{A}{2\sqrt{1+s}} - \frac{B}{2\sqrt{1+s}} = -\frac{1}{\sqrt{1+s}}.$$

---

[1]) Genaueres über die Bildung der GREENschen Funktion siehe z. B. bei W. I. SMIRNOW [4], Kap. IV, § 1.

Daraus folgt z. B.

$$B = \frac{2\left(\sqrt{1+s}-1\right)}{\sqrt{2}-1}.$$

Jetzt wird

$$G(x, s) = \frac{2\left(\sqrt{1+s}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}-1}, \qquad x \geq s.$$

Da die GREENsche Funktion symmetrisch ist, wird

$$G(x, s) = \frac{2\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+s}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}-1}, \qquad x \leq s.$$

Indem wir $G(x, s)$ als Kern der Integralgleichung (7) behandeln, bilden wir nach den üblichen Regeln den zweiten iterierten Kern; wir erhalten dann für $x \leq s$

$$\begin{aligned} G_2(x, s) = \frac{4}{3\left(3-2\sqrt{2}\right)} & \Big\{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+s}\right)\Big[\left(\sqrt{2}-1\right) \\ & \times\left(-2-x-\frac{x^2}{2}-2\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+x}\right) \\ & +4\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+x}\right)\Big]+\left(\sqrt{1+x}-1\right)\Big[\left(\sqrt{2}-1\right)\Big(2+s+\frac{s^2}{2} \\ & +2\sqrt{2}\sqrt{1+s}-\sqrt{2}s\sqrt{1-s}-\frac{11}{2}\left(\sqrt{1+s}-1\right)\Big)\Big]\Big\}; \end{aligned}$$

die Werte von $G_2(x, s)$ für $x \geq s$ erhält man bei Symmetrie durch Vertauschung der Argumente $x$ und $s$. Nach Formel (*) des § 62 ergibt sich

$$a_2 = \int_0^1\int_0^1 G^2(x, s)\, dx\, ds$$

oder, da der Kern symmetrisch ist,

$$a_2 = 2\int_0^1 ds \int_0^s G^2(x, s)\, dx,$$

was in unserem Falle

$$a_2 = 0{,}0076414951$$

liefert. Analog gilt

$$a_4 = 2\int_0^1 ds \int_0^s G_2^2(x, s)\, dx = 0{,}50092905 \cdot 10^{-4}.$$

Nach Formel (4) des § 62 erhalten wir als Näherungswert mit Unterschuß für den kleinsten Eigenwert

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} = 11{,}4395997; \qquad \lambda_{12} = \frac{1}{\sqrt[4]{a_4}} = 11{,}886553.$$

Nimmt man die genauere Näherung, erhält man schließlich

$$11{,}88655 \leq \lambda_1 \leq 12{,}12255.$$

Nimmt man für $\lambda_1$ das arithmetische Mittel aus den Näherungswerten mit Unterschuß und mit Überschuß, so erhält man den Näherungswert

$$\lambda_1 = 12{,}00455$$

mit einem relativen Fehler von weniger als 1%.

## § 69. Eigenschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt

Die Gleichung der Eigenschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt hat die Gestalt

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] + \varrho S(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Hier ist wie üblich die $x$-Achse parallel zur Stabachse, $z(x, t)$ ist die Querverschiebung ihrer Punkte, $I(x)$ und $S(x)$ sind das Trägheitsmoment und der Flächeninhalt des Querschnitts mit der Abszisse $x$, $E$ ist der Elastizitätsmodul und $\varrho$ die auf die Längeneinheit bezogene Dichte des Stabmaterials. Wir nehmen zur Präzisierung an, daß ein Ende des Stabes eingespannt, das andere frei ist. Wir bezeichnen mit $L$ die Länge des Stabes und legen in dessen eingespanntes Ende den Koordinatenanfangspunkt. Dann schreiben sich die Randbedingungen unseres Problems so:

$$z\,|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0} = 0; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{x=L} = 0; \tag{3}$$

wie üblich suchen wir eine Lösung in der Form

$$z(x, t) = u(x) \sin\,(\sqrt{\lambda t} + \alpha), \qquad \alpha = \text{const.} \tag{4}$$

Dann gehen die Gleichung (1) und die Randbedingungen (2) und (3) in die folgenden über:

$$E \frac{d^2}{dx^2}\left[I(x) \frac{d^2 u}{dx^2}\right] - \varrho \lambda S(x)\, u = 0; \tag{5}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0; \tag{6}$$

$$u''(L) = 0, \quad u'''(L) = 0. \tag{7}$$

Nach dem in § 35 Bewiesenen ist der kleinste Eigenwert $\lambda_1$ unseres Problems gleich dem Minimum des Integrals

$$\int_0^L E u \frac{d^2}{dx^2}\left[I(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\right] dx = E\int_0^L I(x)\left[\frac{d^2 u}{dx^2}\right]^2 dx \tag{8}$$

auf der Menge derjenigen Funktionen, die den Randbedingungen (6) und (7) und der Nebenbedingung

$$\int_0^L \varrho S(x)\, u^2(x)\, dx = 1 \tag{9}$$

genügen.

Um das Minimum des Integrals (8) nach dem RITZschen Verfahren zu bestimmen, wählen wir als Koordinatenfunktionen die Eigenfunktionen des Operators $\frac{d^4 u}{dx^4}$ bei den Randbedingungen (6) und (7). Diese Funktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Die genannten Funktionen haben bekanntlich[1]) die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(\xi) &= \frac{\sin \alpha_k \xi}{\sin\frac{\alpha_k}{2}} + \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \xi}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_k}{2}}, \qquad k = 2m-1,\\ \varphi_k(\xi) &= \frac{\cos \alpha_k \xi}{\cos\frac{\alpha_k}{2}} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k \xi}{\operatorname{sh}\frac{\alpha_k}{2}}, \qquad k = 2m, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wo $\alpha_k$ die Wurzeln der Gleichung[2])

$$\cos\alpha \operatorname{ch}\alpha = 1$$

sind; in den Formeln (10) hat man das Intervall $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ als Grundgebiet zu nehmen, wobei sich die Bedingung (6) auf das Ende $\xi = -\frac{1}{2}$, die Bedingung (7) auf das Ende $\xi = +\frac{1}{2}$ bezieht. Um die Funktionen (10) für unser Problem zu verwenden, muß man offensichtlich

$$\xi = \frac{2x - L}{2L} \tag{11}$$

setzen. Schreibt man angenähert

$$u(x) \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x), \qquad \psi_k(x) = \varphi_k\left(\frac{2x-L}{2L}\right),$$

---

[1]) Siehe W. N. FADDEJEWA [1, 2].

[2]) Die Werte $\alpha_k$ sind z. B. in dem Artikel von W. N. FADDEJEWA [1], Tabelle 7, angegeben.

so erhält man in Übereinstimmung mit dem in § 35 Gesagten folgende Gleichung zur Bestimmung von $\lambda$:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda B_{11}, & A_{12}-\lambda B_{12}, & \ldots, & A_{1n}-\lambda B_{1n} \\ A_{21}-\lambda B_{21}, & A_{22}-\lambda B_{22}, & \ldots, & A_{2n}-\lambda B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1}-\lambda B_{n1}, & A_{n2}-\lambda B_{n2}, & \ldots, & A_{nn}-\lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

wo

$$A_{ik} = E\int_0^L I(x)\,\psi_i''(x)\,\psi_k''(x)\,dx, \qquad B_{ik} = \int_0^L \varrho S(x)\,\psi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx \tag{13}$$

gilt.

Als Beispiel betrachten wir ein homogenes Rohr in Form eines hohlen Kegelstumpfes; ein Achsenschnitt durch dieses Rohr ist in Abb. 19 gezeigt. In diesem Falle wird

$$I(x) = \frac{\pi}{4}\,(y^4 - a^4),$$

$$S(x) = \pi\,(y^2 - a^2),$$

wo

$$y = R - \frac{R-r}{L}\,x = R - \left(\xi + \frac{1}{2}\right)(R - r)$$

ist.

Wenn man in (13) die Substitution $\xi = \dfrac{2x - L}{2L}$ macht, dann nehmen die Koeffizienten $A_{ik}$ und $B_{ik}$ folgende Form an:

Abb. 19

$$A_{ik} = \frac{\pi E}{4L^3}\left\{\left[\frac{1}{16}(R+r)^4 - a^4\right] I_{ik}^{(0)} - \frac{1}{2}(R+r)(R-r)\,I_{ik}^{(1)} + \frac{3}{2}(R+r)^2(R-r)^2\,I_{ik}^{(2)} - 2(R+r)(R-r)^3\,I_{ik}^{(3)} + (R-r)^4\,I_{ik}^{(4)}\right\}; \tag{14}$$

$$B_{ik} = \pi\varrho L\left\{\left[\frac{(R+r)^2}{4} - a^2\right]\tilde I_{ik}^{(0)} - \frac{1}{8}(R^2 - r^2)\,\tilde I_{ik}^{(1)} + (R-r)^2\,\tilde I_{ik}^{(2)}\right\}. \tag{15}$$

Hier sind $I_{ik}^{(0)}, \ldots, \tilde I_{ik}^{(2)}$ die folgenden Integrale:

$$\left.\begin{aligned} I_{ik}^{(n)} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi^n \varphi_i''(\xi)\,\varphi_k''(\xi)\,d\xi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4; \\ \tilde I_{ik}^{(k)} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \xi^n \varphi_i(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi, \qquad n = 0, 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Für die verschiedenen Beziehungen zwischen $i$ und $k$ erhalten wir die folgende Formelgruppe

I. $i = k$; $i$ und $k$ sind ungerade.

$$I_{kk}^{(0)} = \alpha_k^4, \qquad I_{kk}^{(1)} = -2\alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(2)} = \frac{\alpha_k^4}{12} + \alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_k^2}{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(3)} = -\frac{3}{2}\left(\alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_k}{2} - 4\alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + 4\right),$$

$$I_{kk}^{(4)} = \frac{\alpha_k^4}{80} + \frac{1}{4}\left(6\alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} - \alpha_k^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_k}{2} - 6\right).$$

II. $i = k$; $i$ und $k$ sind gerade.

$$I_{kk}^{(0)} = \alpha_k^4, \qquad I_{kk}^{(1)} = -2\alpha_k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(2)} = \frac{\alpha_k^4}{12} - \alpha_k \operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_k^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{kk}^{(3)} = -\frac{3}{2}\left(\alpha_k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_k}{2} + 4\alpha_k \operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} + 4\right),$$

$$I_{kk}^{(4)} = \frac{\alpha_k^4}{80} - \frac{1}{4}\left(6\alpha_k \operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} + \alpha_k^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_k}{2} + 6\right).$$

III. $i \neq k$; $i$ und $k$ sind ungerade.

$$I_{ik}^{(0)} = 0, \qquad I_{ik}^{(1)} = -\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)}\left\{\alpha_i\alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} - \frac{(3\alpha_i^2 + \alpha_k^2)}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}\, \alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + \frac{(\alpha_i^2 + 3\alpha_k^2)}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}\, \alpha_i \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)} = \frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2}\left\{\frac{4(\alpha_i^4 - 6\alpha_i^2\alpha_k^2 + \alpha_k^4)}{(\alpha_i^2 + \alpha_k^2)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha_i^2 + \alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2 - 3\alpha_i^2)\, \alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} + (\alpha_i^2 - 3\alpha_k^2)\, \alpha_i \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2}\right] - \alpha_i\alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)} = \frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2} - \frac{12(\alpha_i^4 + 6\alpha_i^2\alpha_k^2 + \alpha_k^4)}{(\alpha_i^2 - \alpha_k^2)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}\left[(\alpha_i^2 - 3\alpha_k^2)\, \alpha_i \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} - (\alpha_k^2 + 3\alpha_i^2)\, \alpha_k \operatorname{ctg} \frac{\alpha_k}{2}\right]\right\}.$$

IV. $i \neq k$; $i$ und $k$ sind gerade.

$$I_{ik}^{(0)} = 0, \qquad I_{ik}^{(1)} = -\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + \frac{\alpha_k^2+3\alpha_i^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - \frac{\alpha_i^2+3\alpha_k^2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)} = \frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\frac{4(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2} + (\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right] - \alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)} = \frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right.$$

$$\left. - \frac{3}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - (\alpha_i^2+3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\right] - \frac{12(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\right\}.$$

V. $i$ ungerade, $k$ gerade.

$$I_{ik}^{(0)} = 0, \qquad I_{ik}^{(1)} = -\frac{8\alpha_i^3\alpha_k^3}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2},$$

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{8\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + \frac{(\alpha_k^2-3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - (\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(3)} = -\frac{6\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha_i^2-\alpha_k^2}\left[(\alpha_i^2+3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} - (\alpha_k^2+3\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right] + \frac{4(\alpha_i^4+6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2-\alpha_k^2)^2}\right\},$$

$$I_{ik}^{(4)} = \frac{4\alpha_i^2\alpha_k^2}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^2}\left\{\alpha_i\alpha_k\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2} + \frac{3}{\alpha_i^2+\alpha_k^2}\left[(\alpha_k^2-\alpha_i^2)\,\alpha_k\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left. - (\alpha_i^2-3\alpha_k^2)\,\alpha_i\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\right] + \frac{12(\alpha_i^4-6\alpha_i^2\alpha_k^2+\alpha_k^4)}{(\alpha_i^2+\alpha_k^2)^k}\right\}.$$

VI.

$$\tilde{I}_{kk}^{(0)} = 1, \qquad \tilde{I}_{ik}^{(0)} = 0, \qquad i \neq k.$$

$$\tilde{I}_{ik}^{(1)} = -\frac{I_{ik}^{(1)}}{\alpha_i^2\alpha_k^2}, \qquad \tilde{I}_{ik}^{(2)} = \frac{I_{ik}^{(2)}}{\alpha_i^2\alpha_k^2}.$$

Zur numerischen Berechnung wählen wir folgende Abmessungen des Rohres: $L = 4000$ mm, $R = 400$ mm, $r = 200$ mm, $a = 100$ mm.

Setzt man in dem Näherungsausdruck

$$u \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k,$$

$n = 1, 2, 3$, so erhält man zur Bestimmung von $\lambda$ folgende Gleichungen:

1. $0{,}8526 - 0{,}1917 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E} = 0,$

2. $$\begin{vmatrix} 0{,}8526 - 0{,}1917 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & -1{,}5341 + 0{,}0632 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E} \\ -1{,}5341 + 0{,}0632 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & 39{,}4262 - 0{,}3526 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E} \end{vmatrix} = 0,$$

3. $$\begin{vmatrix} 0{,}8526 - 0{,}1917 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & -1{,}5341 + 0{,}0632 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & 1{,}1077 + 0{,}0037 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E} \\ -1{,}5341 + 0{,}0632 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & 39{,}4262 - 0{,}3526 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & -26{,}614 + 0{,}0865 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E} \\ 1{,}1077 + 0{,}0037 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & -26{,}614 + 0{,}0865 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E}, & 156{,}59 - 0{,}3168 \cdot 10^9 \lambda \dfrac{\varrho}{E} \end{vmatrix} = 0,$$

deren kleinste Wurzeln

$$\lambda_1^{(1)} = 0{,}4446 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}; \quad \lambda_1^{(2)} = 0{,}4226 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}; \quad \lambda_1^{(3)} = 0{,}4171 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}$$

sind. Wie ersichtlich, nähern sich die aufeinanderfolgenden Werte von $\lambda_1$ einander ziemlich schnell: Der relative Fehler beim Übergang von $\lambda_1^{(1)}$ zu $\lambda_1^{(3)}$ liegt ungefähr bei 5%, beim Übergang von $\lambda_1^{(2)}$ zu $\lambda_1^{(3)}$ bei etwa 1,3%. Für den zweiten Eigenwert der Gleichungen (2) und (3) ergeben sich die Näherungswerte

$$\lambda_2^{(2)} = 11{,}628 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}, \quad \lambda_2^{(3)} = 11{,}074 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho};$$

der relative Fehler beim Übergang von $\lambda_2^{(2)}$ zu $\lambda_2^{(3)}$ ist angenähert gleich 5%.

Wir versuchen die Werte der Eigenfrequenzen nach unten abzuschätzen. Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir den Fall des massiven Rohres ($a = 0$). Nach dem RITZschen Verfahren sind die Eigenwerte wieder aus einem System der Form (12) zu bestimmen, in welchem man nur die Koeffizienten $A_{ik}$ und $B_{ik}$ durch neue Koeffizienten $\overline{A}_{ik}$ und $\overline{B}_{ik}$ zu ersetzen hat; ihre Berechnung erfordert jetzt keine besondere Mühe: Wie man sich leicht überzeugt, wird

$$\overline{A}_{ik} = A_{ik} + \frac{\pi E a^4}{4L^3} I_{ik}^{(0)}; \quad \overline{B}_{ik} = B_{ik} + \pi \varrho L a^2 I_{ik}^{(0)}.$$

Setzt man wiederum $n = 3$, so erhält man für den kleinsten Wert $\lambda$ als Näherungswert mit Überschuß

$$\lambda_1 \approx 0{,}34498 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}. \tag{17}$$

Um den Wert $\lambda_1$ nach unten abzuschätzen, überführen wir unser Problem nach der Methode des § 62 in eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern. Dieser Kern hat die Form

$$K(x, t) = \sqrt{S(x)\,S(t)}\,G(x, t),$$

wo $G(x, t)$ die GREENsche Funktion unseres Problems und $S(x)$ den Flächeninhalt des Stabquerschnittes mit der Abszisse $x$ darstellt. Die GREENsche Funktion ist definiert als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(J(x)\,\frac{d^2 G}{dx^2}\right) = 0,$$

und zwar als die Lösung, die zusammen mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist, während die dritte Ableitung bei $x = t$ einen Sprung von der Größe

$$\left.\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|_{t=x-0} - \left.\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\right|_{t=x+0} = \frac{1}{J(x)},$$

erfährt.

Nach Ausführung der notwendigen Rechnungen findet man, daß für $x \leq t$

$$K(x, t) = \frac{2(R - Ct)}{3R^2(R - Cx)}\,[3R\,t x^2 - (R + 2Ct)\,x^3]; \qquad C = \frac{R - r}{L}$$

gilt.

Jetzt kann man die zweite Spur des Kernes berechnen:

$$A_2 = 2\int_0^L dt \int_0^t K^2(x, t)\,dx = 8{,}979548 \cdot 10^{16}.$$

Der Parameter der Integralgleichung ist gleich $\lambda \frac{\varrho}{E}$. Nach Formel (3) des § 62 erhält man den Näherungswert $\lambda_1$ mit Unterschuß

$$\lambda_1 \approx 0{,}33371 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}. \tag{18}$$

Die Werte (17) und (18) sind für die genannten Abmessungen von $r, R, L$ berechnet worden.

Das arithmetische Mittel der Werte (17) und (18) ergibt

$$\lambda_1 = 0{,}3390 \cdot 10^{-8} \frac{E}{\varrho}$$

mit einem relativen Fehler von weniger als 1,5%.

## § 70. Radiale Eigenschwingungen eines elastischen Zylinders

Die kleinste Frequenz $\omega_1$ der Eigenschwingungen eines elastischen Körpers, dessen Oberfläche spannungsfrei ist, bestimmt sich aus der Beziehung

$$\gamma \omega_1^2 = \min \frac{2E(\mathfrak{u})}{H(\mathfrak{u})},$$

wo $\gamma$ die Dichte des Mediums, $E(\mathfrak{u})$ die potentielle Deformationsenergie,

$$2E(\mathfrak{u}) = \int_\Omega \{\lambda \theta^2 + \mu[2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]\}\, d\Omega,$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{2}$$

und

$$H(\mathfrak{u}) = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\Omega = \|\mathfrak{u}\|^2 \tag{3}$$

ist. In den Integralen (2) und (3) bezeichnet $\Omega$ das von dem elastischen Medium ausgefüllte Volumen, $\mathfrak{u}$ den Verschiebungsvektor, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sind die Dehnungen und $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ die Scherungen, die diesem Vektor entsprechen. $\lambda$ und $\mu$ sind die Lamé-schen Konstanten. Die Bedingung der Spannungsfreiheit auf der Begrenzung des Körpers ist natürlich, deshalb braucht man $\mathfrak{u}$ keinen Randbedingungen zu unterwerfen, jedoch muß $\mathfrak{u}$ die Forderungen

$$\int_\Omega \mathfrak{u}\, d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega (\mathfrak{r} \times \mathfrak{u})\, d\Omega = 0$$

erfüllen, die zum Ausdruck bringen, daß keine starre Verschiebung vorliegt.

Wir betrachten den Fall, daß der elastische Körper einen Kreiszylinder des Radius $R$ und der Höhe $h$ ausfüllt und nehmen an, daß die Schwingungen radial verlaufen, so daß $\mathfrak{u}$ in Zylinderkoordinaten $\varrho, \vartheta, z$ nur die beiden Komponenten $u_\varrho$ und $u_z$ hat, die nicht vom Polarwinkel $\vartheta$ abhängen. In die Formeln (2) und (3) führen wir anstelle der kartesischen Koordinaten $x, y, z$ Zylinderkoordinaten $\varrho, \vartheta, z$ ein. Dann erhalten wir

$$2E(\mathfrak{u}) = \int_\Omega \{\lambda(\varepsilon_\varrho + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z)^2 + \mu[2(\varepsilon_\varrho^2 + \varepsilon_\vartheta^2 + \varepsilon_z^2) + \gamma_{\varrho\vartheta}^2 + \gamma_{\vartheta z}^2 + \gamma_{\varrho z}^2]\}\, d\Omega \tag{5}$$

$$H(\mathfrak{u}) = \int_\Omega (u_\varrho^2 + u_\vartheta^2 + u_z^2)\, d\Omega. \tag{6}$$

Die folgenden Formeln drücken die Verzerrungskomponenten in Zylinderkoordinaten aus:

$$\varepsilon_\varrho = \frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial \vartheta} + \frac{u_\varrho}{\varrho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\gamma_{\varrho\vartheta} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_\varrho}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{\varrho}, \quad \gamma_{\varrho z} = \frac{\partial u_z}{\partial \varrho} + \frac{\partial u_\varrho}{\partial z}, \quad \gamma_{\vartheta z} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}.$$

Mit den Bedingungen unseres Problems wird $u_\vartheta = 0$, $\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} = 0$, und wir erhalten die etwas einfacheren Formeln

$$\varepsilon_\varrho = \frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_\varrho}{\varrho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{\varrho z} = \frac{\partial u_z}{\partial \varrho} + \frac{\partial u_\varrho}{\partial z}, \quad \gamma_{\varrho\vartheta} = \gamma_{\vartheta z} = 0.$$

Dementsprechend vereinfachen sich auch die Formeln (5) und (6); führt man noch die Integration über $\vartheta$ aus, so nehmen sie folgendes Aussehen an:

$$2E(\mathfrak{u}) = 4\pi E_1(\mathfrak{u}), \qquad H(\mathfrak{u}) = 2\pi H_1(\mathfrak{u})$$

wo

$$2E_1(\mathfrak{u}) = \int_0^R \varrho\, d\varrho \int_0^h \left\{\lambda\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{u_\varrho}{\varrho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \mu\left[2\left(\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{u_\varrho^2}{\varrho^2} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right) + \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varrho}\right)^2\right]\right\} dz, \tag{7}$$

und

$$H_1(\mathfrak{u}) = \int_0^R \varrho\, d\varrho \int_0^h (u_\varrho^2 + u_z^2)\, dz \tag{8}$$

gilt. Dabei ist

$$\gamma\omega_1^2 = \min \frac{2E_1(\mathfrak{u})}{H_1(\mathfrak{u})}. \tag{9}$$

Zur Bestimmung des Minimums des Ausdruckes (9) nach dem Ritzschen Verfahren wählen wir die Näherungsfunktionen $u_\varrho$ und $u_z$ in der Form

$$u_\varrho = \varrho(a_0 + a_1 z + a_2\varrho^2 + a_3 z^2) \qquad u_z = b_0 + b_1 z + b_2\varrho^2 + b_3 z^2 \tag{10}$$

Den Faktor $\varrho$ in $u_\varrho$ haben wir deshalb eingeführt, weil aus Symmetriegründen $u_\varrho = 0$ bei $\varrho = 0$ gilt.

Die Koeffizienten in (10) sind nicht willkürlich, sondern hängen durch die Beziehungen (4) miteinander zusammen; diese ergeben

$$a_0 = -3\left(\frac{a_1 h}{6} + \frac{a_2 R^2}{5} + \frac{a_3 h^2}{9}\right)$$

$$b_0 = -\left(\frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 R^2}{2} + \frac{b_3 h^2}{3}\right) \tag{11}$$

$$a_1 = \frac{6}{h^2}\left(\frac{b_2 R^2}{5} - \frac{a_3 h^3}{6}\right)$$

Die Beziehungen (11) gestatten es, die Koeffizienten $a_0$, $b_0$, $a_1$ zu eliminieren; das liefert uns

$$\begin{aligned} u_\varrho &= a_2\left(\varrho^3 - \frac{3R^2}{5}\varrho\right) + a_3\left(\frac{h^2}{6}\varrho - hz\varrho + z^2\varrho\right) + b_2\left(\frac{6R^2}{5h^2}z\varrho - \frac{3R^2}{5h}\varrho\right), \\ u_z &= b_1\left(z - \frac{h}{2}\right) + b_2\left(\varrho^2 - \frac{R^2}{2}\right) + b_3\left(z^2 - \frac{h^2}{3}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Wir führen in die Betrachtung die Verschiebungsvektoren

$$\begin{aligned} &\vec{\varphi}_1 = \left(0;\ z - \frac{h}{2}\right), \quad \vec{\varphi}_2 = \left(\varrho^3 - \frac{3R^2}{5}\varrho;\ 0\right), \\ &\vec{\varphi}_3 = \left(\frac{6R^2}{5h^2}\varrho z - \frac{3R^2}{5h}\varrho;\ \varrho^2 - \frac{R^2}{2}\right), \\ &\vec{\varphi}_4 = \left(\frac{h^2}{6}\varrho - hz\varrho + z^2\varrho;\ 0\right), \quad \vec{\varphi}_5 = \left(0;\ z^2 - \frac{h^2}{3}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

ein; in den Formeln (13) stehen rechts an erster Stelle die $\varrho$-Komponenten. Mit Hilfe der Vektoren $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_2$ kann man die Formeln (12) in der bequemeren Form

$$\mathfrak{u} = b_1\vec{\varphi}_1 + a_2\vec{\varphi}_2 + b_2\vec{\varphi}_3 + a_3\vec{\varphi}_4 + b_3\vec{\varphi}_5 \tag{14}$$

schreiben. Wir führen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} 2E_1(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \int_0^R \varrho\, d\varrho \int_0^h \Big\{ &\lambda\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{u_\varrho}{\varrho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{v_\varrho}{\varrho} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \\ &+ \mu\left[2\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho}\frac{\partial v_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{u_\varrho v_\varrho}{\varrho^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varrho}\right)\left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \varrho}\right)\right]\Big\}\, dz, \\ H_1(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \int_0^R \varrho\, d\varrho \int_0^h &(u_\varrho v_\varrho + u_z v_z)\, dz \end{aligned}$$

ein. In Übereinstimmung mit dem in § 33 Gesagten nimmt die Gleichung zur Bestimmung von $\gamma\omega_1^2 = \varkappa$ dann folgende Form an:

$$\begin{vmatrix} 2E_1(\varphi_1, \varphi_1) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_1),\ 2E_1(\varphi_1, \varphi_2) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_2), \ldots \\ \ldots, 2E_1(\varphi_1, \varphi_5) - \varkappa H_1(\varphi_1, \varphi_5) \\ 2E_1(\varphi_2, \varphi_1) - \varkappa H_1(\varphi_2, \varphi_1),\ 2E_1(\varphi_2, \varphi_2) - \varkappa H_1(\varphi_2, \varphi_2), \ldots \\ \ldots, 2E_1(\varphi_2, \varphi_5) - \varkappa H_1(\varphi_2, \varphi_5) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2E_1(\varphi_5, \varphi_1) - \varkappa H_1(\varphi_5, \varphi_1),\ 2E_1(\varphi_5, \varphi_1) - \varkappa H_1(\varphi_5, \varphi_2), \ldots \\ \ldots, 2E_1(\varphi_5, \varphi_5) - \varkappa H_1(\varphi_5, \varphi_5) \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausführung der notwendigen Rechnungen erhält man (15).

$$
\begin{vmatrix}
\frac{(\lambda+2\mu)R^2h}{2} - \frac{R^2h^3}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h}{5}\lambda, & 0, & 0, & \frac{R^2h^2(\lambda+2\mu)}{2} - \frac{R^2h^4}{24}\varkappa \\
\frac{2R^4h}{5}\lambda, & \frac{R^6h}{75}(74\lambda+124\mu) - \frac{3R^8h}{200}\varkappa, & 0, & 0, & \frac{2R^4h^2}{5}\lambda \\
0, & 0, & \frac{6}{25}(\lambda+\mu)\frac{R^6}{h} + \frac{\mu R^4}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2 - \left(\frac{3}{100}\frac{R^8}{h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa, & 0, & \frac{R^4h}{5}\lambda \\
0, & 0, & 0, & \frac{(\lambda+\mu)R^2h^5}{90} + \frac{\mu R^4h^3}{12} - \frac{R^4h^5}{720}\varkappa, & 0 \\
\frac{1}{2}R^2h^2(\lambda+2\mu) - \frac{R^2h^4}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h^2}{5}, & \frac{R^4h}{5}\lambda & 0, & \frac{2R^2h^3}{3}(\lambda+2\mu) - \frac{2R^2h^5}{45}\varkappa
\end{vmatrix} = 0 \quad (15)
$$

Die Gleichung (15) zerfällt in zwei Gleichungen, da die vierte Spalte nur ein von Null verschiedenes Glied enthält. Die eine dieser Gleichungen ist

$$\frac{(\lambda+\mu)R^2h^5}{90}+\frac{\mu R^4h^3}{720}\varkappa=0, \tag{16}$$

die zweite hat folgende Gestalt:

$$\begin{vmatrix} \frac{R^2h}{2}(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h}{5}\lambda, & 0, & R^2h^2(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa \\ \frac{2R^4h}{5}\lambda, & \frac{R^6h(74\lambda+124\mu)}{75}-\frac{3R^8h}{200}\varkappa, & 0, & \frac{2R^4h^2}{5}\lambda \\ 0, & 0, & \frac{6(\lambda+\mu)R^6}{25h}+\frac{\mu R^4}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2-\left(\frac{3}{100}\frac{R^8}{h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa, & \frac{R^4h}{5}\lambda \\ \frac{R^2h^2}{\lambda}(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^4}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h^2\lambda}{5}, & \frac{R^4h}{5}, & \frac{2R^2h^3(\lambda+2\mu)}{3}-\frac{2R^2h^5}{45}\varkappa \end{vmatrix}=0 \tag{17}$$

In der Determinante (17) multiplizieren wir die erste Spalte mit $h$ und subtrahieren sie von der vierten; dann verschwinden die ersten beiden Elemente der vierten Spalte. Nach dem Satz von LAPLACE zerfällt die Determinante in (17) in das Produkt zweier Determinanten und demgemäß führt die Gleichung (17) auf die beiden quadratischen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{R^2h(\lambda+2\mu)}{2}-\frac{R^2h^3}{24}\varkappa, & \frac{2R^4h\lambda}{5} \\ \frac{2R^4h\lambda}{5}, & \frac{R^5h(74\lambda+124\mu)}{75}-\frac{3R^8h}{200}\varkappa \end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

und

$$\begin{vmatrix} \frac{6}{25h}(\lambda+\mu)R^6+\frac{\mu R^4}{4}\left(\frac{6R^2}{5h^2}+2\right)^2-\left(\frac{3R^8}{100h}+\frac{R^6h}{24}\right)\varkappa, & \frac{R^4h\lambda}{5} \\ \frac{R^4h\lambda}{5}, & \frac{R^2h^3}{6}(\lambda+2\mu)-\frac{R^2h^5}{360}\varkappa \end{vmatrix}=0. \tag{19}$$

Die kleinste der Wurzeln der Gleichungen (16), (18) und (19) ergibt (angenähert) den Wert $\varkappa_1 = \gamma \omega_1^2$, wobei, wie wir oben festgelegt hatten, $\omega_1$ die kleinste Frequenz der Eigenschwingungen des Zylinders bedeutet.

Wir setzen z. B. $\sigma = \frac{1}{3}$ oder, was dasselbe ist, $\alpha = 2\mu$ und $h = 4$, $R = 2$ und schließlich noch $\varkappa/\mu = \nu$. Wir lösen die Gleichungen (16), (18) und (19) mit den genannten Werten und finden als kleinste Wurzel $\nu_1 = 2{,}722808$ und folglich

$$\omega_1 \approx 1{,}650051 \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}.$$

Wenn wir die Diagonalminoren der Determinante (15) gleich Null setzen, erhalten wir die folgenden groberen Näherungswerte (die Ziffern oben bedeuten die Nummer der Näherung)

$$\nu_1^{(1)} = 3,\ \nu_1^{(2)} = \nu_1^{(3)} = \nu_1^{(4)} = \nu_1^{(5)} = 2{,}722808.$$

## § 71. Schwingungen einer elastischen rechteckigen Platte in ihrer Ebene

Wir betrachten eine Platte, deren Rand frei von äußeren Kräften ist. Die Gleichungen der freien Schwingungen einer elastischen Platte haben folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) - \omega^2 \varrho u_x = 0\,; \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) - \omega^2 \varrho u_y = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Hier ist $\varrho$ die Dichte des elastischen Mediums, $\lambda$ und $\mu$ sind die Laméschen Konstanten und $\omega$ ist die Frequenz der freien Schwingungen. Nach dem in § 39 Gesagten ergibt sich die kleinste Eigenfrequenz aus der Beziehung

$$\varrho \omega_1^2 = \min \frac{2E(\mathfrak{u})}{H(\mathfrak{u})}. \tag{2}$$

$E(\mathfrak{u})$ ist das Integral über die Energie der elastischen Verformung und gleich

$$2E(\mathfrak{u}) = \int\limits_{\Omega} \left\{(\lambda + 2\mu)\,\theta^2 - 4\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right\} d\Omega, \tag{3}$$

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial_x} + \frac{\partial u_y}{\partial_y}.$$

$H(\mathfrak{u})$ bedeutet das Integral

$$H(\mathfrak{u}) = \int\limits_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2)\, d\Omega. \tag{4}$$

Die Randbedingung des Problems ist natürlich, deshalb braucht man $\mathfrak{u}$ beim Aufsuchen des Minimums (2) keinen Randbedingungen zu unterwerfen, jedoch muß $\mathfrak{u}$

die Bedingungen

$$\int_\Omega u_x \, d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega u_y \, d\Omega = 0, \qquad \int_\Omega (x u_y - y u_x)\, d\Omega = 0 \tag{5}$$

erfüllen, die eine starre Verschiebung des Körpers ausschließen.

Wir betrachten zur Präzisierung den Fall einer rechteckigen Platte. Die Bezeichnungen der Seitenlängen und die Lage der Koordinatenachsen wählen wir wie in § 66. Als Koordinatenfunktionen wählen wir

$$\cos\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}, \qquad k, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wir setzen unter Beschränkung auf Werte $k + m \leq 2$

$$u_x \approx a_1 \cos\frac{\pi x}{a} + a_2\cos\frac{2\pi x}{a} + a_3\cos\frac{\pi y}{b} + a_4\cos\frac{2\pi y}{b} + a_5\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},$$

$$u_y = b_1 \cos\frac{\pi x}{a} + b_2\cos\frac{2\pi x}{a} + b_3\cos\frac{\pi y}{b} + b_4\cos\frac{2\pi y}{b} + b_5\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}. \tag{6}$$

Wegen der dritten Gleichung (5) hängen die Koeffizienten $a_k$ und $b_k$ durch die Beziehung

$$a b_1 = a_3 b \tag{7}$$

miteinander zusammen; die ersten zwei Gleichungen (5) sind automatisch erfüllt, da die Ausdrücke (6) keine freien Glieder enthalten.

Es ist günstig die Formeln (6) folgendermaßen zu behandeln.

Wir führen neun Vektoren $\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, 9$ ein, indem wir

$$\varphi_1 = \left(\cos\frac{\pi x}{a},\ 0\right), \qquad \varphi_2 = \left(\cos\frac{\pi y}{b},\ \frac{b}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

$$\varphi_3 = \left(\cos\frac{2\pi x}{a},\ 0\right), \qquad \varphi_4 = \left(0,\ \cos\frac{2\pi x}{a}\right),$$

$$\varphi_5 = \left(0,\ \cos\frac{\pi y}{b}\right), \qquad \varphi_6 = \left(\cos\frac{2\pi y}{b},\ 0\right),$$

$$\varphi_7 = \left(0,\ \cos\frac{2\pi y}{b}\right), \qquad \varphi_8 = \left(\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\ 0\right),$$

$$\varphi_9 = \left(0,\ \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right)$$

setzen.

Die Formeln (6) und (7) besagen dann, daß der gesuchte Vektor $\mathfrak{u}$ angenähert durch eine Linearkombination der Vektoren $\varphi_1, \ldots, \varphi_9$ ausgedrückt wird.

Wir setzen $\dfrac{ab\,\varrho\omega^2}{\mu} = \varkappa$. Zur Bestimmung von $\varkappa$ benutzen wir die Gleichung (3) des § 34. In unserem Falle nimmt die Determinante nach Division jeder Zeile durch $\dfrac{\mu}{2}$ die Gestalt (8) an ($\sigma$ ist die Poissonsche Zahl):

$$
\left|\begin{matrix}
\frac{2\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{16\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \pi^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\right)-\varkappa\frac{a+b}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{8\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{32\sigma}{3(1-2\sigma)} \\
0 & 0 & 0 & 4\pi^2\frac{b}{a}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\
\frac{16\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi^2\frac{a}{b}-\varkappa & 0 & 0 & \frac{32}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8\pi^2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}-\varkappa & \frac{64(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 & 0 & \frac{64(1-\sigma)}{3(1-2\sigma)} & \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right]-\frac{\varkappa}{2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{32\sigma}{1-2\sigma} & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 & 0 & \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]-\frac{\varkappa}{2}
\end{matrix}\right| = 0. \qquad (8)
$$

Wir bemerken, daß man die Gleichung (8) vereinfachen kann, da die zweite Spalte der Determinante (8) nur ein von Null verschiedenes Element enthält; die Gleichung (8) zerfällt in zwei Gleichungen, von denen man die erste erhält, wenn man das genannte Element gleich Null setzt und die zweite, wenn man den Minor dieses Elementes gleich Null setzt. Die erste Gleichung hat die Wurzel

$$\varkappa = \frac{a\pi^2}{a+b}\left(\frac{a}{b} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\right). \tag{9}$$

Um die zweite Gleichung zu lösen, geben wir irgendwelche Zahlenwerte für $\sigma$ und $\frac{b}{a}$ vor. Es sei z. B. $\sigma = \frac{1}{3}$, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Dann nimmt die besagte Gleichung die folgende Form an:

$$\begin{vmatrix} 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{64}{3} \\ 0 & 0 & 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & \frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32\pi^2-\varkappa & \frac{64}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{3} & 0 & 0 & \frac{128}{3} & 4\pi^2-\varkappa & 0 \\ 0 & \frac{128}{3} & 0 & 0 & \frac{64}{3} & 0 & 0 & \frac{17\pi^2}{2}-\varkappa \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Wir bemerken, daß bei $\sigma = \frac{1}{3}$ und $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ die Größe (9) gleich $\varkappa_0 = 19{,}315273$ wird. Um die Konvergenz des Verfahrens zu prüfen, bestimmen wir die Näherungswerte für die kleinste Wurzel $\varkappa_1$, indem wir die Diagonalminoren der Determinante (10) gleich Null setzen. Wenn wir die Minoren erster bis dritter Ordnung gleich Null setzen, erhalten wir für $\varkappa_1$ die Werte 19,739209 und 78,956835. Vergleichen wir das mit $\varkappa_0$, so erhalten wir als Näherungswert der kleinsten Wurzel der Gleichung (8) die Größe 19,315273.

Wir setzen jetzt den Minor vierter Ordnung gleich Null:

$$\begin{vmatrix} 2\pi^2-\varkappa & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 8\pi^2-\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi^2-\varkappa & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 8\pi^2-\varkappa \end{vmatrix} = 0.$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist gleich 15, 692682. Da diese Zahl kleiner als $\varkappa_0$ ist, hat man sie als genaueren Näherungswert der Größe $\frac{ab\varrho\omega_1^2}{\mu}$ anzusehen, wo $\omega_1$ die kleinste Eigenfrequenz der Plattenschwingung bedeutet. Setzt man die Minoren noch höherer Ordnung gleich Null, so erhalten wir jedes Mal als kleinste Wurzel 15,692682. Demnach ist in den Grenzen der von uns angestrebten Genauigkeit

$$\frac{ab\varrho\omega_1^2}{\mu} = 15{,}692682.$$

## § 72. Stabilität einer elliptischen Platte unter Druck

Wir betrachten eine elliptische Platte mit den Halbachsen $a$ und $b$ $(a > b)$, deren Rand eingespannt ist. Wir nehmen an, daß die Platte unter der Wirkung einer gleichmäßigen Druckspannung $\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\lambda D}{h}$, $\tau_{xy} = 0$ steht. Wir suchen die kleinste Belastung, bei welcher die Platte ihre Stabilität verliert.

Die Gleichung (4) des § 38 nimmt in unserem Falle die Form

$$\Delta^2 w + \lambda \Delta w = 0 \tag{1}$$

an. Die Aufgabe besteht in der Auffindung des kleinsten Eigenwertes der Gleichung (1) bei den Randbedingungen

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0. \tag{2}$$

Wir wenden auf unser Problem das Ritzsche Verfahren an und nehmen die Funktionen

$$x^m y^n \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

als Koordinatenfunktionen.[1]) Wir beschränken uns auf Werte $m + n \leq 2$ und erhalten

$$w \approx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2). \tag{4}$$

Wir setzen $\frac{a}{b} = \gamma$, $\lambda a^2 = \varkappa$.

---

[1]) Als Koordinatenachsen wählen wir wie üblich die Symmetrieachsen der Platte.

Wie gewöhnlich führt das Ritzsche Verfahren auf die Gleichung (die Einzelheiten der Rechnung übergehen wir)

$$\begin{vmatrix}
\frac{8}{\gamma}(3+2\gamma^2+3\gamma^4)-\frac{2}{\gamma}(1+\gamma^2)\varkappa & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^2\right)-\frac{\gamma}{15}\varkappa & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma}+2\gamma+3\gamma^3\right)-\frac{1}{15\gamma}\varkappa \\
0 & 2\gamma+\frac{5}{\gamma}+\gamma^3-\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma}{3}\right)\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{\gamma}+5\gamma+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3\gamma^3}+\frac{1}{\gamma}\right)\varkappa & 0 & 0 & 0 \\
\gamma\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)-\frac{\gamma}{5}\varkappa & 0 & 0 & \frac{27}{10\gamma}+\frac{3\gamma^2}{10}+\frac{11\gamma}{15}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{3}\right)\varkappa & 0 & \frac{1}{10\gamma}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\gamma^3}{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{\gamma^2}+5\gamma^2+6-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\gamma^2}+1\right)\varkappa & 0 \\
\frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{\gamma^2}+2+3\gamma^2\right)-\frac{1}{5\gamma^3}\varkappa & 0 & 0 & \frac{1}{10\gamma^3}+\frac{1}{3\gamma}+\frac{\gamma}{10} & 0 & \frac{27\gamma}{10}+\frac{3}{10\gamma^3}+\frac{11}{15\gamma}-\frac{1}{20\gamma}\left(1+\frac{1}{3\gamma^2}\right)\varkappa
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Die zweite, dritte und fünfte Spalte der Determinante (5) enthalten nur ein von Null verschiedenes Element. Als Folge davon zerfällt die Gleichung (5) in die

folgenden vier Gleichungen:

$$2\gamma + \frac{5}{\gamma} + \gamma^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{3}\right)\varkappa = 0; \tag{6}$$

$$\frac{2}{\gamma} + 5\gamma + \frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3\gamma^3} + \frac{1}{\gamma}\right)\varkappa = 0; \tag{7}$$

$$5\left(\frac{1}{\gamma^2} + \gamma^2\right) + 6 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\gamma^2} + 1\right)\varkappa = 0; \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{\gamma}(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4) - \frac{2}{\gamma}(1+\gamma^2)\varkappa & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma} + 2\gamma + 3\gamma^2\right) - \frac{\gamma}{15}\varkappa & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\gamma} + 2\gamma + 3\gamma^2\right) - \frac{1}{15\gamma}\varkappa \\ \gamma\left(\frac{3}{\gamma^2} + 2 + 3\gamma^2\right) - \frac{\gamma}{5}\varkappa & \frac{27}{10\gamma} + \frac{3\gamma^2}{10} + \frac{11\gamma}{15} - \frac{1}{20\gamma}\left(1 + \frac{\gamma^2}{3}\right)\varkappa & \frac{1}{10\gamma} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma^3}{10} \\ \frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{\gamma^2} + 2 + 3\gamma^2\right) - \frac{1}{5\gamma^3}\varkappa & \frac{1}{10\gamma^3} + \frac{1}{3\gamma} + \frac{\gamma}{10} & \frac{27\gamma}{10} + \frac{3}{10\gamma^3} + \frac{11}{15\gamma} - \frac{1}{20\gamma}\left(1 + \frac{1}{3\gamma^2}\right)\varkappa \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Wenn $\varkappa_1$ die kleinste der Wurzeln der Gleichungen (6) bis (9) ist, dann ist die Größe der kritischen Last angenähert gleich $\frac{D\varkappa_1}{a^2 h}$.

Wir nehmen z. B. $\gamma = 2$. Die Wurzeln der Gleichungen (6), (7) und (8) sind gleich 78; 102,69; 121,8. Gleichung (9) hat nun für $\gamma = 2$ die Gestalt

$$\begin{vmatrix} 472 - 10\varkappa & \frac{59}{3} - \frac{4}{15}\varkappa & \frac{59}{3} - \frac{1}{15}\varkappa \\ 59 - \frac{4}{5}\varkappa & \frac{313}{30} - \frac{7}{60}\varkappa & \frac{91}{30} \\ \frac{59}{4} - \frac{1}{20}\varkappa & \frac{91}{120} & \frac{1393}{120} - \frac{13}{240}\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man die Determinante entwickelt und durch den Koeffizienten von $\varkappa^3$ teilt,

$$\varkappa^3 - 343{,}5707\,\varkappa^2 + 32028{,}293\,\varkappa - 806705{,}6 = 0.$$

Diese Gleichung lösen wir mit Hilfe des NEWTONschen Verfahrens und nehmen als erste Näherung die Wurzel $\varkappa' = 47{,}2$ des Diagonalminors erster Ordnung. Die zweite vom NEWTONschen Verfahren gelieferte Näherung wird $\varkappa'' = 42{,}06696$, die dritte Näherung ist $\varkappa''' = 42{,}06681$. Man kann also mit ausreichender Genauigkeit $\varkappa_1 = 42{,}067$ annehmen.

KAPITEL IX

# DAS VERFAHREN VON BUBNOW-GALERKIN

## § 73. Grundlagen des Verfahrens

Das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN kann man als Verallgemeinerung des RITZschen Verfahrens für Gleichungen der Form $Au = f$ ansehen, wo der Operator $A$ nicht notwendig positiv ist. Bevor wir das Verfahren allgemein formulieren, erläutern wir es an einem einfacheren Spezialfall, der übrigens die erdrückende Mehrheit der Anwendungen umfaßt.

Möge die unbekannte Funktion $u(P)$ in einem gewissen Gebiet $\Omega$ der homogenen Gleichung

$$Lu - f(P) = 0 \tag{1}$$

genügen und eventuell gewissen *homogenen* Randbedingungen. Wir wählen eine unendliche Folge von Koordinatenfunktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots$, die im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega} = \Omega + S$ hinreichend oft (entsprechend dem gegebenen Problem) stetig differenzierbar sind und welche *allen* Randbedingungen unseres Problems genügen. Wie gewöhnlich bezeichnet $S$ den Rand des Gebietes $\Omega$. Wir nehmen an, daß sowohl die Gleichung (1) als auch die zugehörigen Randbedingungen linear sind; dann genügt die Funktion

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P), \tag{2}$$

wo $a_k$ willkürlich gewählte Konstanten sind, allen Randbedingungen des Problems. *Nach dem Verfahren von* BUBNOW-GALERKIN *werden die Koeffizienten $a_k$ aus der Forderung bestimmt, daß die linke Seite der Gleichung* (1), *nachdem man in ihr $u_n(P)$ anstelle von $u(P)$ eingesetzt hat, orthogonal zu den Funktionen $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ ist.*

Das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN führt damit zu folgendem System linearer algebraischer Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (L\varphi_k, \varphi_m) = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Wenn das Eigenwertproblem für die Gleichung

$$Lu - \lambda u = 0$$

gestellt ist, dann führt das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN ganz ebenso auf das

Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \{(L\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$$

setzt man die Determinante dieses Systems gleich Null, so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung der Näherungswerte der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} (L\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1), & (L\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2), & \ldots, & (L\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) \\ (L\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1), & (L\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2), & \ldots, & (L\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (L\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1), & (L\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2), & \ldots, & (L\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist nicht schwer, eine allgemeinere Formulierung des Verfahrens von Bubnow-Galerkin zu geben. Der lineare Operator $A$ sei auf einer Menge definiert, die dicht in einem separablen (§ 44) Hilbert-Raum ist, und es sei die Gleichung

$$A u - f = 0 \tag{4}$$

zu lösen. Wir wählen eine Folge von Elementen $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D_A$, die wir im weiteren als Koordinatenelemente bezeichnen werden.

Wir bilden eine Näherungslösung der Gleichung (4) in der Form (2) einer Linearkombination der Koordinatenelemente mit konstanten Koeffizienten. Die Koeffizienten $a_k$ bestimmen wir aus der Bedingung, daß nach Ersetzen von $u$ durch $u_n$ die linke Seite der Gleichung (4) orthogonal zu den Elementen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ist. Das führt auf folgendes System linearer Gleichungen in den Unbekannten $a_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_j)\, a_k = (f, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Das System (5) ist dem Aussehen nach identisch mit dem System (8) des § 14, auf welches das Ritzsche Verfahren führt. Daraus schließt man dann, daß die Verfahren von Bubnow-Galerkin und Ritz zusammenfallen, wenn der Operator $A$ positiv-definit ist. Im allgemeinen Falle ist jedoch das Ritzsche Verfahren nicht anwendbar, während das Verfahren von Bubnow-Galerkin gültig bleibt.

Eine wichtige Rolle spielt die Frage der Konvergenz des Verfahrens von Bubnow-Galerkin. Die Geschichte dieser Frage ist in der Einführung ausführlich behandelt worden. In den nächsten beiden Paragraphen geben wir einen verhältnismäßig elementaren Konvergenzbeweis[1]) für die Fälle, wo die Gleichung (4) entweder eine Integralgleichung vom Fredholmschen Typ oder eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. In den folgenden Paragraphen wird ein ziemlich allgemeines Konvergenzkriterium für das Verfahren von Bubnow-Galerkin gegeben, welches wir auf partielle Differentialgleichungen anwenden. Besonders wird die Frage der natürlichen Randbedingungen betrachtet.

---

[1]) Er stützt sich auf einige Sätze aus der Theorie der Integralgleichungen.

## § 74. Konvergenzbeweis für Integralgleichungen vom FREDHOLMschen Typ[1])

Es sei die Integralgleichung

$$u(P) - \int_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q - f(P) = 0 \tag{1}$$

gegeben, über die wir folgende Voraussetzungen machen:

1. Es ist

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} K^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty; \qquad \int_{\Omega} f^2(P)\, d\Omega < \infty;$$

2. die Gleichung (1) hat eine Lösung, und zwar eine eindeutige, die der Gleichung

$$\| u \|^2 = \int_{\Omega} u^2(P)\, d\Omega < \infty \tag{2}$$

genügt. Wir wenden auf unsere Gleichung das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN an. Die Koordinatenfunktionen $\varphi_k(P)$, $k = 1, 2, \ldots$ unterziehen wir (wenn das nötig ist) dem Orthogonalisierungsprozeß; es ist leicht zu sehen, daß davon die Näherungslösung $u_n(P)$ nicht berührt wird. Damit genügen die $\varphi_k$ den Bedingungen

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_{\Omega} \varphi_j(P)\, \varphi_k(P)\, d\Omega = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{3}$$

Von den Koordinatenfunktionen fordern wir Vollständigkeit im Sinne der Konvergenz im Mittel. Das bedeutet, daß man zu jeder beliebigen Funktion $u(P)$ mit endlicher Norm und zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ eine ganze positive Zahl $N$ und Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ derart bestimmen kann, daß

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \int_{\Omega} \left[ u(P) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(P) \right]^2 d\Omega < \varepsilon^2$$

gilt. Wir setzen jetzt

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P),$$

setzen das anstelle von $u(P)$ in die linke Seite der Gleichung (1) ein und fordern, daß das Ergebnis dieser Substitution orthogonal zu den Funktionen $\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$ ist. Bei Beachtung der Beziehungen (3) erhalten wir folgendes System linearer algebraischer Gleichungen mit den Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

---

[1]) Der erste Beweis dafür wurde von J. W. REPMAN [1] angegeben.

worin

$$\gamma_{mk} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(P, Q)\, \varphi_m(P)\, \varphi_k(Q)\, d\,\Omega_P\, d\,\Omega_Q$$

ist.

Die Zahlen $\gamma_{mk}$ sind die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $K(P, Q)$ in der Entwicklung dieser Funktion in eine FOURIERsche Doppelreihe nach den Orthogonalfunktionen $\varphi_k$, analog sind die Zahlen $(f, \varphi_m)$ die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $f(P)$. Wir führen die Bezeichnungen

$$K_n(P, Q) = \sum_{k, m=1}^{n} \gamma_{mk} \varphi_m(P)\, \varphi_k(Q),$$

$$f_n(P) = \sum_{m=1}^{n} (f, \varphi_m)\, \varphi_m(P)$$

ein. Das System der orthogonalen und normierten Funktionen $\varphi_m(P)$ ist vollständig, deshalb gilt

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} [K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2\, d\,\Omega_P\, d\,\Omega_Q = 0, \\ &\lim_{n=\infty} \int\limits_{\Omega} [f_n(P) - f(P)]^2\, d\,\Omega = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir betrachten die Hilfsgleichung

$$v_n(P) - \int\limits_{\Omega} K_n(P, Q)\, v_n(Q)\, d\,\Omega_Q = f_n(P). \tag{6}$$

Das weitere stützt sich auf einen Satz aus der Theorie der Integralgleichungen nach dem aus den Beziehungen (5) folgt, daß die Gleichung (6) bei hinreichend großem $n$ lösbar ist und eine eindeutige Lösung besitzt, sofern diese Eigenschaft der Gleichung (1) zukommt, und daß

$$v_n(P) \xrightarrow[n\to\infty]{M} v(P) \tag{7}$$

gilt. Um die Darstellung nicht zu unterbrechen, bringen wir den Beweis dieses Satzes am Schluß des Paragraphen.

Die Integralgleichung (6) zu lösen, ist nicht schwierig. Setzt man in (6) die Werte für $K_n(P, Q)$ und $f_n(P)$ ein, so erhält man

$$v_n(P) = \sum_{k=1}^{m} A_m \varphi_m(P), \tag{8}$$

wo

$$A_m = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{mk} \int\limits_{\Omega} v_n(Q)\, \varphi_k(Q)\, d\,\Omega + (f, \varphi_m)$$

ist.

Setzt man hier den Wert für $v_n(Q)$ aus (8) ein und nutzt man die Gleichungen (3) aus, so findet man, daß die $A_k$ dem System

$$A_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} A_k = (f, \varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

genügen, das mit dem System (4) identisch ist. Bei hinreichend großem $n$ hat das System (9) und ebenso auch die Gleichung (6) eine Lösung, und zwar eine eindeutige, deshalb ist $A_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ und

$$v_n(P) \equiv u_n(P).$$

Jetzt folgt aus (7), daß

$$u_n(P) \xrightarrow[n\to\infty]{M} u(P)$$

gilt. Demnach strebt die nach dem Verfahren von Bubnow-Galerkin gebildete Näherungslösung einer Integralgleichung vom Fredholmschen Typ im Mittel gegen die exakte Lösung dieser Gleichung, sofern das System der Koordinatenfunktionen vollständig im Sinne der Konvergenz im Mittel ist.

Wir geben jetzt den Beweis des oben erwähnten Satzes.

Nach Voraussetzung ist Gleichung (1) lösbar und hat eine eindeutige Lösung. Das bedeutet, daß Eins kein Eigenwert des Kernes $K(P, Q)$ ist, und daß die Resolvente $\Gamma(P, Q)$ existiert, mit deren Hilfe die Lösung der Gleichung (1) in der Form

$$u(P) = f(P) + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q)\, f(Q)\, d\Omega_Q \tag{10}$$

darstellbar ist; die Resolvente selbst genügt der Ungleichung

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty. \tag{11}$$

Wir schreiben die Gleichung (6) in der Form

$$v_n(P) - \int_{\Omega} K(P, Q)\, v_n(Q)\, d\Omega_Q = f_n(P) - \int_{\Omega} [K(P, Q) - K_n(P, Q)]\, v_n(Q)\, d\Omega_Q. \tag{12}$$

Wenn wir vorübergehend die rechte Seite der letzten Gleichung als bekannt ansehen, können wir Formel (10) anwenden; das führt auf die der Gleichung (6) äquivalente Integralgleichung

$$v_n(P) = \int_{\Omega} \tilde{K}_n(P, Q)\, v_n(Q)\, d\Omega_Q + f_n(P) + \int_{\Omega} \Gamma(P, Q)\, f_n(Q)\, d\Omega_Q. \tag{13}$$

Dabei wurde kurz

$$\tilde{K}_n(P, Q) = K_n(P, Q) - K(P, Q) + \int_{\Omega} \Gamma(P, R)\, [K_n(R, Q) - K(R, Q)]\, d\Omega_R \tag{14}$$

gesetzt.

Wir schätzen das Integral über den Kern $\tilde{K}_n$ ab. Zunächst ist nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI

$$\tilde{K}_n^2(P, Q) \leq 2[K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2 + 2\int_\Omega \Gamma^2(P, R)\, d\Omega_R \int_\Omega [K_n(R, Q) - K(R, Q)]^2\, d\Omega_R.$$

Integration ergibt

$$\int_\Omega\int_\Omega \tilde{K}_n^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q \leq 2\int_\Omega\int_\Omega [K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q + 2\int_\Omega\int_\Omega \Gamma^2(P, R)\, d\Omega_P\, d\Omega_R \times \int_\Omega\int_\Omega [K_n(P, R) - K(P, R)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_R. \tag{15}$$

In der Ungleichung (15) strebt die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null; folglich gibt es eine Zahl $N$ derart, daß für $n \geq N$

$$\int_\Omega\int_\Omega \tilde{K}_n^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < 1$$

gilt. Dann aber hat für $n \geq N$ die Gleichung (13) und damit auch die Gleichung (6) eine Lösung, und zwar eine eindeutige; diese Lösung kann man nach dem Verfahren der Näherungsfolgen[1]) bilden.

Wir schätzen die Differenz $u(P) - u_n(P)$ ab. Gliedweise Subtraktion der Gleichungen (1) und (6) ergibt

$$u(P) - v_n(P) - \int_\Omega K(P, Q)\,[u(Q) - v_n(Q)]\, d\Omega_Q = f(P) - f_n(P) + \int_\Omega [K(P, Q) - K_n(P, Q)]\, v_n(Q)\, d\Omega_Q. \tag{16}$$

Bezeichnet man der Kürze halber die rechte Seite der letzten Gleichung mit $F_n(P)$, so hat man nach Formel (10)

$$u(P) - v_n(P) = F_n(P) + \int_\Omega \Gamma(P, Q)\, F_n(Q)\, d\Omega_Q.$$

Daraus folgt

$$\|u - v_n\| \leq \|F_n\| + \left\| \int_\Omega \Gamma(P, Q)\, F_n(Q)\, d\Omega_Q \right\|.$$

Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI ist

$$\left(\int_\Omega \Gamma(P, Q)\, F_n(Q)\, d\Omega_Q\right)^2 \leq \int_\Omega \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_Q \cdot \|F_n\|^2.$$

---

[1]) Siehe das Buch [7], § 2, des Verfassers.

Integriert man das über $\Omega$, so erhält man

$$\left\| \int\limits_{\Omega} \Gamma(P, Q)\, F_n(Q)\, d\Omega_Q \right\|^2 \leq \|F_n\|^2 \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q$$

und folglich

$$\|u - v_n\| \leq C\, \|F_n\|, \qquad C = 1 + \left\{\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \Gamma^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Wir schreiben kurz

$$\varepsilon_n^2 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} [K(P, Q) - K_n(P, Q)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q;$$

offensichtlich gilt $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$. Wir nehmen $n$ als so groß an, daß jedenfalls $\varepsilon_n < \dfrac{1}{2C}$ gilt. Bei Anwendung der Ungleichung von BUNJAKOWSKI und der Dreiecksungleichung für die Norm erhalten wir leicht

$$\|F_n\| \leq \|f - f_n\| + \varepsilon_n\, \|v_n\|$$

oder

$$\|F_n\| \leq \|f - f_n\| + \varepsilon_n\, \|u - (u - v_n)\| \leq \|f - f_n\| + \varepsilon_n\, \|u\| + \varepsilon_n\, \|u - v_n\|.$$

Setzt man das in (17) ein, so erhält man

$$(1 - C\varepsilon_n)\ \|u - v_n\| \leq C\, \|f - f_n\| + C\varepsilon_n\, \|u\|.$$

Wir verstärken die Ungleichung, indem wir rechts $1 - C\varepsilon_n$ durch $\dfrac{1}{2}$ ersetzen. Das ergibt

$$\|u - v_n\| < 2C\, \|f - f_n\| + 2C\varepsilon_n\, \|u\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

## § 75. Der Konvergenzbeweis für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten das Problem der Integration der Gleichung

$$-y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x) \tag{1}$$

bei den Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ nehmen wir der Einfachheit halber für $0 \leq x \leq 1$ als stetig an; betreffs der Funktion $f(x)$ nehmen wir an, daß sie eine endliche Norm besitzt. Wir nehmen ferner an, daß die von uns gestellte Aufgabe eine eindeutige Lösung besitzt. Wir wählen ein System von Koordinatenfunktionen $\varphi_n(x)$,

$n = 1, 2, \ldots$, die stetig differenzierbar sind und den Randbedingungen (2) genügen und fordern, daß dieses System vollständig in folgendem Sinne ist: Es soll möglich sein, die *Ableitung* einer beliebigen in $0 \leq x \leq 1$ stetigen und stetig differenzierbaren Funktion mit beliebiger Genauigkeit durch eine Linearkombination der *Ableitungen* $\varphi_n'(x)$ zu approximieren.

Wir setzen

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x).$$

Das System der Gleichungen von BUBNOW-GALERKIN hat folgende Form:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left\{ -\int_0^1 \varphi_k'' \varphi_m \, dx + \int_0^1 (p \varphi_k' + q \varphi_k) \varphi_m \, dx \right\} = \int_0^1 f \varphi_m \, dx,$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

Das erste Integral links integrieren wir partiell; unter Beachtung der Bedingungen (2) erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^1 (\varphi_k' \varphi_m' + p \varphi_k' \varphi_m + q \varphi_k \varphi_m) \, dx = \int_0^1 f \varphi_m \, dx, \tag{3}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

Das System (3) kann man noch etwas vereinfachen, wenn man die Ableitungen $\varphi_k'(x)$ orthogonalisiert; dann ist

$$\int_0^1 \varphi_k' \varphi_m' \, dx = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

und das erwähnte System nimmt die Form

$$a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^1 (p \varphi_k' \varphi_m + q \varphi_k \varphi_m) \, dx = \int_0^1 f \varphi_m \, dx, \tag{4}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n$$

an. Wir drücken hier $\varphi_k(x)$ und $\varphi_m(x)$ durch ihre Ableitungen $\varphi_k'(x)$ und $\varphi_m'(x)$ aus. Da $\varphi_k(0) = 0$ ist, so wird

$$\varphi_k(x) = \int_0^x \varphi_k'(s) \, ds.$$

Setzt man das in (4) ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^1 \varphi_m'(x)\, dx \int_x^1 \left[ p(s)\, \varphi_k'(s) + q(s) \int_0^s \varphi_k'(t)\, dt \right] ds = \int_0^1 f_1(x)\, \varphi_m'(x)\, dx \tag{5}$$

mit

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Die Gleichung (1) mit den Randbedingungen (2) kann man in eine äquivalente Integralgleichung überführen. Es sei

$$G(x, s) = \begin{cases} x(1-s), & x \leq s, \\ s(1-x), & s \leq x. \end{cases}$$

Wenn dann $y(x)$ den Bedingungen (2) genügt, gilt die leicht zu verifizierende Gleichung

$$y(x) = -\int_0^1 G(x, s)\, y''(s)\, ds.$$

Setzt man hier den Wert von $y''$ aus Gleichung (1) ein, so erhält man

$$y(x) = -\int_0^1 G(x, s)\, \{p(s)\, y'(s) + q(s)\, y(s) - f(s)\}\, ds.$$

Diese Gleichung differenzieren wir nach $x$ und ersetzen unter dem Integralzeichen $y(s)$ durch

$$\int_0^s y'(t)\, dt.$$

Nach einigen einfachen Umformungen erhalten wir eine Integralgleichung für $y'(x)$:

$$y'(x) = \int_0^1 s \left[ p(s)\, y'(s) + q(s) \int_0^s y'(t)\, dt - f(s) \right] ds$$
$$- \int_x^1 \left[ p(s)\, y'(s) + q(s) \int_0^s y'(t)\, dt \right] ds + f_1(x). \tag{6}$$

Auf diese Gleichung wenden wir das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN an. Als Koordinatenfunktionen wählen wir $\varphi_k'(x)$. Wir setzen

$$y_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k'(x).$$

Wir substituieren das in (6), bringen alle Glieder nach links und fordern, daß der gewonnene Ausdruck orthogonal zu $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \ldots, \varphi_n'(x)$ ist. Wir erhalten dann $n$ Gleichungen in den $a_k$; diese Gleichungen fallen mit den Gleichungen (5) zusammen, wie leicht zu sehen ist. Demnach ist die Anwendung des Verfahrens von BUBNOW-GALERKIN auf die Differentialgleichung (1) gleichwertig mit der Anwendung dieses Verfahrens auf die Integralgleichung (6). Wie im vorigen Paragraphen festgestellt wurde, konvergiert für diese Gleichung die Näherungslösung $y_n'(x)$ im Mittel gegen $y'(x)$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [y_n'(x) - y'(x)]^2\, dx = 0$$

wird. Daraus folgt leicht, daß gleichmäßig $y_n(x) \to y(x)$ gilt. Da nämlich $y_n(0) = y(0) = 0$ ist, wird

$$y_n(x) - y(x) = \int_0^x [y_n'(s) - y'(s)]\, ds.$$

Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI folgt daraus

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \sqrt{x} \sqrt{\int_0^x [y_n'(s) - y'(s)]^2\, ds} \leq \sqrt{\int_0^1 [y_n'(s) - y'(s)]^2\, ds}.$$

Das letzte Integral hängt nicht von $x$ ab und strebt gegen Null für $n \to \infty$; nach dem Satz von WEIERSTRASS konvergiert dann $y_n(x)$ gleichmäßig gegen $y(x)$.

Damit ist die Konvergenz des Verfahrens von BUBNOW-GALERKIN für das betrachtete Problem bewiesen.

## § 76. Vollstetige Operatoren

Ein Operator $A$ heißt *ausgeartet* oder *endlich dimensional*, wenn er in der Form

$$Au = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \varphi_k \tag{1}$$

dargestellt werden kann, wo $n$ eine endliche Zahl ist und $\varphi_k$ und $\psi_k$ vorgegebene Elemente des betrachteten HILBERT-Raumes sind. Ein Operator $A$ heißt *vollstetig*[1]), wenn er für eine beliebig vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ stets in der Form

$$Au = A_\varepsilon' u + A_\varepsilon'' u \tag{2}$$

dargestellt werden kann, wo $A_\varepsilon'$ ein ausgearteter Operator ist, während die Norm des Operators $A_\varepsilon''$ kleiner ist als die beliebig im voraus gegebene Zahl $\varepsilon > 0$.

[1]) Gewöhnlich wird eine andere Definition des vollstetigen Operators gegeben, die der hier gegebenen äquivalent ist (siehe unten Satz 1).

Wir geben einige Eigenschaften der vollstetigen Operatoren an.

a) *Jeder ausgeartete Operator ist vollstetig.* Man kann nämlich einen ausgearteten Operator in der Form (2) darstellen, es genügt $A''_\varepsilon = 0$ zu setzen.

b) *Ein vollstetiger Operator ist beschränkt.* Es sei $A'_\varepsilon u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \varphi_k$ und $\| A''_\varepsilon \| < \varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine beliebige positive Konstante ist. Dann gilt

$$\| A u \| \leq \sum_{k=1}^{n} |(u, \psi_k)| \cdot \| \varphi_k \| + \varepsilon \, \| u \| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \| \psi_k \| \cdot \| \varphi_k \| + \varepsilon \right\} \| u \| .$$

Daraus ist ersichtlich, daß der Operator $A$ beschränkt ist, es gilt

$$\| A \| \leq \sum_{k=1}^{n} \| \psi_k \| \cdot \| \varphi_k \| + \varepsilon .$$

c) *Die Summe einer endlichen Zahl vollstetiger Operatoren ist vollstetig.* Der Beweis ist offensichtlich.

d) *Wenn der Operator $A$ beschränkt und der Operator $B$ vollstetig ist, dann sind die Operatoren $BA$ und $AB$ vollstetig.* Es sei eine willkürliche Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und es sei

$$B u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \varphi_k + B'' u, \qquad \| B'' \| < \frac{\varepsilon}{\| A \|} .$$

Dann gilt

$$B A u = \sum_{k=1}^{n} | A u, \psi_k |\, \varphi_k + B'' A u .$$

Aus der Ungleichung

$$|(A u, \psi_k)| \leq \| \psi_k \| \cdot \| A u \| \leq \| \psi_k \| \cdot \| A \| \cdot \| u \|$$

ist ersichtlich, daß $(A u, \psi_k)$ ein beschränktes Funktional über $u$ ist; nach Satz 1 des § 45 gibt es ein solches Element $\tilde{\psi}_k$, daß $(A u, \psi_k) = (u, \tilde{\psi}_k)$ gilt. Jetzt wird

$$B A u = \sum_{k=1}^{n} (u, \tilde{\psi}_k)\, \varphi_k + B'' A u ;$$

dabei ist $\| B'' A \| \leq \| B'' \| \cdot \| A \| < \varepsilon$, während die Summe einen ausgearteten Operator darstellt. Nach unserer Definition ist der Operator $BA$ vollstetig. Weiter gilt

$$A B u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, A \varphi_k + A B'' u ; \quad \| A B'' \| \leq \| A \| \cdot \| B'' \| < \varepsilon ,$$

und der Operator $AB$ ist ebenfalls vollstetig.

Ein wichtiges Beispiel eines im Raum $L_2(\Omega)$ vollstetigen Operators stellt der Fredholmsche Integraloperator

$$K u = \int_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q \tag{3}$$

dar, dessen Kern $K(P, Q)$ der Bedingung

$$B^2 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K^2(P, Q)| \, d\Omega_P d\Omega_Q < \infty \tag{4}$$

unterworfen ist. Den Beweis der Vollstetigkeit des FREDHOLMschen Operators kann man z. B. in dem Buch [7] des Verfassers finden.

Eine wichtige Eigenschaft der vollstetigen Operatoren, die gewöhnlich auch zu ihrer Definition dient, gibt der folgende Satz an.

**Satz 1.** *Damit der Operator $T$ vollstetig ist, ist notwendig und hinreichend, daß man aus jeder unendlichen Menge von Elementen mit gemeinsam beschränkter Norm eine Folge $\{u_n\}$ derart auswählen kann, daß die Folge $\{Tu_n\}$ gegen einen Grenzwert konvergiert.*[1])

Unter Verwendung des in § 31 eingeführten Begriffes der Kompaktheit kann man Satz 1 wie folgt formulieren: Damit in einem HILBERT-Raum ein linearer Operator vollstetig ist, ist notwendig und hinreichend, daß er jede bezüglich der Norm beschränkte Menge in eine im Sinne der Konvergenz im gegebenen Raum kompakte Menge abbildet.

**Satz 2.** *Wenn $A$ ein symmetrischer positiv-definiter Operator mit diskretem Spektrum ist, dann ist der zu ihm inverse Operator $G = A^{-1}$ vollstetig.*

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ die orthonormierten Eigenelemente des Operators $A$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ die ihnen entsprechenden Eigenwerte. Wir erinnern daran (§ 31), daß $\lambda_n \to \infty$ gilt, wenn $n \to \infty$ geht. Es sei $Au = f$, dann ist $u = Gf$. Nach Formel (6) des § 30 ist

$$Gf = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k.$$

Wir setzen

$$G'f = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \qquad G''f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \tag{5}$$

so daß $G = G' + G''$ wird. Der Operator $G'$ ist ausgeartet, und es genügt, wenn wir zeigen, daß die Norm des Operators $G''$ beliebig klein gemacht werden kann.

Da die Elemente $\varphi_k$ orthonormiert sind, gilt

$$\|G''f\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k^2}. \tag{6}$$

Wie gewöhnlich nehmen wir an, daß die Eigenwerte der Größe nach geordnet sind. In der Reihe (6) ersetzen wir die $\lambda_k$ durch den kleinsten von ihnen, $\lambda_{n+1}$, was auf die Ungleichung

$$\|G''f\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2$$

führt oder, wenn man die BESSELsche Ungleichung ausnutzt, auf

$$\|G''f\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|f\|.$$

---

[1]) Der Beweis des Satzes 1 ist z. B. in dem Buch des Verfassers „Direkte Methoden der mathematischen Physik", Gostechisdat, 1950, angegeben.

In dieser Beziehung wird das Gleichheitszeichen bei $f = \varphi_{n+1}$ angenommen, und deshalb läßt sich die Konstante $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ nicht durch eine kleinere ersetzen. Nach der Definition der Norm eines Operators ist $\|G''\| = \frac{1}{\lambda_{n+1}}$, was für hinreichend großes $n$ beliebig klein gemacht werden kann.

### § 77. Gleichungen, die einen vollstetigen Operator enthalten

Wir betrachten die Gleichung

$$u - \lambda T u = f, \tag{1}$$

wo $u$ ein gesuchtes, $f$ ein gegebenes Element eines HILBERT-Raumes $H$ ist, $T$ sei ein in diesem Raum vollstetiger Operator und $\lambda$ ein Zahlenparameter. Um diese Gleichung zu lösen, verfahren wir folgendermaßen. Wir lassen zu, daß $\lambda$ einen beliebigen festen Wert annehmen kann, aber dem Betrage nach soll eine gewisse Konstante $R$ nicht überschritten werden: $|\lambda| \leq R$. Nach Formel (2) des § 76 setzen wir $T = T' + T''$, wo der Operator $T'$ ausgeartet ist, während wir vom Operator $T''$ fordern, daß

$$\|T''\| \leq \frac{1}{2R}$$

gilt. Dann wird

$$\|u - \lambda T'' u\| \geq \|u\| - |\lambda|\,\|T'' u\| \geq \frac{1}{2}\,\|u\|; \tag{2}$$

aus Satz 5 des § 45 folgt, daß *der Operator* $(E - \lambda T'')^{-1}$ *existiert und beschränkt ist*. Es ist nicht schwer, seine Form festzustellen, eine unmittelbare Prüfung zeigt nämlich, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (T'')^k (E - \lambda T'')\, u = (E - \lambda T'') \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (T'')^k\, u = u$$

und demzufolge

$$(E - \lambda T'')^{-1} u = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (T'')^k\, u \tag{*}$$

gilt.

Die Reihe (*) konvergiert für jedes beliebige Element $u$. Nach Formel (14) des § 45 gilt nämlich

$$\|\lambda^n (T'')^n u\| \leq |\lambda|^n \cdot \|(T'')^n\| \cdot \|u\| \leq |\lambda|^n \cdot \|T''\|^n \cdot \|u\|.$$

Nun ist $|\lambda| \leq R$, $\|T''\| \leq \frac{1}{2R}$, deshalb wird

$$\|\lambda^n (T'')^n u\| \leq \frac{1}{2^n}\,\|u\|,$$

und die Konvergenz der Reihe ergibt sich daraus, daß die Norm ihres allgemeinen Gliedes das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe nicht übertrifft. Wir bemerken, daß der Operator $(E - \lambda T'')^{-1}$ auf dem ganzen Raum definiert ist, da die Reihe (*) bei beliebigem $u$ konvergiert. Schließlich wird

$$\|(E - \lambda T'')^{-1} u\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (T'')^n u\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^n (T'')^n u\| \leq \|u\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|u\|;$$

letztere Ungleichung bedeutet, daß $\|(E - \lambda T'')^{-1}\| \leq 2$ ist; diese Abschätzung kann man auch aus Ungleichung (2) und Satz 5 des § 45 erhalten.

Wir schreiben die Gleichung (1) in die Form

$$u - \lambda T'' u - \lambda T' u = f$$

um. Wir wenden auf beide Seiten den Operator $(E - \lambda T'')^{-1}$ an, wodurch diese Gleichung in die zu ihr äquivalente Gleichung

$$u - \lambda (E - \lambda T'')^{-1} T' u = F_\lambda; \quad F_\lambda = (E - \lambda T'')^{-1} f \tag{3}$$

übergeht. Ferner sei

$$T' u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \varphi_k;$$

die Elemente $\varphi_k$ kann man ebenso wie die Elemente $\psi_k$ als linear unabhängig voraussetzen. Jetzt wird

$$(E - \lambda T'')^{-1} T' u = \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \omega_{\lambda, k}; \quad \omega_{\lambda, k} = (E - \lambda T'')^{-1} \varphi_k. \tag{4}$$

Die Elemente $\omega_{\lambda, k}$ sind linear unabhängig. Nehmen wir nämlich an, daß es Konstanten $\alpha_k$ derart gibt, daß $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_{\lambda, k} = 0$ ist. Dann wird

$$(E - \lambda T'') \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_{\lambda, k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (E - \lambda T'')\, \omega_{\lambda, k} = 0$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = 0.$$

Da die $\varphi_k$ linear unabhängig sind, gilt $\alpha_k = 0$, was zu beweisen war.

Wir führen die Bezeichnung

$$C_k = (u, \psi_k) \tag{5}$$

ein. Dann nimmt die Gleichung (3) die Form

$$u - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \omega_{\lambda, k} = F_\lambda \tag{6}$$

an, und die Sache läuft auf die Bestimmung der Konstanten $C_k$ hinaus.

Mit Hilfe der Formel (4) überführen wir die Gleichung (3) in die Form

$$u - \lambda \sum_{k=1}^{n} (u, \psi_k)\, \omega_{\lambda,k} = F_\lambda.$$

Ersetzt man hier $u$ nach Formel (6) und nutzt die lineare Unabhängigkeit der $\omega_{\lambda,k}$ aus, so erhält man ein System linearer algebraischer Gleichungen in den Unbekannten $C_k$,

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{mk}(\lambda)\, C_k = b_m(\lambda); \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

das der Gleichung (1) äquivalent ist. Hier haben wir

$$a_{mk}(\lambda) = (\omega_{\lambda,k}, \psi_m); \qquad b_m(\lambda) = (F_\lambda, \psi_m) \tag{8}$$

gesetzt. Offensichtlich sind die Koeffizienten $a_{mk}$ und damit auch die Determinante

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11}, & -\lambda a_{12}, & \ldots, & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21}, & 1 - \lambda a_{22}, & \ldots, & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1}, & -\lambda a_{n2}, & \ldots, & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Funktionen von $\lambda$, die im Kreis $|\lambda| \leq R$ der komplexen $\lambda$-Ebene holomorph sind.[1]) Daraus folgt, daß die Determinante $D_R(\lambda)$ im Kreis $|\lambda| \leq R$ nur endlich viele Wurzeln haben kann.

Wenn $D_R(\lambda) = 0$ ist, dann hat das homogene System, das man aus (7) durch Nullsetzen der rechten Seite erhält, eine nichttriviale Lösung, d. h. eine solche Lösung, in der nicht alle $C_m$ gleich Null sind. Dann hat offensichtlich die homogene Gleichung

$$u - \lambda T u = 0$$

eine nichttriviale Lösung, und das betrachtete $\lambda$ ist ein reziproker Eigenwert des Operators $T$. Solche $\lambda$ werden auch charakteristische Zahlen genannt. Wenn aber $D_R(\lambda) \neq 0$ ist, dann hat das System (7) und mit ihm auch die Gleichung (1) eine eindeutige Lösung, so daß der Operator $(E - \lambda T)^{-1}$ existiert. Wir bezeichnen ihn mit $\Gamma_\lambda$. Die Werte von $\lambda$, für die $\Gamma_\lambda$ existiert, nennen wir *regulär*.

Für den in Gleichung (1) enthaltenen vollstetigen Operator gilt die sogenannte FREDHOLM*sche Alternative*: Entweder ist die inhomogene Gleichung eindeutig lösbar bei beliebigem freiem Glied $f$, und dann hat die zugehörige homogene Gleichung nur die triviale Lösung $u = 0$, oder die inhomogene Gleichung ist nicht bei beliebigem freiem Glied lösbar, und dann hat die zugehörige homogene Gleichung eine nichttriviale Lösung. Der erste Teil der Alternative gilt, wenn $\lambda$ regulär ist, der zweite, wenn $\lambda$ charakteristisch ist.

---

[1]) Dabei ist $D_R(\lambda) \not\equiv 0$, da offensichtlich $D_R(0) = 1$ ist.

Wie man sieht, ist im Kreis $|\lambda| \leq R$ mit beliebigem Radius nur eine endliche Anzahl charakteristischer Zahlen der Gleichung (1) enthalten; daraus folgt erst recht, daß die Menge dieser Zahlen in der ganzen komplexen $\lambda$-Ebene abzählbar ist. Alle übrigen $\lambda$-Werte sind regulär.

*Wenn der Operator $\Gamma_\lambda$ existiert, dann ist er beschränkt.* Wir beweisen das. Wir lösen das System (7) und setzen seine Lösung in (6) ein; dann wird nach einfachen Umformungen

$$u = \Gamma_\lambda f = (E - \lambda T'')^{-1} f + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k,m=1}^{n} \Delta_{km}(\lambda) \left((E - \lambda T'')^{-1} f, \psi_k\right) \omega_{\lambda,m}, \tag{10}$$

wo $\Delta_{km}(\lambda)$ das algebraische Komplement des in der $k$-ten Zeile und $m$-ten Spalte der Determinante $D_R(\lambda)$ stehenden Elementes ist.

Oben haben wir gesehen, daß $\|(E - \lambda T'')^{-1}\| \leq 2$ ist. Jetzt ergibt Formel (10)

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leq 2\,\|f\| + \sum_{k,m=1}^{n} \left|\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)}\right| \cdot \left|\left((E - \lambda T'')^{-1} f, \psi_k\right)\right| \cdot \|\omega_{\lambda,m}\|.$$

Nach der Ungleichung von Cauchy-Bunjakowski ist

$$\left|\left((E - \lambda T'')^{-1} f, \psi_k\right)\right| \leq \|(E - \lambda T'')^{-1} f\| \cdot \|\psi_k\| \leq \|(E - \lambda T'')^{-1}\| \cdot \|f\| \cdot \|\psi_k\| \leq 2\,\|\psi_k\| \cdot \|f\|.$$

Daraus folgt

$$\|\Gamma_\lambda f\| \leq 2\left\{1 + \sum_{k,m=1}^{n} \left|\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)}\right| \cdot \|\omega_{\lambda,m}\| \cdot \|\psi_k\|\right\} \|f\|$$

und folglich

$$\|\Gamma_\lambda\| \leq 2\left\{1 + \sum_{k,m=1}^{n} \left|\frac{\Delta_{km}(\lambda)}{D_R(\lambda)}\right| \cdot \|\omega_{\lambda,m}\| \cdot \|\psi_k\|\right\}.$$

**Satz 1.** *Es seien $\{T_n\}$ vollstetige Operatoren in einem Hilbert-Raum $H$, die gegen einen vollstetigen Operator $T$ in dem Sinne streben, daß*

$$\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{11}$$

*gilt. Weiter seien die $f_n$ Elemente desselben Raumes, die gegen ein gewisses Element $f$ streben. Wenn $\lambda$ ein regulärer Wert der Gleichung*

$$u - \lambda T u = f \tag{12}$$

*ist, dann ist bei hinreichend großem $n$ dasselbe $\lambda$ auch regulär für die Gleichung*

$$u_n - \lambda T_n u_n = f_n, \tag{13}$$

*dabei strebt die Lösung der Gleichung (13) für $n \to \infty$ gegen die Lösung der Gleichung (12).*

Wir betrachten die Gleichung

$$v - \lambda T_n v = g, \tag{14}$$

wo $g$ ein willkürliches Element aus $H$ ist. Die Gleichung (14) schreiben wir in der Form

$$v - \lambda T v - \lambda (T_n - T) v = g. \tag{15}$$

Nach der Voraussetzung des Satzes existiert der Operator $\Gamma_\lambda$; wendet man ihn auf beide Seiten der Gleichung (15) an, so erhält man

$$v - \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T) v = \Gamma_\lambda g. \tag{16}$$

Weiter hat man

$$\| \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T) \| \leq |\lambda| \cdot \| \Gamma_\lambda \| \cdot \| T_n - T \|, \tag{17}$$

was nach der Voraussetzung des Satzes für hinreichend großes $n$ beliebig klein wird. $n$ sei so groß, daß $\| \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T) \| < \frac{1}{2}$ ist.

Wiederholt man die oben angeführten Überlegungen, die sich auf die Reihe (*) bezogen, so überzeugt man sich, daß der Operator $[E - \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T)]^{-1}$ existiert, auf dem ganzen Raum definiert ist und eine 2 nicht überschreitende Norm besitzt.

Jetzt erhalten wir aus (16) die Lösung der Gleichung (14):

$$v = [E - \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T)]^{-1} \Gamma_\lambda g.$$

Daraus ist ersichtlich, daß bei dem genannten $n$ der Operator

$$\Gamma_{n\lambda} = (E - \lambda T_n)^{-1} = [E - \lambda \Gamma_\lambda (T_n - T)]^{-1} \Gamma_\lambda \tag{18}$$

existiert; damit ist bewiesen, daß der betrachtete $\lambda$-Wert regulär für die Gleichung (13) ist.

Um den zweiten Teil des Satzes zu bestätigen, beweisen wir zuerst, daß $\| \Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt. Zur Abkürzung setzen wir

$$\lambda \Gamma_\lambda (T_n - T) = B_n;$$

aus (17) ist ersichtlich, daß $\| B_n \| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Damit folgt nach den Formeln (18) und (*)

$$\Gamma_{n\lambda} u = \sum_{k=0}^{\infty} B_n^k \Gamma_\lambda u,$$

woraus

$$\Gamma_{n\lambda} u - \Gamma_\lambda u = \sum_{k=1}^{\infty} B_n^k \Gamma_\lambda u$$

und

$$\| \Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| B_n \|^k \cdot \| \Gamma_\lambda \| = \frac{\| B_n \| \cdot \| \Gamma_\lambda \|}{1 - \| B_n \|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{19}$$

folgt. Jetzt ist der zweite Teil des Satzes leicht zu beweisen. Wir haben

$$u_n - u = \Gamma_{n\lambda} f_n - \Gamma_\lambda f = (\Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda) f_n + \Gamma_\lambda (f_n - f).$$

Daraus folgt

$$\| u_n - u \| \leq \| \Gamma_{n\lambda} - \Gamma_\lambda \| \cdot \| f_n \| + \| \Gamma_\lambda \| \cdot \| f_n - f \|.$$

Da $\|f_n\| \to \|f\|$ gilt, ist $\|f_n\|$ beschränkt; infolge von (19) strebt der erste Summand gegen Null. Daß der zweite Summand gegen Null strebt, ist offensichtlich. Also gilt $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Der Satz ist bewiesen.

**Satz 2.** *Wenn $\|T_n - T\| \to 0$ gilt, wo $T$ und $T_n$ vollstetige Operatoren sind, dann erhält man die charakteristischen Zahlen der Gleichung $u - \lambda T u = 0$ durch den Grenzübergang $n \to \infty$ aus den charakteristischen Zahlen der Gleichung $u_n - \lambda T_n u_n = 0$.*

Der Beweis beruht auf der einfachen Bemerkung, daß bei hinreichend kleiner Änderung des Operators $T$ sich die Elemente der Determinante $D_R(\lambda)$ beliebig wenig ändern, was damit auch für die Determinante selbst gilt. Es sei $\lambda_0$ eine beliebige Wurzel von $D_R(\lambda)$, die im Kreis $|\lambda| \leq R$ liegt, und $p$ sei ihre Vielfachheit. Wir beschreiben um $\lambda_0$ einen Kreis mit hinreichend kleinem Radius $\varrho$. Dann liegen im Innern und auf dieser Kreislinie außer $\lambda_0$ keine anderen Wurzeln von $D_R(\lambda)$. Insbesondere ist die Determinante $D_R(\lambda)$ auf dem Kreis $|\lambda - \lambda_0| = \varrho$ von Null verschieden. Wir setzen

$$q = \min_{|\lambda - \lambda_0| = \varrho} |D_R(\lambda)|; \qquad q > 0.$$

Wir wählen jetzt $N$ so groß, daß für $n \geq N$ auf dem Kreis $|\lambda - \lambda_0| = \varrho$

$$|D_R(\lambda) - D_R^{(n)}(\lambda)| < q$$

gilt, wo $D_R^{(n)}(\lambda)$ die dem Operator $T_n$ entsprechende Determinante (9) ist. Nach dem Satz von Rouché[1]) hat $D_R^{(n)}(\lambda)$ in dem Kreis $|\lambda - \lambda_0| < \varrho$ genau $p$ Wurzeln. Wir bezeichnen sie mit $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \ldots, \lambda_{np}$. Offensichtlich gilt

$$|\lambda_{nj} - \lambda_0| < \varrho, \qquad j = 1, 2, \ldots, p;\ n \geq N.$$

Da $\varrho$ beliebig klein gewählt werden kann, ist die letzte Ungleichung gleichbedeutend mit der Behauptung, daß

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{nj} = \lambda_0, \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$

gilt.

## § 78. Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz des Verfahrens von Bubnow-Galerkin

Wir untersuchen die Konvergenz des Verfahrens von Bubnow-Galerkin unter der Voraussetzung, daß der Operator $A$ in der Gleichung $Au = f$ die Form

$$A = A_0 + K \tag{1}$$

hat, wo $A_0$ ein symmetrischer positiv-definiter Operator in einem gewissen Hilbert-Raum $H$ ist. Bezüglich des Operators $K$ setzen wir voraus, daß sein Definitionsbereich umfangreicher als der Definitionsbereich des Operators $A_0$ ist (in Symbolen: $D_K \supset D_{A_0}$), so daß jedenfalls der Ausdruck $Ku$ immer sinnvoll ist, wenn der Ausdruck $A_0 u$ sinnvoll ist. Unten werden dem Operator $K$ noch weitere Einschränkungen auferlegt werden.

[1]) Siehe z. B. W. I. Smirnow [3], S. 70, oder B. A. Fuks und B. W. Schabat [1], S. 303.

Wie in § 46 beschrieben, führen wir einen Raum $H_0$ ein, in dem das Skalarprodukt gleich

$$[u, v] = (A_0 u, v) \tag{2}$$

ist. Gemäß dem Verfahren von BUBNOW-GALERKIN wählen wir eine Folge von Koordinatenelementen $\{\varphi_n\}$. *Wir fordern, daß diese Folge im Definitionsbereich des Operators $A_0$ liegt und in $H_0$ vollständig ist.*

Das System (5) des § 73 hat in unserem Falle die Form

$$\sum_{k=1}^{n} \{(A_0\varphi_k, \varphi_m) + (K\varphi_k, \varphi_m)\}\, a_k = (f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Wir orthonormieren $\{\varphi_n\}$ im Raum $H_0$. Wie bereits mehrfach bemerkt wurde, ändert das die Näherungslösung $u_n$ nicht. Das System (3) vereinfacht sich dabei etwas. Zunächst gilt

$$(A_0\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Ferner wird

$$(K\varphi_k, \varphi_m) = (A_0 G K\varphi_k, \varphi_m) = [T\varphi_k, \varphi_m],$$

wo $G = A_0^{-1}$ und $T = GK$ ist. Schließlich wird

$$(f, \varphi_m) = (A_0 G f, \varphi_m) = [f', \varphi_m], \quad f' = Gf.$$

Setzt man kurz

$$\gamma_{mk} = [T\varphi_k, \varphi_m], \quad b_m = [f', \varphi_m],$$

so nimmt das System (3) die Gestalt

$$a_m + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = b_m, \qquad m = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

an.

Wir machen jetzt eine für das weitere wichtige Annahme: *Wir nehmen an, daß der Operator $T = GK$ im Raum $H_0$ vollstetig ist.* Aus der Vollstetigkeit dieses Operators ergibt sich seine Beschränktheit (§ 76) im Raum $H_0$ und nach Satz 3 des § 45 kann er auf den ganzen Raum erweitert werden. Wir nehmen ferner an, daß diese Erweiterung bereits vollzogen wurde.

Die Gleichung $Au = f$ stellen wir in der Form

$$A_0 u + Ku = f \tag{5}$$

dar. Nach Einwirkung des Operators $A_0^{-1} = G$ auf beide Seiten der Gleichung (5) erhalten wir die Gleichung

$$u + Tu = f'; \quad f' = Gf. \tag{6}$$

Offensichtlich genügt jede Lösung der Gleichung (5) auch der Gleichung (6); das Umgekehrte braucht nicht richtig zu sein: Es kann vorkommen, daß ein der Gleichung (6) genügendes Element des Raumes $H_0$ existiert, das aber nicht zu

$D_{A_0}$ gehört, und dann kann man dieses Element nicht in (5) einsetzen. Wir vereinbaren jedoch, daß wir eine derartige Lösung der Gleichung (6) als (verallgemeinerte) Lösung der Gleichung (5) betrachten; unter diesem Vorbehalt sind die Gleichungen (5) und (6) äquivalent.

**Satz 1.** *Eine Näherungslösung der Gleichung* (5) *sei nach dem Verfahren von* BUBNOW-GALERKIN *gebildet worden; diese Näherungslösung konvergiert bezüglich der Energie des Operators* $A_0$[1]) *gegen die exakte Lösung dieser Gleichung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

I. *Die Gleichung* (5) *hat nicht mehr als eine Lösung in* $H_0$.

II. *Der Operator* $T = A_0^{-1}K$ *ist vollstetig in* $H_0$.

Den Operator $A_0$, von dem oben die Rede war, setzen wir als symmetrisch und positiv-definit voraus, das System der Koordinatenfunktionen als in $H_0$ vollständig.

**Beweis.** Wie oben gezeigt wurde, ist die Gleichung (5) der einen vollstetigen Operator $T$ enthaltenden Gleichung (6) äquivalent. Für diese Gleichung gilt die FREDHOLMsche Alternative, und aus der Bedingung I ergibt sich, daß die Gleichung (6) eine Lösung hat, die offensichtlich im Unterraum $H_0$ liegt. Nach Voraussetzung ist das System $\{\varphi_k\}$ der Koordinatenelemente vollständig in $H_0$; wir sind berechtigt, es als in $H_0$ orthonormiert anzusehen. Wir entwickeln $Tu$ und $f'$ in Orthogonalreihen,

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} [Tu, \varphi_k]\varphi_k; \qquad f' = \sum_{k=1}^{\infty} [f', \varphi_k]\varphi_k$$

und setzen

$$T_n u = \sum_{k=1}^{n} [Tu, \varphi_k]\,\varphi_k, \qquad f_n' = \sum_{k=1}^{n} [f', \varphi_k]\varphi_k .$$

Es gilt offensichtlich $|f' - f_n'| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Wir zeigen noch, daß $|T - T_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt.

Der Operator $T$ ist vollstetig in $H_0$ und kann deshalb in die Summe $T = T' + T''$ zerlegt werden, wobei $T'$ ein ausgearteter Operator und $|T''| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, $\varepsilon$ ist eine beliebig kleine positive Zahl. Wir haben

$$(T - T_n)\,u = Tu - T_n u = \sum_{k=n+1}^{\infty} [Tu, \varphi_k]\varphi_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} [T'u, \varphi_k]\varphi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} [T''u, \varphi_k]\varphi_k . \quad (7)$$

Die zweite Summe

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} [T''u, \varphi_k]\varphi_k \right|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |[T''u, \varphi_k]|^2$$

läßt sich leicht abschätzen, da sie nach der BESSELschen Ungleichung die Größe

$$|T''u|^2 \leq |T''|^2 \cdot |u|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}\, |u|^2$$

---

[1]) Anders ausgedrückt, im Sinne der Konvergenz im Raum $H_0$.

nicht übertrifft. Daraus ergibt sich

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} [T''u, \varphi_k]\varphi_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,|u|. \tag{8}$$

Wir schätzen die erste Summe in (7) ab. Der ausgeartete Operator $T'u$ hat die Form

$$T'u = \sum_{j=1}^{s} [u, \psi_j]\omega_j,$$

wo $S$ eine endliche Zahl ist, und $\psi_j$ und $\omega_j$ Elemente des Raumes $H_0$ sind. Wir haben jetzt

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} [T'u, \varphi_k]\varphi_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{s} [u, \psi_j][\omega_j, \varphi_k]\,\varphi_k\right| = \left|\sum_{j=1}^{s} [u, \psi_j] \sum_{k=n+1}^{\infty} [\omega_j, \varphi_k]\varphi_k\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{s} |[u, \psi_j]| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} [\omega_j, \varphi_k]\varphi_k\right| \leq |u| \sum_{j=1}^{s} |\psi_j| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |[\omega_j, \varphi_k]|^2}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |[\omega_j, \varphi_k]|^2$ konvergiert. Daraus schließt man, daß der Koeffizient bei $|u|$ für hinreichend großes $n$, sagen wir für $n \geq N$, kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird. Daraus und aus den Beziehungen (7) und (8) folgt, daß für $n \geq N$ die Ungleichung $|(T - T_n)u| < \varepsilon|u|$ oder $|T - T_n| < \varepsilon$ gilt, was zu beweisen war.

Der Operator $T_n$ ist ausgeartet. Man sieht nämlich leicht, daß das Funktional $[Tu, \varphi_k]$ in $H_0$ beschränkt ist; nach Satz 1 des § 45 existiert ein Element $\varphi_k \in H_0$ derart, daß $[Tu, \varphi_k] = [u, \tilde{\varphi}_k]$ ist und

$$T_n u = \sum_{k=1}^{n} [u, \tilde{\varphi}_k]\varphi_k$$

gilt. Da der Operator $T_n$ ausgeartet ist, ist er auch vollstetig. Jetzt folgt aus Satz 1 des § 77, daß die Gleichung

$$u_n + T_n u_n = f'_n \tag{9}$$

bei hinreichend großem $n$ lösbar ist und zwar eindeutig, und daß

$$u_n \xrightarrow{E} u \tag{10}$$

gilt, wo $u$ die Lösung der Gleichung (6) ist.

Setzt man in (9) die Werte für $T_n$ und $f_n$ ein, so erhält man

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \{[f', \varphi_k] - [Tu_n, \varphi_k]\}\,\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k, \tag{11}$$

wo

$$A_k = [f', \varphi_k] - [Tu_n, \varphi_k]$$

ist. Substituiert man hier $u_n$ nach Formel (11), so erhält man ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $A_k$:

$$A_k + \sum_{m=1}^{n} [T\varphi_m, \varphi_m] A_m = [f', \varphi_k], \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$$

es ist identisch mit dem System (4). Daraus ergibt sich sofort, daß $u_n$ eine Näherungslösung der Gleichung (5) nach dem Verfahren von Bubnow-Galerkin ist; die Behauptung des Satzes 1 folgt jetzt aus der Beziehung (10).

**Satz 2.** *Wenn der Operator $K$ in $H$ beschränkt und $G = A_0^{-1}$ in $H$ vollstetig ist, dann ist der Operator $T = GK$ vollstetig in $H_0$.*

**Beweis.** Der Operator $T$ ist vollstetig in $H$ als Produkt eines beschränkten und eines vollstetigen Operators [Punkt 2, § 77]. Jetzt sei eine in $H_0$ beschränkte Menge $M$ gegeben: Es sei $|u| < C$, wenn $u \in M$ gilt. Nach Ungleichung (7) des § 6 ist $\|u\| < \frac{C}{\gamma}$; da $T$ in $H$ vollstetig ist, kann man eine Folge $\{u_n\}$ derart aus $M$ wählen, daß $\|Tu_m - Tu_n\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ gilt.

Wir schätzen $|Tu_n - Tu_m|$ ab. Nach Formel (4) des § 46 wird

$$|Tu_n - Tu_m|^2 = (A_0 T(u_n - u_m), T(u_n - u_m)) = \big(K(u_n - u_m), T(u_n - u_m)\big).$$

Nach der Ungleichung von Bunjakowski wird

$$|Tu_n - Tu_m|^2 \le \|K(u_n - u_m)\| \cdot \|T(u_n - u_m)\| = \|K(u_n - u_m)\| \cdot \|Tu_n - Tu_m\|.$$

Ferner ist

$$\|K(u_n - u_m)\| \le \|K\| \cdot \|u_n - u_m\| \le \|K\| (\|u_n\| + \|u_m\|) < \frac{2C\|K\|}{\gamma}$$

und schließlich

$$|Tu_n - Tu_m|^2 < \frac{2C\|K\|}{\gamma} \|Tu_n - Tu_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Nach Satz 1 des § 76 ist der Operator $T$ in $H_0$ vollstetig.

Wir setzen $K = E$ ($E$ ist der identische Operator) und ziehen die

**Folgerung.** *Wenn der Operator $G = A_0^{-1}$ vollstetig in $H$ ist, dann ist er auch vollstetig in $H_0$.*

Aus Satz 2 folgt ein wesentlich engeres, aber einfacheres Kriterium für die Konvergenz des Verfahrens von Bubnow-Galerkin, das wir wie folgt formulieren:

**Satz 3.** *Das Verfahren von* Bubnow-Galerkin *konvergiert, wenn*

I. *die Gleichung $Au = f$ nicht mehr als eine Lösung besitzt;*

II. *der Operator $G = A_0^{-1}$ vollstetig und der Operator $K$ beschränkt in $H$ ist.*

**Anmerkung.** Aus Satz 1 ergibt sich unmittelbar die Anwendbarkeit des Verfahrens von Bubnow-Galerkin auf Gleichungen der Form $u - \lambda Tu = f$, wo $T$ ein vollstetiger Operator in $H$ ist, insbesondere auf Integralgleichungen vom Fredholmschen Typ.

Die Bedingung II des Satzes 1 sei erfüllt. Wir betrachten die homogene Gleichung

$$A_0 u - \lambda K u = 0, \tag{12}$$

die der Gleichung

$$u - \lambda T u = 0 \tag{13}$$

äquivalent ist.

Durch die Wiederholung der Überlegungen zu Satz 1 kann man sich überzeugen, daß die Anwendung des Verfahrens von Bubnow-Galerkin auf das Problem der Bestimmung der Eigenwerte der Gleichung (12) dem Eigenwertproblem für die Gleichung

$$u_n - \lambda T_n u_n = 0 \tag{14}$$

gleichwertig ist. Nach Satz 2 des § 78 sind die Eigenwerte der Gleichung (13) die Grenzwerte der entsprechenden Eigenwerte der Gleichung (14). Daraus folgt

**Satz 4.** *Wenn der Operator $T = A_0^{-1} K$ in $H_0$ vollstetig ist, dann führt die Anwendung des Verfahrens von* Bubnow-Galerkin *auf das Problem der Eigenwertbestimmung zu einem konvergenten Prozeß.*

**Anmerkung 1.** $A$ sei ein positiv-definiter symmetrischer Operator mit diskretem Spektrum. Bei Anwendung auf das Eigenwertproblem für die Gleichung

$$A u - \lambda u = 0 \tag{15}$$

fallen die Verfahren von Bubnow-Galerkin und Ritz zusammen. Dann gilt nach Satz 4 jedoch $\lambda_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_k$, wenn $\lambda_k^{(n)}$ der Näherungswert nach Ritz für den $k$-ten Eigenwert $\lambda_k$ des Operators $A$ ist. Wir erinnern daran, daß diese Grenzwertgleichung in § 22 nur für den ersten Eigenwert $\lambda_1$ bewiesen worden ist.

**Anmerkung 2.** In Arbeiten von G. I. Petrow [1] und M. W. Keldysch [1] ist die Behauptung ausgesprochen, daß die Eigenelemente der Gleichung (12) als Grenzelemente der „angenäherten" Eigenelemente, die man nach dem Verfahren von Bubnow-Galerkin erhält, konstruiert werden können. Diese Behauptung ist, wie N. I. Polskij [1] zeigte, unrichtig; es kann vorkommen, daß man bei Anwendung des Verfahrens von Galerkin in keiner Weise ein bestimmtes Eigenelement der Gleichung (12) approximieren kann.

Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir ein Beispiel, das wir aus dem erwähnten Artikel von N. I. Polskij [1] entnommen haben. Wir betrachten den Raum $L_2(0,1)$; wir setzen in (12) $A_0 = E$ und

$$Ku = \int_0^1 K(x,t)\,u(t)\,dt = \int_0^1 \{a_1(x)\,b_1(t) + a_2(x)\,b_2(t)\}\,u(t)\,dt$$

mit $(0 < q < 1)$

$$a_1(x) = \sin \pi x, \qquad b_1(x) = 2 \sin \pi x + \frac{q^4 \sin 3\pi x}{\sqrt{1-q^2}} + \sum_{k=4}^{\infty} q^k \sin k\pi x,$$

$$a_2(x) = 2 \sin 2\pi x + \frac{q^4 \sin 3\pi x}{\sqrt{1-q^2}} - \sum_{k=4}^{\infty} q^k \sin k\pi x, \qquad b_2(x) = \sin 2\pi x.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind offensichtlich erfüllt; dabei ist $H_0 \equiv H$.

Unter Verwendung der leicht zu verifizierenden Beziehungen

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = 1, \qquad (a_1, b_2) = (a_2, b_1) = 0$$

findet man, daß die Gleichung

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) u(t)\, dt = 0 \tag{*}$$

den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$ hat, welchem zwei linear unabhängige Eigenfunktionen $a_1(x)$ und $a_2(x)$ entsprechen. Wir lösen jetzt die Gleichung (*) nach dem Verfahren von BUBNOW-GALERKIN, indem wir $u_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x)$, $\varphi_k(x) = \sqrt{2}$ sin $k\pi x$ setzen. Es sei $\lambda^{(n)}$ der zugehörige angenäherte, nach dem Verfahren von BUBNOW-GALERKIN gewonnene, Eigenwert. Wie man leicht feststellt, genügen $u_n$ und $\lambda^{(n)}$ der Gleichung

$$u_n(x) - \lambda^{(n)} \int_0^1 [a_1^{(n)}(x) b_1(t) + a_2^{(n)}(x) b_2(t)] u_n(t)\, dt = 0, \tag{**}$$

wo

$$a_1^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, (a_1, \varphi_k) = a_1(x),$$

$$a_2^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, (a_2, \varphi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_2(x)$$

gilt. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichung (**) den einzigen Eigenwert $\lambda_1^{(n)} = 1$ hat, dem nur eine Eigenfunktion $a_1^{(n)}(x) = a_1(x)$ entspricht. Demnach gibt in unserem Beispiel das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN nicht die Möglichkeit, die Eigenfunktion $a_2(x)$ der Gleichung (*) zu approximieren.

Wie N. I. POLSKIJ zeigte, können alle Eigenelemente als Grenzwerte „angenäherter“ Eigenelemente erhalten werden, wenn die Resolvente des Operators $A_0^{-1}K$ nur einfache Pole hat. Das gilt insbesondere, wenn $K = E$ ist, d. h. unter den Bedingungen des RITZschen Verfahrens.

## § 79. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen

In § 75 wurde die Konvergenz des Verfahrens von BUBNOW-GALERKIN für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung festgestellt; die allgemeinen Sätze des § 78 gestatten es, bedeutend allgemeinere Klassen von Gleichungen zu untersuchen. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$(-1)^m u^{(2m)} - \lambda K u = f(x), \tag{1}$$

wo $Ku$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung $2m - 1$ ist. Wir suchen eine

Lösung dieser Gleichung, die an den Enden des Intervalles $a \leq x \leq b$ den Randbedingungen

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = 0$$
$$u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0 \tag{2}$$

genügt.

Wir nehmen an, daß die von uns gestellte Aufgabe eine eindeutige Lösung hat. Wir zeigen, daß das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN bei dieser Aufgabe auf einen konvergenten Prozeß führt.

Wir setzen $A_0 u = (-1)^m u^{(2m)}$. Wie in § 20 gezeigt wurde, ist der Operator $A_0$ positiv-definit auf der Menge derjenigen Funktionen, die hinreichend oft differenzierbar sind und den Randbedingungen (2) genügen. Bekanntlich hat der Operator $G = A_0^{-1}$ die Form

$$Gf = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

wo $G(x, \xi)$ die GREENsche Funktion der Gleichung $u^{(2m)} = 0$ ist; diese Funktion genügt den Randbedingungen (2) und ist im Quadrat $a \leq x, \xi \leq b$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $2m - 2$ einschließlich stetig, während ihre Ableitungen der Ordnung $2m - 1$ nur auf der Diagonale $x = \xi$ unstetig sind, wo sie einen endlichen Sprung erfahren. Wir führen den Raum $H_0$ in die Betrachtung ein, in welchem für diesmal

$$[u, v] = \int_a^b (-1)^m u^{(2m)} v\, dx$$

gilt oder, wenn man $m$-mal partiell integriert und die Bedingungen (2) ausnutzt,

$$[u, v] = \int_a^b u^{(m)} v^{(m)}\, dx,$$

und demzufolge

$$|u|^2 = \int_a^b [u^{(m)}]^2\, dx. \tag{3}$$

Wir betrachten jetzt den Operator $Ku$. Wir nehmen an, daß die Koeffizienten des Operators $K$ hinreichend oft differenzierbar sind. Wir setzen $GKu = v(x)$. Offensichtlich genügt $v$ den Randbedingungen (2). Integrieren wir partiell und beseitigen dadurch die Ableitungen höherer als $m$-ter Ordnung von $u$, wobei wir wiederum die Bedingungen (2) ausnutzen, so können wir $v$ auf die Form

$$v(x) = \int_a^b G_1(x, \xi) u^{(m)}(\xi)\, d\xi + \int_a^b G(x, \xi) [p_{m-1}(\xi) u^{(m-1)}(\xi) + \cdots + p_0(\xi) u(\xi)]\, d\xi \tag{4}$$

bringen, wo der Kern $G_1(x, \xi)$ $m$ beschränkte Ableitungen hat.

Differenziert man (4) $m$-mal nach $x$, so erhält man

$$v^{(m)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^m G_1(x, \xi)}{\partial x^m} u^{(m)}(\xi)\, d\xi$$

$$+ \int_a^b \frac{\partial^m G(x, \xi)}{\partial x^m} [p_{m-1}(\xi)\, u^{(m-1)}(\xi) + \cdots + p_0(\xi) u(\xi)]\, d\xi. \tag{5}$$

Im Integral (5) drücken wir $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$ nach der bekannten Formel

$$u^{(j)}(\xi) = \frac{1}{(m-j-1)!} \int_a^\xi (\xi - \eta)^{m-j-1} u^{(m)}(\eta)\, d\eta \tag{6}$$

durch $u^{(m)}$ aus; diese Formel gilt, wenn $u$ den $m$ ersten Bedingungen (2) genügt. Setzt man (6) in (5) ein und ändert die Reihenfolge der Integrationen, so findet man, daß $v^{(m)}(x)$ die Form

$$v^{(m)}(x) = \int_a^b N(x, \xi) u^{(m)}(\xi)\, d\xi \tag{7}$$

hat, wo $N(x, \xi)$ eine stetige Funktion ist. Das Integral (7) ist der Fredholmsche Operator über der Funktion $u^{(m)}$; wie in § 76 gezeigt wurde, ist dieses Integral ein vollstetiger Operator über $u^{(m)}$, wobei $u^{(m)}$ als Element des Raumes $L_2(a, b)$ betrachtet wird. Jetzt sei eine in $H_0$ beschränkte Menge von Funktionen $u(x)$ gegeben. Das bedeutet, daß

$$|u|^2 = \int_a^b |u^{(m)}(x)|^2\, dx < C; \qquad C = \text{const}$$

gilt. Nach Satz 1 des § 76 kann man aus dieser Menge eine solche Folge $\{u_n(x)\}$ auswählen, daß

$$\| v_n^{(m)} - v_k^{(m)} \|^2 = \int_a^b | v_n^{(m)}(x) - v_k^{(m)}(x) |^2\, dx \xrightarrow[n, k \to \infty]{} 0$$

gilt. Aber dann folgt aus (3), daß $|v_n - v_k| \xrightarrow[n, k \to \infty]{} 0$ gilt. Daraus ist ersichtlich, daß der Operator auf der rechten Seite von (4) in $H_0$ vollstetig ist.

Auf Grund des Satzes 1 des § 78 liefert das Verfahren von Bubnow-Galerkin eine in $H_0$ konvergierende Folge. Wenn man mit $u_n$ eine nach dem Verfahren von Bubnow-Galerkin gewonnene Näherungslösung bezeichnet und mit $u$ die exakte Lösung des Problems, dann gilt für $k < m$ gleichmäßig $u_n^{(k)}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} u^{(k)}(x)$ und im Mittel $u_n^{(m)}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} u^{(m)}(x)$.

Satz 4 des § 78 erlaubt es, die Konvergenz des Verfahrens von Bubnow-Galerkin auch für das Eigenwertproblem der homogenen Gleichung (1) zu behaupten.

Die in diesem Paragraphen genannten Ergebnisse wurden auf wesentlich kompliziertere Weise von M. W. Keldysch [1] erhalten.

## § 80. Das DIRICHLETsche Problem für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Wir suchen in einem endlichen Gebiet $\Omega$ ein Integral der Gleichung mit im allgemeinen veränderlichen Koeffizienten

$$-\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f(P), \tag{1}$$

das auf dem Rand $S$ des Gebietes $\Omega$ verschwindet.

Wir nehmen an, daß die Gleichung (1) elliptisch und nicht ausgeartet ist; das bedeutet die Existenz einer solchen Konstanten $\mu_0$, daß für einen beliebigen Punkt $P \in \bar{\Omega}$ und beliebige reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ die Ungleichung

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} t_i t_k \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \tag{2}$$

gilt. Wir nehmen noch an, daß die Koeffizienten $A_{ik}$ zusammen mit ihren ersten Ableitungen stetig sind, und ebenso die Koeffizienten $B_j$ und $C$ in $\bar{\Omega}$[1]); von der Funktion $f(P)$ setzen wir voraus, daß sie eine endliche Norm hat. Schließlich nehmen wir an, daß die von uns gestellte Aufgabe eine eindeutige Lösung hat. Wir setzen

$$A_0 u = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right); \qquad Ku = \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu. \tag{3}$$

In § 24 wurde gezeigt, daß der Operator $A_0$ positiv-definit ist auf der Menge der Funktionen, die auf $S$ verschwinden; für solche Funktionen gilt die Ungleichung

$$(A_0 u, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \qquad \gamma > 0. \tag{4}$$

Wir führen jetzt den Raum $H_0$ ein, indem wir

$$[u, v] = (A_0 u, v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, d\Omega$$

setzen. In § 37 haben wir auseinandergesetzt, daß der Operator $A_0$ ein diskretes Spektrum hat. Nach Satz 2 des § 76 ist der Operator $G = A_0^{-1}$ vollstetig im Raum $L_2(\Omega)$ der in $\Omega$ quadratisch summierbaren Funktionen. Wir zeigen, daß der Operator $T = GK$ in $H_0$ vollstetig ist. Es sei eine in $H_0$ beschränkte Menge von Funktionen gegeben, so daß $|u| \leq N = \text{const}$ ist. Das bedeutet, daß

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\Omega < N^2 \tag{5}$$

[1]) Die Beschränkungen, denen die Koeffizienten unterworfen sind, lassen sich noch abschwächen.

gilt. Aus den Ungleichungen (2) und (5) folgt

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\,\Omega < \frac{N^2}{\mu_0}.$$

Außerdem ist infolge von Ungleichung (4)

$$\|u\| < \frac{N}{\gamma}.$$

Damit wird

$$\|Ku\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} B_i^2 \right\} + \|u\| \max |C(P)| \leq C_1 N. \tag{6}$$

Da $G$ in $H = L_2(\Omega)$ vollstetig und die Menge der Funktionen $Ku$, wie wir sehen, in $H$ beschränkt ist, kann man eine Folge $\{u_n\}$ derart auswählen, daß (im Raum $H$) der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} G K u_n = \lim_{n \to \infty} T u_n$$

existiert. Daraus folgt

$$\lim_{k, n \to \infty} \|T u_n - T u_k\| = 0. \tag{7}$$

Wir schätzen $|T u_n - T u_k|$ ab. Nach Formel (1) des § 8 gilt

$$|T u_n - T u_k|^2 = \big(A_0 T(u_n - u_k),\ T(u_n - u_k)\big) = (K u_n - K u_k, T u_n - T u_k),$$

und nach der Ungleichung von CAUCHY-BUNJAKOWSKI erhält man

$$|T u_n - T u_k|^2 \leq \|K u_n - K u_k\| \cdot \|T u_n - T u_k\| \leq 2 C_1 N \|T u_n - T u_k\|.$$

Infolge der Ungleichung (7) ist

$$\lim_{k, n \to \infty} |T u_n - T u_k| = 0. \tag{8}$$

Wenn also eine Menge von Funktionen in $H_0$ beschränkt ist, dann kann man aus ihr eine solche Folge $\{u_n\}$ auswählen, daß die Beziehung (8) gilt, was bedeutet, daß (im Raum $H_0$) der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} T u_n$$

existiert. Damit ist bewiesen, daß der Operator $T$ in $H_0$ vollstetig ist, und demzufolge konvergiert für unser Problem das Verfahren von BUBNOW-GALERKIN. Genauso beweist man dessen Konvergenz für das Eigenwertproblem.

Die Aufgabe des vorliegenden Paragraphen behandelte M. W. KELDYSCH [1], der auf bedeutend komplizierterem Wege und unter der zusätzlichen Annahme, daß der Rand des Gebietes hinreichend glatt ist, zu demselben Ergebnis kam.

**Anmerkung.** In § 78 stellten wir fest, daß im allgemeinen Falle $|u_n - u| \to 0$ gilt, wo $u_n$ eine nach dem Verfahren von BUBNOW-GALERKIN gebildete Näherungslösung ist. Im vorliegenden Falle bedeutet das, daß die ersten Ableitungen von $u_n$ im Mittel gegen die entsprechenden Ableitungen von $u$ konvergieren.

Unter gewissen Bedingungen läßt sich das Verfahren von Bubnow-Galerkin auch für ausgeartete elliptische Gleichungen rechtfertigen; diese Frage wird in dem Aufsatz des Verfassers [15] untersucht.

Zur Erläuterung des Verfahrens betrachten wir die Gleichung

$$\Delta u + x\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + xy - 2x - 2y.$$

Sie hat die Lösung

$$u = xy(x-1)(y-1),$$

die auf dem Rand des Quadrates

$$x = 0, \quad x = 1, \; y = 0, \; y = 1 \tag{9}$$

verschwindet.

Wir bilden nach dem Verfahren von Bubnow-Galerkin eine Näherung zu dieser Lösung, indem wir $\sin k\pi x \cdot \sin l\pi y$, $k, l = 1, 2, 3, \ldots$ als Koordinatenfunktionen wählen, die ebenfalls auf den Seiten des Quadrates (9) verschwinden. Wir beschränken uns auf die Glieder, für die $k + l \leq 4$ ist und setzen

$$u_6 = a_1 \sin\pi x \sin\pi y + a_2 \sin 2\pi x \sin\pi y + a_3 \sin\pi x \sin 2\pi y$$
$$+ a_4 \sin 3\pi x \sin\pi y + a_5 \sin 2\pi x \sin 2\pi y + a_6 \sin\pi x \sin 3\pi y.$$

Die Gleichungen des Verfahrens von Bubnow-Galerkin sind im gegebenen Falle die folgenden:

$$\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{8}\right) a_1 + \frac{1}{3} a_2 - \frac{3}{16} a_4 = \frac{4}{\pi^6}(9\pi^2 - 8),$$

$$-\frac{1}{3} a_1 + \left(\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{1}{8}\right) a_2 + \frac{3}{5} a_4 = -\frac{2}{\pi^4},$$

$$\left(\frac{5}{4}\pi^2 + \frac{1}{8}\right) a_3 + \frac{1}{3} a_5 = 0,$$

$$\frac{3}{16} a_1 - \frac{3}{5} a_2 + \left(\frac{5}{2}\pi^2 + \frac{1}{8}\right) a_4 = \frac{4}{27\pi^6}(49\pi^2 - 8),$$

$$-\frac{1}{3} a_3 + \left(2\pi^2 + \frac{1}{8}\right) a_5 = 0, \quad \left(\frac{5}{2}\pi^2 + \frac{1}{8}\right) a_6 = \frac{4}{27\pi^6}(41\pi^2 - 8).$$

Dieses System hat die Lösung

$$a_1 = 0{,}066553; \qquad a_2 = 0{,}000014499; \qquad a_3 = 0;$$
$$a_4 = 0{,}0024528; \qquad a_5 = 0; \qquad a_6 = 0{,}0024648.$$

Da uns die exakte Lösung des Problems bekannt ist, ist es nicht schwer, den Fehler der Näherungslösung abzuschätzen; die Norm bezüglich der Energie des Fehlers ist gleich

$$|u - u_6| = \left\{\int_0^1\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_6}{\partial y}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} dx\,dy = 0{,}00729.$$

Die entsprechende Norm der genauen Lösung ist

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 [(2x-1)^2(y-y^2)^2 + (x-x^2)^2(2y-1)^2]^2\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{45}} = 0{,}149.$$

Der relative Fehler (in der Norm bezüglich der Energie) der Näherungslösung $u_6$ beträgt

$$\frac{0{,}00729}{0{,}149} \approx 4{,}9\%.$$

## § 81. Das NEUMANNsche und das gemischte Problem für Gleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typ

Als NEUMANNsches Problem bezeichnen wir die Aufgabe, die Gleichung (1) des § 80 bei der Randbedingung

$$\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu,\, x_i) = 0, \tag{1}$$

wo $\nu$ die Außennormale zu $S$ ist, zu integrieren. Wir nehmen an, daß diese Aufgabe eine eindeutige Lösung hat.[1]) Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} A_0 u &= -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + u,\\ Ku &= \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + [C(P) - 1]\,u. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Der Operator $A_0 u$ ist positiv-definit auf dem Lineal der Funktionen, die der Bedingung (1) genügen und deren erste und zweite Ableitungen in $\bar{\Omega}$ stetig sind. Integriert man nämlich partiell und nutzt die Bedingung (1) aus, so erhält man

$$(A_0 u,\, u) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\Omega + \int_\Omega u^2\,d\Omega \geq \int_\Omega u^2\,d\Omega = \|u\|^2.$$

---

[1]) Dafür ist offensichtlich notwendig, daß $C(P) \not\equiv 0$ ist.

Die weiteren Überlegungen verlaufen ebenso wie in § 80 und führen zu denselben Schlüssen über die Konvergenz des Verfahrens von BUBNOW-GALERKIN. Man kann nämlich behaupten, daß die nach dem Verfahren von BUBNOW-GALERKIN gebildete Näherungslösung des NEUMANNschen Problems für die Gleichung

$$-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f$$

im Mittel gegen die exakte Lösung dieses Problems konvergiert, und daß ebenso die ersten Ableitungen der Näherungslösung im Mittel gegen die entsprechenden Ableitungen der exakten Lösung konvergieren. Weiter können die Eigenwerte des NEUMANNschen Problems für die Gleichung als Grenzwerte der „angenäherten Eigenwerte" gewonnen werden, die man nach dem Verfahren von BUBNOW-GALERKIN erhält.

Wir wenden uns dem gemischten Problem für die Gleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ zu. Wir betrachten die Gleichung (1) des § 80 bei der Randbedingung

$$\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_i)+\sigma(P)u=0, \tag{3}$$

wo $\sigma(P)$ eine beschränkte Funktion eines veränderlichen Punktes des Randes $S$ ist; den Rand setzen wir hier als hinreichend glatt voraus.

Wir bezeichnen mit $A_1 u$ den Operator

$$-\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

Wir betrachten ihn auf dem Lineal der Funktionen, die der Randbedingung (3) genügen und deren zweite Ableitungen in $\overline{\Omega}$ stetig sind. Wir zeigen, daß auf diesem Lineal der Operator $A_1 u$ nach unten beschränkt ist, d. h., daß eine Konstante $k$ existiert, für die die Ungleichung

$$(A_1 u, u)\geq k\|u\|^2 \tag{4}$$

gilt.[1]) Wir haben

$$(A_1 u, u) = -\int_{\Omega} u\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Omega$$

$$=\int_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\Omega-\int_{S}u\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_i)\,dS$$

oder, wenn man die Bedingung (3) ausnutzt,

$$(A_1 u, u)=\int_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{m}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\Omega+\int_{S}\sigma u^2 dS. \tag{5}$$

[1]) Die Konstante $k$ kann auch negativ sein.

Die Bedeutung von $\mu_0$ sei dieselbe wie in § 80. Ferner möge $\sigma_0$ die obere Grenze der Funktion $|\sigma(P)|$ bedeuten.

Aus (5) folgt

$$(A_1 u, u) \geq \mu_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \sigma_0 \int_S u^2 \, dS.$$

Wir konstruieren Funktionen $a_i(P)$, die in $\overline{\Omega}$ stetig sind und auf $S$ mit $\cos(\nu, x_i)$ zusammenfallen. Unter der Annahme, daß die Fläche $S$ hinreichend glatt ist, kann man erreichen, daß die ersten Ableitungen von $a_i(P)$ ebenfalls stetig in $\overline{\Omega}$ sind. Damit wird

$$\int_S u^2 \, dS = \int_S u^2 \sum_{i=1}^m \cos^2(\nu, x_i) \, dS = \int_S \sum_{i=1}^m u^2 a_i \cos(\nu, x_i) \, dS$$

$$= \int_\Omega u^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i} d\Omega + 2 \int_\Omega \sum_{i=1}^m a_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega. \tag{6}$$

Das erste Integral in (6) ist kleiner als

$$C' \int_\Omega u^2 \, d\Omega, \qquad C' = \max \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right|.$$

Das zweite schätzen wir folgendermaßen ab. Wir bezeichnen mit $C_1$ das größte der Maxima der Funktionen $a_i$ und mit $\varepsilon$ eine willkürliche positive Zahl. Dann wird[1])

$$\left| 2 \int_\Omega \sum_{i=1}^m a_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \right| < 2 C_1 \int_\Omega \frac{|u|}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| d\Omega$$

$$\leq \frac{C_1}{\varepsilon^2} \int_\Omega u^2 \, d\Omega + C_1 m \varepsilon^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega.$$

Daraus folgt

$$(A_1 u, u) \geq (\mu_0 - C_1 m \sigma_0 \varepsilon^2) \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega + k \int_\Omega u^2 \, d\Omega$$

mit

$$k = -\sigma_0 \left(C' + \frac{C_1}{\varepsilon_2}\right).$$

[1]) Wir benutzen hier die Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k\right)^2 \leq m \sum_{k=1}^m a_k^2, \qquad a_k \geq 0,$$

die man für $b_k = 1$ aus der CAUCHYschen Ungleichung $(8_2)$, § 3, erhält.

Wir wählen $\varepsilon$ so, daß $\mu_0 - C_1\sigma_0\varepsilon^2 > 0$ wird. Unterdrückt man in der letzten Ungleichung rechts den nicht negativen ersten Summanden, so erhält man die Ungleichung (4).

Den Operator $A_0$ definieren wir wie folgt:

$$A_0 u = A_1 u, \qquad k > 0,$$

$$A_0 u = A_1 u + (1 - k) u, \qquad k \leq 0,$$

wo $k$ die in Ungleichung (4) auftretende Konstante ist.

Bei dieser Wahl ist der Operator $A_0 u$ offensichtlich positiv-definit. Die weiteren Überlegungen verlaufen ebenso wie in § 80 und führen zu denselben Ergebnissen.

Im Spezielfall $m = 1$ erhalten wir die Aufgabe der Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bei Randbedingungen der Form

$$u'(a) + \alpha u(a) = 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0$$

($\alpha$, $\beta$ sind Konstanten).

## § 82. Modifikation des Verfahrens von Bubnow-Galerkin für den Fall natürlicher Randbedingungen

In § 77 wurde eine Forderung formuliert, die die Wahl der Koordinatenelemente einschränkte und darin bestand, daß diese Elemente zum Definitionsbereich des Operators gehören mußten.Man kann eine einfache hinreichende Bedingung angeben, die es gestattet, die genannte Forderung abzuschwächen. Diese Bedingung lautet: *Der Operator $K$ sei auf allen Elementen des Raumes $H_0$ definiert. Dann kann man als System von Koordinatenfunktionen ein beliebiges in $H_0$ vollständiges System von Elementen dieses Raumes wählen*; das System der Gleichungen von Bubnow-Galerkin ist dann nicht in der Form (3) des § 78 zu schreiben, was jetzt sinnlos wäre, sondern in der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \{[\varphi_k, \varphi_m] + (K\varphi_k, \varphi_m)\} a_k = (f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Von der Richtigkeit der hier gemachten Aussage kann man sich leicht überzeugen, indem man den Beweisgang des Satzes 1 des § 78 verfolgt.

Als Beispiel wählen wir die in § 81 betrachtete Randwertaufgabe für die Gleichung

$$-\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f(P) \tag{2}$$

bei der Randbedingung vom gemischten Typ

$$\left[\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_i) + \sigma u\right]_S = 0; \tag{3}$$

die in § 81 gegebene Definition der Operatoren $A_0$ und $K$ behalten wir bei.

Z. B. sei in der Ungleichung (4) des § 81 die Konstante $k > 0$; dann wird

$$A_0 u = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \qquad Ku = \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu.$$

Für den Operator $A_0$ ist die Randbedingung (3) natürlich; der Raum $H_0$ besteht aus allen Funktionen, die in $\Omega$ quadratisch summierbare erste (verallgemeinerte) Ableitungen besitzen, und der Operator $K$ ist offensichtlich auf allen Funktionen aus $H_0$ definiert. Deshalb braucht man zur Anwendung des Verfahrens von BUBNOW-GALERKIN auf unser Problem die Koordinatenfunktionen keinerlei Randbedingungen zu unterwerfen.

Es ist leicht zu sehen, daß im vorliegenden Falle

$$[u, v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\, d\Omega + \int\limits_{S} \sigma u v\, dS$$

gilt, deshalb haben die Gleichungen (1) des modifizierten Verfahrens von BUBNOW-GALERKIN folgende Gestalt:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{m}\left(A_{ij}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\varphi_m + C\varphi_k\varphi_m\right) d\Omega \right.$$
$$\left. + \int\limits_{S} \sigma\varphi_k\varphi_m\, dS\right\} a_k = \int\limits_{\Omega} f\varphi_m\, d\Omega, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

KAPITEL X

# DIE METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE[1])

## § 83. Grundlagen des Verfahrens

$A$ sei ein linearer Operator, der auf einem im gegebenen HILBERT-Raum $H$ dichten Lineal $D_A$ definiert ist, und es werde gefordert, die Gleichung

$$Au = f \tag{1}$$

zu lösen, wo $f$ ein gegebenes Element aus $H$ ist. Dazu kann die *Methode der kleinsten Quadrate* verwendet werden, die in folgendem besteht: Wir wählen eine Folge linear unabhängiger Koordinatenelemente $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D_A$ und bilden eine angenäherte Lösung der Gleichung (1) in der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\,, \tag{2}$$

wo $a_k$ Konstanten sind, die aus der Forderung bestimmt werden, daß die Größe

$$\|Au_n - f\|^2 \tag{3}$$

einen minimalen Wert annimmt.

Bezüglich der Terminologie setzen wir folgendes voraus: Eine Folge $\{\varphi_n\}$ nennen wir *A-vollständig*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Zu jedem Element $u \in D_A$ und zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ kann man eine natürliche Zahl $n$ und Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ derart finden, daß

$$\|Au - Au_n\| < \varepsilon$$

gilt, wo

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

ist.

Wir bemerken, daß die $A$-Vollständigkeit aus der gewöhnlichen folgt, wenn der Operator $A$ beschränkt ist. Wenn nämlich das System $\{\varphi_n\}$ vollständig und der Operator $A$ beschränkt ist, dann kann man $n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ so wählen, daß $\|u - u_n\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ ist, und dann wird

$$\|Au - Au_n\| = \|A(u - u_n)\| \leq \|A\| \cdot \|u - u_n\| < \varepsilon.$$

---

[1]) In diesem Kapitel werden hauptsächlich vom Verfasser (siehe [3, 6]) gefundene Ergebnisse dargelegt.

Die Bedingung (3) führt auf ein System linearer Gleichungen für die Unbekannten $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wir ermitteln die Form dieses Systems. Wir haben[1])

$$\|A u_n - f\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A \varphi_k - f, \ \sum_{m=1}^{n} a_m A \varphi_m - f\right)$$
$$= \sum_{k,m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A\varphi_k, A\varphi_m) - \sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, f) - \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k (f, A\varphi_k) + (f, f). \qquad (4)$$

Wir setzen $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Die Werte $\alpha_k$ und $\beta_k$, die das Minimum der Größe $\|A u_n - f\|^2$ liefern, genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial \|A u_n - f\|^2}{\partial \alpha_m} = 0, \qquad \frac{\partial \|A u_n - f\|^2}{\partial \beta_m} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n$$

oder, was dasselbe ist, den Gleichungen

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \|A u_n - f\|^2}{\partial \alpha_m} + i\,\frac{\partial \|A u_n - f\|^2}{\partial \beta_m}\right\} = \frac{\partial \|A u_n - f\|^2}{\partial \bar{a}_m} = 0.$$

Differenziert man (4) nach $\bar{a}_m$, so erhält man das uns interessierende System

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A\varphi_k, A\varphi_m) = (f, A\varphi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Wir weisen darauf hin, daß das System (5) symmetrisch ist. Die Determinante des Systems (5) ist die GRAMsche Determinante der Elemente $A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n$.

Wir nehmen an, daß die Gleichung (1) nicht mehr als eine Lösung haben kann, anders ausgedrückt, daß die homogene Gleichung $Au = 0$ nur die triviale Lösung $u = 0$ hat. Dann sind $A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n$ linear unabhängig[2]); nach Satz 2 des § 11 ist die Determinante des Systems (5) von Null verschieden und dieses System ist eindeutig lösbar. Das gewonnene Ergebnis formulieren wir in der Form eines Lemmas.

**Lemma 1.** *Wenn die homogene Gleichung $Au = 0$ nur die triviale Lösung besitzt*[3]), *dann können Näherungslösungen nach der Methode der kleinsten Quadrate bei beliebigem $n$ gebildet werden, und diese Näherungen sind eindeutig bestimmt.*

---

[1]) Den HILBERT-Raum $H$ nehmen wir im allgemeinen als komplex an.

[2]) Andernfalls könnte man Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ finden, die nicht sämtlich gleich Null sind, so daß

$$c_1 A\varphi_1 + c_2 A\varphi_2 + \cdots + c_n A\varphi_n = A\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = 0$$

gilt. Dann wäre

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = 0$$

entgegen der anfangs vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Koordinatenelemente.

[3]) Anders ausgedrückt, wenn der inverse Operator $A^{-1}$ existiert.

Hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der aus dem Verfahren der kleinsten Quadrate erhaltenen Näherungslösungen werden durch das folgende Lemma gegeben.

**Lemma 2.** *Die Methode der kleinsten Quadrate liefert eine Folge von Näherungslösungen, die gegen die exakte Lösung konvergiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

A. *Die Folge der Koordinatenelemente ist $A$-vollständig.*

B. *Die Gleichung* (1) *ist lösbar.*

C. *Es existiert eine Konstante $K$ derart, daß für beliebiges $u \in D_A$*

$$\|u\| \leq K \|Au\| \tag{6}$$

*gilt.*

Die Bedingung $C$ sichert die Existenz (und die Beschränktheit) des inversen Operators $A^{-1}$. Nach Lemma 1 kann die Folge der Näherungslösungen $\{u_n\}$ konstruiert werden. Wir bezeichnen mit $u$ die Lösung der Gleichung (1), die infolge der Bedingung B existiert. Da die Folge $\{\varphi_n\}$ $A$-vollständig ist (Bedingung A), kann man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ Zahlen $n_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_0}$ derart finden, daß

$$\left\| Au - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k A \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{K}$$

wird.

Die letzte Ungleichung bleibt richtig, wenn man $\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k$ durch das nach (5) bestimmte $u_n$ ersetzt, da dann die linke Seite dieser Ungleichung ihr Minimum annimmt. Mit Vergrößerung von $n_0$ wächst dieses Minimum nicht, so daß bei $n \geq n_0$

$$\|Au - Au_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$$

gilt. Jetzt folgt aus Bedingung C, daß $\|u - u_n\| < \varepsilon$ ist, wenn $n \geq n_0$ ist, d. h. daß $u_n \to u$ gilt.

Wir nehmen an, daß die Bedingungen des Lemmas 2 erfüllt sind; $u_n$ sei eine Näherungslösung der Gleichung $Au = f$. Die Ungleichung (6) liefert eine einfache Abschätzung des Fehlers $u_n - u$, nämlich

$$\|u_n - u\| \leq K \|A(u_n - u)\| = K \|Au_n - Au\|$$

oder

$$\|u_n - u\| \leq K \|Au_n - f\|. \tag{7}$$

Wenn $u_n$ nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden wurde, dann gilt $Au_n \to f$ für $n \to \infty$, und Formel (7) gestattet es tatsächlich, den Fehler der Näherungslösung zu beurteilen.

**Anmerkung.** In den Anwendungen erweist sich manchmal eine etwas andere Formulierung des Verfahrens der kleinsten Quadrate als geeigneter, eine Formulierung, die im wesentlichen der obengenannten äquivalent ist.

Die Aufgabe sei gestellt, eine oder mehrere Funktionen einer gewissen Zahl unabhängiger Veränderlicher zu bestimmen, wobei diese Funktionen, die wir mit $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bezeichnen, zwei Systemen linearer Gleichungen genügen mögen: dem homogenen System

$$K_j(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{*}$$

und dem inhomogenen

$$G_j(u_1, u_2, \ldots, u_m) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Wir fassen die Systeme $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ als Elemente $u$ und $b$ eines HILBERT-Raumes $H$ auf. Dann kann man die Systeme der Operatoren $K_j$ und $G_j$ als Operatoren $K$ und $G$ in demselben Raum auffassen.

Wie der Raum $H$ gewählt wird, bleibt weitgehend willkürlich; diese Willkür kann man ausnutzen, um die Rechnungen zu vereinfachen oder um genauere Resultate zu gewinnen.

Die Methode der kleinsten Quadrate besteht in folgendem:

a) Wir bilden eine Folge $\{\varphi^{(k)}\} = \{\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \ldots, \varphi_m^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$ von Funktionen, die dem homogenen System (*) genügen;

b) wir bilden eine Näherungslösung des Problems in der Form

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi^{(k)}$$

oder genauer

$$u_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_j^{(k)}$$

wo $a_k$ Konstanten sind. Diese Konstanten bestimmen wir aus der Bedingung

$$\| G u^{(n)} - b \|^2 = \min$$

oder, was dasselbe ist, aus dem System linearer algebraischer Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk} a_k = (b, G\varphi^{(j)}) \quad \text{mit} \quad A_{jk} = (G\varphi^{(k)}, G\varphi^{(j)}).$$

Zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und der energetischen Methode besteht ein enger Zusammenhang, den wir zu ermitteln trachten.

Auf beiden Seiten der Gleichung (1) wenden wir den zu $A$ adjungierten[1]) Operator $A^*$ an. Wir zeigen, daß *die auf diese Weise gewonnene Gleichung*

$$A^* A u = A^* f \tag{8}$$

[1]) Der zu einem gegebenen Operator $A$ adjungierte Operator $A^*$ ist durch die Identität

$$(Au, v) = (u, A^* v)$$

definiert. Näheres über die Eigenschaften des adjungierten Operators siehe z. B. bei W. I. SMIRNOW [5].

*der Gleichung* (1) *äquivalent ist, wenn letztere lösbar ist.*[1]) Möge $u'$ der Gleichung (1) genügen. $u'$ genügt offensichtlich auch der Gleichung (8), so daß

$$A^* A u' = A^* f \tag{9}$$

gilt. Möge derselben Gleichung (8) noch ein gewisses Element $u''$ genügen, so daß die Identität

$$A^* A u'' = A^* f \tag{10}$$

gilt. Wir zeigen, daß $u''$ der Gleichung (1) genügt. Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen. Wir setzen $u'' - u' = v$. Wenn wir (9) von (10) subtrahieren, finden wir $A^* A v = 0$. Wir multiplizieren das skalar mit $v$:

$$0 = (A^* A v, v) = (A v, A v) = \| A v \|^2.$$

Daraus ergibt sich $A v = A(u'' - u') = 0$ oder $A u'' = A u' = f$, was zu beweisen war.

Es ist ferner nicht schwer zu sehen, daß *bei Erfüllung der Bedingung* C *des Lemmas* 2 *der Operator* $A^* A u$ *positiv-definit ist.* Es ist nämlich

$$(A^* A u, u) = (Au, Au) = \| A u \|^2 \geq \frac{1}{K^2} \| u \|^2.$$

Wir nehmen an, daß der Definitionsbereich des Operators $A^* A$ in $H$ dicht ist. Wir setzen voraus, daß die Bedingungen B und C des Lemmas 2 erfüllt sind. Da die Gleichung (1) lösbar ist (Bedingung B), so ist sie nach dem Bewiesenen der Gleichung (8) äquivalent, und man kann die Lösung dieser letzteren suchen. Infolge der Bedingung C ist der Operator $A^* A$ positiv-definit; nach Satz 1 des § 9 ist die Bestimmung der Lösung der Gleichung (8) dem Minimalproblem für das Funktional $\Phi(u) = (A^* A u, u) - (u, A^* f) - (A^* f, u)$ äquivalent. Nun ist offensichtlich

$$\Phi(u) = (A u, A u) - (A u, f) - (f, A u) = (A u - f, A u - f) - (f, f)$$

oder

$$\Phi(u) = \| A u - f \|^2 - \| f \|^2.$$

Die Funktionale $\Phi(u)$ und $\| A u - f \|^2$ unterscheiden sich um einen konstanten Summanden, und die Minimalprobleme für die beiden Funktionale sind äquivalent. Demnach ist *unter den Bedingungen des Lemmas* 2 *die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Gleichung* (1) *gleichbedeutend mit der Anwendung der energetischen Methode auf die Gleichung* (8).

Umgekehrt sei der Operator $A$ positiv-definit:

$$(A u, u) \geq \gamma^2 \| u \|^2, \qquad \gamma > 0.$$

Auf Gleichung (1) kann man die energetische Methode anwenden, indem man, statt diese Gleichung zu lösen, das Minimum des Funktionals

$$F(u) = (A u, u) - (u, f) - (f, u)$$

---

[1]) Siehe den Artikel [2] des Verfassers. Wir setzen voraus, daß $f$ im Definitionsbereich des Operators $A^*$ liegt.

bestimmt. Wir konstruieren einen positiv definiten Operator $B$, dessen Quadrat gleich $A$ ist, $B^2 = A$.[1]) Der Operator $B^{-1}$ existiert und ist beschränkt. Die Gleichung (1) ist der Gleichung

$$Bu = B^{-1}f \tag{11}$$

äquivalent, die aus Gleichung (1) durch Anwendung des Operators $B^{-1}$ entsteht. Weiter gilt

$$\begin{aligned} F(u) &= (B^2u, u) - (u, BB^{-1}f) - (BB^{-1}f, u) \\ &= (Bu, Bu) - (Bu, B^{-1}f) - (B^{-1}f, Bu) \\ &= (Bu - B^{-1}f, Bu - B^{-1}f) - (B^{-1}f, B^{-1}f) \end{aligned}$$

oder

$$F(u) = \|Bu - B^{-1}f\|^2 - \|B^{-1}f\|^2.$$

Die Funktionale $F(u)$ und $\|Bu - B^{-1}f\|^2$ unterscheiden sich nur um einen konstanten Summanden und die Minimalprobleme für diese Funktionale sind äquivalent. Daraus folgt, daß *für den Fall eines positiv-definiten Operators $A$ die Anwendung der energetischen Methode auf die Gleichung* (1) *gleichbedeutend mit der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Gleichung* (10) *ist.*

Wenn der Operator $A$ positiv-definit ist und $u_n$ eine nach dem Ritzschen Verfahren gebildete Näherungslösung der Gleichung $Au = f$ ist, dann gilt $\|Bu_n - B^{-1}f\| \to 0$, wo $B^2 = A$ ist. Das folgt sofort aus der eben erst bewiesenen Äquivalenz der beiden Verfahren und aus dem Beweisgang des Lemmas 2. Wir weisen nochmals darauf hin, daß die Beziehung $\|Au_n - f\| \to 0$ im allgemeinen nicht gilt, wenn $u_n$ nach dem Ritzschen Verfahren gebildet worden ist.

Noch einmal setzen wir voraus, daß der Operator $Au$ positiv-definit ist. Wir erinnern daran (§ 46), daß die Lösung der Gleichung (1) in diesem Falle der Bestimmung des Minimums des Funktionals

$$F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u)$$

äquivalent ist. Wenn man einen Hilbert-Raum $H_0$ (siehe § 46) mit dem Skalarprodukt

$$[u, v] = (Au, v)$$

einführt, dann wird, wie wir gesehen haben,

$$F(u) = |u - u_0|^2 - |u_0|^2,$$

wo $u_0$ die Lösung der Gleichung (1) ist. Jetzt sei $u_n$ die nach der Methode der kleinsten Quadrate gebildete Lösung. Es ist leicht zu sehen, daß *die Folge* $\{u_n\}$

---

[1]) Die Konstruktion des Operators $B$ ist im allgemeinen nicht elementar und erfordert die Anwendung der Spektraltheorie der Operatoren (siehe z. B. W. I. Smirnow [5]). Der Operator $B$ läßt sich verhältnismäßig einfach bilden, wenn das Spektrum des Operators $A$ diskret ist: Bezeichnet man die Eigenwerte und Eigenelemente des Operators $A$ mit $\lambda_n$ und $\varphi_n$, so hat man

$$Bu = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}(u, \varphi_n)\varphi_n.$$

*gleichfalls in der Metrik von* $H_0$ gegen $u_0$ konvergiert.[1]) Es gilt nämlich

$$|u_n - u_0|^2 = (A u_n - A u_0, u_n - u_0) = (A u_n - f, u_n - u_0).$$

Nach der Ungleichung von CAUCHY—BUNJAKOWSKI ist

$$|u_n - u_0|^2 \leq \| A u_n - f \| \| u_n - u_0 \|.$$

Weiter gilt nach Ungleichung (6)

$$\| u_n - u_0 \| \leq K \| A u_n - A u_0 \| = K \| A u_n - f \|$$

und demzufolge

$$|u_n - u_0|^2 \leq K \| A u_n - f \|^2, \tag{12}$$

woraus

$$|u_n - u_0|^2 \to 0$$

folgt.

Formel (12) gestattet es offensichtlich, den Fehler der Näherungslösung abzuschätzen, die man mit der Methode der kleinsten Quadrate erhält. Die Größe $\| A u_n - f \|^2$ kann folgendermaßen berechnet werden: Es gilt

$$\| A u_n - f \|^2 = (A u_n - f,\ A u_n - f) = \left( \sum_{k=1}^{n} a_k A \varphi_k - f,\ \sum_{m=1}^{n} a_m A \varphi_m - f \right)$$

$$= \sum_{k,m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A \varphi_k, A \varphi_m) - \sum_{k=1}^{n} a_k (A \varphi_k, f) - \sum_{m=1}^{n} \bar{a}_m (f, A \varphi_m) + (f, f). \tag{13}$$

Die Koeffizienten $a_k$ genügen dem System (5)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (A \varphi_k, A \varphi_m) = (f, A \varphi_m).$$

Multipliziert man mit $\bar{a}_m$ und summiert über $m$, so erhält man

$$\sum_{k,m=1}^{n} a_k \bar{a}_m (A \varphi_k, A \varphi_m) = \sum_{m=1}^{n} \bar{a}_m (f, A \varphi_m).$$

Setzt man das in (13) ein, so ergibt sich

$$\| A u_n - f \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k (A \varphi_k, f) = \| f \|^2 - \left( \sum_{k=1}^{n} a_k A \varphi_k,\ f \right) = \| f \|^2 - (A u_n f). \tag{14}$$

Der Fehler der nach der Methode der kleinsten Quadrate gebildeten Näherungslösung wird durch folgende Ungleichungen abgeschätzt[2]):

$$\| u_n - u_0 \|^2 \leq K^2 \{ \| f \|^2 - (A u_n, f) \}, \tag{15}$$

$$| u_n - u_0 |^2 \leq K \{ \| f \|^2 - (A u_n, f) \}. \tag{16}$$

---

[1]) Anders ausgedrückt, die Folge $[u_n]$ ist eine Minimalfolge für das Funktional $F(u)$.

[2]) Wir erinnern daran, daß $u_0$ die Lösung der Gleichung (1) bedeutet. Formel (16) gilt nur für einen positiv-definiten Operator $A$.

Es muß bemerkt werden, daß in der Metrik des Raumes $H_0$ die Methode der kleinsten Quadrate langsamer konvergiert als das Ritzsche Verfahren. Gehen wir etwa von ein und denselben Koordinatenelementen $\{\varphi_n\}$ aus. Es sei

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k,$$

wo die Koeffizienten $a_k$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden, die Koeffizienten $b_k$ jedoch nach dem Ritzschen Verfahren. Dann gilt nach der Definition des Ritzschen Verfahrens

$$F(u_n) \geq F(v_n) \qquad \text{oder} \qquad |u_n - u_0| \geq |v_n - u_0|.$$

Letztere Ungleichung zeigt die langsamere Konvergenz der Folge $\{u_n\}$ im Vergleich mit der Folge $\{v_n\}$. Der Vorteil der Methode der kleinsten Quadrate besteht lediglich darin, daß die Folge $\{u_n\}$ auch in solchen Fällen gleichmäßig konvergieren kann (manchmal zusammen mit bestimmten Ableitungen), wo dies von der Folge $\{v_n\}$ nicht behauptet werden kann.

## § 84. Anwendung auf Integralgleichungen

Die Methode der kleinsten Quadrate erweist sich als nützlich bei der Anwendung auf eine gewisse Klasse linearer Gleichungen im Hilbert-Raum. $A$ sei ein linearer beschränkter Operator im Hilbert-Raum $H$, und es sei bekannt, daß der inverse Operator $A^{-1}$ existiert und beschränkt ist. Wir betrachten die Gleichung

$$Au = f,$$

wo $u$ das gesuchte, $f$ ein gegebenes Element des Raumes ist. Der Methode der kleinsten Quadrate folgend, wählen wir eine in $H$ vollständige Folge $\{\varphi_n\}$ linear unabhängiger Elemente und suchen eine Näherungslösung der Gleichung (1) in der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k. \tag{*}$$

Wir prüfen die Erfüllung der Bedingungen A bis C aus Lemma 2 des § 83. Die Bedingung A ergibt sich daraus, daß die Folge $\{\varphi_n\}$ in $H$ vollständig und der Operator $A$ beschränkt ist; die Bedingungen B und C folgen aus der Beschränktheit des Operators $A^{-1}$. Auf Grund von Lemma 2 des § 83 gilt $u_n \to u$, wo $u$ die Lösung der Gleichung (1) ist.

Möge jetzt der Operator $A$ keinen inversen Operator besitzen, aber ein beschränkter regularisierender Operator $M$ existieren, d. h. ein solcher Operator, daß $MA = E + T$ ist, wo $E$ der Einheitsoperator und $T$ ein vollstetiger Operator ist. Dann ist für die Lösbarkeit der Gleichung (1) notwendig und hinreichend, daß $f$ orthogonal zu allen Lösungen der homogenen adjungierten Gleichung[1] $A^*u = 0$ ist. Wenn man ferner mit $H_1^*$ das Lineal der Elemente aus $H$ bezeichnet, die orthogonal zu allen Lösungen der Gleichung $A^*u = 0$ sind, und ebenso mit $H_1$ das

[1]) Siehe den Artikel [5] des Verfassers.

Lineal derjenigen Elemente[1]), die orthogonal zu allen Lösungen der Gleichung $Au = 0$ sind, und wenn man den Operator $A$ nur auf $H_1$ betrachtet, dann existiert der inverse Operator $A^{-1}$ und ist beschränkt[2]) in $H_1^*$. Unser Verfahren der angenäherten Lösung kann auch dann angewendet werden, wenn die homogene Gleichung $Au = 0$ nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}$ besitzt und wenn diese Lösungen bekannt sind. Unter der Voraussetzung, daß $f \in H_1^*$ ist, suchen wir die Näherungslösung in $H_1$; dazu genügt es, sie in der Form (*) darzustellen, wobei jedoch die Koeffizienten den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, u^{(j)}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

zu unterwerfen sind.

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man einige der Koeffizienten $a_k$ eliminieren; die verbleibenden bestimmen wir aus der Bedingung $\|Au_n - f\|^2 = \min$, was auf ein System der Form (5), § 83 führt.

Das hier dargestellte Näherungsverfahren ist offensichtlich auf Integralgleichungen vom FREDHOLMschen Typ anwendbar[3]), deren Kern der Bedingung

$$\int_\Omega \int_\Omega |K^2(P, Q)| \, d\Omega_P \, d\Omega_Q < \infty$$

genügt und ebenfalls auf singuläre Integralgleichungen (worin das Integral im Sinne des CAUCHYschen Hauptwertes zu verstehen ist), wenn das Integral über eine glatt geschlossene Kurve erstreckt wird. Ein derartiger singulärer Operator ist nämlich beschränkt im HILBERT-Raum der quadratisch summierbaren Funktionen und besitzt einen beschränkten regularisierenden Operator.[4])

Bei Anwendung auf Integralgleichungen kann man das Verfahren in bestimmten Fällen so abändern, daß die Konvergenz gleichmäßig wird.

Die FREDHOLMsche Gleichung

$$Au = u(P) - \int_\Omega K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q = f(P) \tag{2}$$

sei gegeben, wo $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $Q(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ Punkte im $m$-dimensionalen Gebiet $\Omega$ sind. Es sei $f(P)$ nach allen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $\left(\left[\frac{m}{2}\right] + 1\right)$-mal differenzierbar und die Struktur der Gleichung sei derart, daß die Lösung $u(P)$ ebenfalls $\left(\left[\frac{m}{2}\right] + 1\right)$-mal differenzierbar ist; schließlich möge der Operator auf der linken Seite von (2) eine hinreichend oft differenzierbare Funktion in eine

[1]) Man kann sich leicht überzeugen, daß $H_1$ und $H_1^*$ vollständige (im Sinne des § 43) HILBERT-Räume sind.

[2]) Siehe den Artikel [5] des Verfassers.

[3]) Die Methode der kleinsten Quadrate wandte M. KRAWTSCHUK auf Gleichungen vom FREDHOLMschen Typ an; siehe z. B. M. KRAWTSCHUK [2].

[4]) Den Beweis dieser Aussagen kann man in dem Artikel [5] des Verfassers finden.

$\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)$-mal differenzierbare überführen. Für $\varphi_k(P)$ wählen wir eine Folge von hinreichend oft differenzierbaren Funktionen, z. B. Polynome und setzen wie vorher $u_n(P)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(P)$, jedoch bestimmen wir die Koeffizienten $a_k$ aus der Bedingung[1])

$$\|A u_n - f\|^2 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} \sum_{j_1+\cdots+j_m=k} \left\| \frac{\partial^k (A u_n - f)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} \right\|^2 = \min. \tag{3}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Lösung der Gleichung (2) existiert, ergibt sich daher leicht

$$\|A u_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \left\| \frac{\partial^k (A u_n - f)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right] + 1.$$

Nach einem bekannten Satz von S. L. Sobolew [2] über die Einbettung von Räumen gilt in $\Omega$ gleichmäßig $A u_n \to f$. Wir setzen noch

$$\int_{\Omega} |K^2(P, Q)|\, d\Omega_Q < C^2, \; C = \text{const}$$

voraus.

Wenn gesetzt wird $A u_n = f_n$, dann wird

$$u(P) - u_n(P) = \int_{\Omega} K(P, Q)\, [u(Q) - u_n(Q)]\, d\Omega_Q + f(P) - f_n(P),$$

woraus infolge der Ungleichung von Cauchy-Bunjakowski

$$|u(P) - u_n(P)| < C\, \|u - u_n\| + |f(P) - f_n(P)|$$

folgt. Nach dem oben (siehe § 83) Bewiesenen folgt aus $\|A u_n - f\| \to 0$, daß $\|u - u_n\| \to 0$ gilt, und aus der letzten Ungleichung ist ersichtlich, daß $u_n(P) \to u(P)$ gleichmäßig in $\Omega$ gilt. Führt man in die linke Seite von (3) Ableitungen höherer Ordnung ein, so kann man unter bestimmten Bedingungen auch die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen erreichen.

## § 85. Anwendung auf Randwertprobleme mit homogenen Randbedingungen

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde auf Probleme dieser Art wiederholt in Arbeiten von N. M. Krylow und seinen Schülern angewendet. Die diesbezüglichen Fragen sind ausführlich in der Monographie von M. Krawtschuk [1]

[1]) Die Norm definieren wir in üblicher Weise: $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(P)|^2\, d\Omega$.

dargestellt, auf die wir den Leser verweisen; dort findet sich auch ein ausführliches Verzeichnis der Arbeiten aus der Schule von N. M. KRYLOW über die Methode der kleinsten Quadrate und das sogenannte „Momentenverfahren“. Im vorliegenden Paragraphen zeigen wir am Beispiel der POISSONschen Gleichung die Besonderheiten der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf Probleme des genannten Typus.

Es werde also die Integration der POISSONschen Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

in einem Gebiet $\Omega$ bei der Randbedingung

$$u\,|_S = 0 \tag{2}$$

gefordert. Den Rand $S$ setzen wir als hinreichend glatt voraus.

Wir wählen eine Folge von Koordinatenfunktionen $\{\varphi_n(x, y)\}$, die in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ hinreichend oft stetig differenzierbar sind und die Bedingung (2) erfüllen. Wie gewöhnlich suchen wir eine Näherungslösung in der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

und bestimmen die Koeffizienten $a_k$ aus der Bedingung[1])

$$\int_\Omega [\Delta u_n - f]^2 \, d\Omega = \min.$$

Wie im allgemeinen Falle (siehe § 83) kann man leicht zeigen, daß

$$\|\Delta u_n - f\|^2 = \int_\Omega [\Delta u_n - f]^2 \, d\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

gilt. Wir bezeichnen mit $G(x, y; \xi, \eta)$ die GREENsche Funktion unseres Problems. Da $u\,|_S = u_n|_S = 0$ ist, gilt dann

$$\begin{aligned} u(x, y) - u_n(x, y) &= \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u - \Delta u_n)\, d\xi\, d\eta \\ &= \int_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(f - \Delta u_n)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Auf das letzte Integral wenden wir die Ungleichung von BUNJAKOWSKI an:

$$[u(x,y) - u_n(x,y)]^2 \le \int_\Omega G^2(x, y;\ \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_\Omega [f - \Delta u_n]^2\, d\Omega. \tag{4}$$

Die Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ wird nur logarithmisch unendlich, deshalb ist das erste Integral beschränkt; das zweite Integral strebt gegen Null, und die Ungleichung (4) besagt, daß $u_n(x,y) \to u(x,y)$ *gleichmäßig* in $\overline{\Omega}$ gilt. Aus den Überlegungen

[1]) Alle gegebenen Funktionen setzen wir als reell voraus.

am Schluß des vorigen Paragraphen folgt, daß im Gebiet $\Omega$ im Mittel[1] $\frac{\partial u_n}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y} \to \frac{\partial u}{\partial y}$ gilt. Diese Ergebnisse zeigen, daß die Methode der kleinsten Quadrate im betrachteten Falle besser konvergiert als das RITZsche Verfahren, wenn die Konvergenz im Mittel der Ableitungen auch etwas langsamer geschieht.

## § 86. Hilfssätze aus der Theorie der analytischen Funktionen

Hier und im folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall eines endlichen einfach zusammenhängenden Gebietes der Ebene der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Die Ausdehnung der Ergebnisse auf mehrfach zusammenhängende oder unendliche Gebiete bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, doch werden die Rechnungen dabei umständlicher.[2]

Wie schon immer bezeichnen wir das zu betrachtende Gebiet mit $\Omega$, seinen Rand mit $S$; das abgeschlossene Gebiet $\Omega + S$ bezeichnen wir wie früher mit $\overline{\Omega}$. Den Koordinatenanfangspunkt legen wir stets in das Innere von $\Omega$. Die Kurve $S$ nehmen wir stets als hinreichend glatt an.

Eine wesentliche Rolle spielt im weiteren der folgende Satz von WALSH [1]:

**Satz 1.** *Die Funktion $f(z)$ sei holomorph in $\Omega$ und stetig in $\overline{\Omega}$. Dann kann man zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ ein Polynom $\varphi(z)$ derart finden, daß in $\overline{\Omega}$ die Ungleichung*

$$|f(z) - \varphi(z)| < \varepsilon \tag{1}$$

*erfüllt ist.*

Wir erwähnen zwei Folgerungen aus Satz 1.

**Folgerung 1.** *Wenn $f(z)$ in $\Omega$ holomorph und zusammen mit seinen Ableitungen bis zur Ordnung $r$ einschließlich in $\overline{\Omega}$ stetig ist, dann kann man zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ ein Polynom $\varphi(z)$ finden, das in $\overline{\Omega}$ den Ungleichungen*

$$|f(z) - \varphi(z)| < \varepsilon, \quad |f'(z) - \varphi'(z)| < \varepsilon, \ldots, |f^{(r)}(z) - \varphi^{(r)}(z)| < \varepsilon \tag{2}$$

*genügt.* Nach dem Satz von WALSH kann man ein Polynom $\varphi(z)$ konstruieren, das der Ungleichung

$$|f^{(r)}(z) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{A}$$

genügt. Die Konstante $A$ bestimmen wir unten. Wir bestimmen ein Polynom $f^*(z)$ aus den Bedingungen ($z_0$ ist ein fester Punkt im Innern von $\Omega$) $f^{*(r)}(z) = \varphi(z)$, $f^{*(j)}(z_0) = f^{(j)}(z_0)$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$. Durch Integration erhalten wir

$$|f^{(r-1)}(z) - f^{*(r-1)}(z)| = \left| \int_{z_0}^{z} [f^{(r)}(z) - \varphi(z)]\, dr \right| < \frac{\varepsilon d}{A},$$

[1]) Siehe den Artikel [6] des Verfassers.
[2]) Siehe den Artikel [6] des Verfassers.

wo $d$ das Maximum der kürzesten Abstände zwischen $z_0$ und den Punkten von $S$ auf Wegen, die in $\overline{\Omega}$ liegen, ist. Analog gilt

$$|f^{(r-2)}(z) - f^{*(r-2)}(z)| < \frac{\varepsilon d^2}{A}, \ldots, |f(z) - f^*(z)| < \frac{\varepsilon d^r}{A}.$$

Es genügt, $A = 1$ zu nehmen, wenn $d \leq 1$ ist, und $A = d^r$, wenn $d > 1$ ist, und Ungleichung (2) ist bewiesen.

**Folgerung 2.** *Unter den Bedingungen der Folgerung* 1 *kann man zu einer gegebenen Zahl* $\varepsilon > 0$ *ein Polynom* $\varphi(z)$ *derart bilden, daß*

$$\sum_{j=0}^{r} \int_S |f^{(j)}(z) - \varphi^{(j)}(z)|^2 \, ds < \varepsilon^2, \quad ds = |dz|$$

*gilt*. Der Beweis ist offensichtlich.

Wir haben unten den Raum $L_2^{(r)}(S)$ zu betrachten, dessen Elemente auf der Kurve $S$ definierte Funktionen sind; sie werden als Funktionen der Bogenlänge auf $S$ angesehen, sowie als stetig zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $r - 1$ einschließlich, während ihre (verallgemeinerten) Ableitungen der Ordnung $r$ als quadratisch summierbar längs $S$ vorausgesetzt werden. Das Skalarprodukt in $L_2^{(r)}(S)$ ist durch die Formel

$$(\varphi, \psi)_r = \sum_{j=0}^{r} \int_S \varphi^{(j)}(z) \overline{\psi^{(j)}(z)} \, ds$$

definiert; daraus ergibt sich die Formel für die Norm in $L_2^{(r)}(S)$ zu

$$\|\varphi\|_r^2 = \sum_{j=0}^{r} \int_S |\varphi^{(j)}(z)|^2 \, ds.$$

Eine bedeutende Rolle spielt im folgenden das

**Lemma 1.** *Es sei* $\varphi \in L_2(S)$ *und* $z$ *ein Punkt der Kurve* $S$. *Das im Sinne des* CAUCHY*schen Hauptwertes genommene Integral*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

*stellt einen in* $L_2(S)$ *beschränkten Operator dar.*

Aus Lemma 1 folgt die Existenz einer Konstanten $K$, die nur von der Kurve $S$ abhängt, für die die Ungleichung $\|\psi\| \leq K \, \|\varphi\|$ gilt.

Den Beweis von Lemma 1 findet man in dem Artikel [5] des Verfassers.

Im weiteren werden wir sagen, daß eine Folge gleichmäßig im Innern von $\Omega$ konvergiert, wenn diese Folge gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Gebiet konvergiert, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt.

**Satz 2.** *Wenn die Funktion $f_n(z)$ in $\Omega$ holomorph ist und durch die* CAUCHY*sche Formel darstellbar ist*[1]) *und wenn $\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt, dann streben diese Funktionen im Innern von $\Omega$ gleichmäßig gegen Null.*

Wir haben

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Möge $z$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ liegen. Wir bezeichnen mit $d$, $d > 0$, den kleinsten Abstand zwischen den Rändern der Gebiete $\overline{\Omega}$ und $\Omega$ und mit $l$ die Länge der Kurve $S$. Dann wird

$$|f_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi d}\int_S |f_n(\zeta)|\cdot|d\zeta|$$

oder, wenn man auf das letzte Integral die Ungleichung von BUNJAKOWSKI anwendet,

$$|f_n(z)| \leq \frac{\sqrt{l}}{2\pi d}\,\|f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

**Folgerung.** *Unter den Bedingungen des Satzes 2 gilt $f_n(z) \to 0$ in jedem inneren Punkt von $\Omega$.*

**Satz 3.** *Wenn $f_n(z)$ in $\Omega$ holomorph und $f_n^{(r)}(z)$ durch die* CAUCHY*sche Formel darstellbar ist und wenn $\|f_n\|_r \to 0$ gilt, dann strebt die Funktion $f_n(z)$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $r - 1$ einschließlich in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen Null.*

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $r = 1$. Der allgemeine Fall wird analog behandelt. Zunächst bemerken wir, daß $\|f_n'(z)\| \to 0$ gilt, wenn $\|f_n\|_1 \to 0$ gilt. Integriert man die CAUCHYsche Formel für die Ableitung, so erhält man

$$f_n(z) - f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_S f_n'(\zeta)\ln\frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

wo $z_0$ ein innerer Punkt von $\Omega$ ist. Jetzt wird nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI

$$|f_n(z) - f_n(z_0)|^2 \leq \frac{\|f_n'\|^2}{4\pi^2}\int_S \left|\ln\frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}\right|^2\cdot|d\zeta|.$$

Wenn $z$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ liegt, ist das letzte Integral beschränkt, und es gilt $f_n(z) - f_n(z_0) \to 0$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$. Nun ist aber $f_n(z_0) \to 0$ (Folgerung aus Satz 2), und unser Satz ist bewiesen.

---

[1]) Dafür ist z. B. hinreichend, daß die in $\Omega$ holomorphe Funktion $f_n(z)$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$ stetig ist.

**Satz 4.** *Die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei holomorph in $\Omega$ und stetig in $\overline{\Omega}$ und sei $v(0, 0) = 0$. Dann existiert eine nur vom Gebiet $\Omega$ abhängende Konstante $K$ derart, daß*

$$\|f\| \leq K \|u\| \tag{3}$$

*gilt.*

Wir bilden $\Omega$ konform auf das Gebiet des Einheitskreises der $t$-Ebene ab; es sei $t = \chi(z)$ die diese Abbildung realisierende Funktion. Wir führen die Bezeichnungen

$$t = re^{i\vartheta}; \quad u(x, y) = U(r, \vartheta); \quad f(z) = F(t)$$

ein; ferner bezeichnen wir mit $\gamma$ die Kreislinie $|t| = 1$. Im Innern von $\gamma$ entwickeln wir $F(t)$ in die TAYLOR-Reihe

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Wir setzen noch $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Die konforme Abbildung vollziehen wir so, daß der Punkt $z = 0$ in den Punkt $t = 0$ übergeht. Dann wird $\mathrm{Im}(a_0) = 0$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\int_\gamma U^2(1, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2; \quad \int_\gamma |F^2(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Daraus folgt

$$\int_\gamma |F^2(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leq 2 \int_\gamma U^2(1, \vartheta)\, d\vartheta. \tag{4}$$

Wir kehren zur Veränderlichen $z$ zurück und erhalten

$$\int_S |f^2(z)| \cdot |\chi'(z)|\, ds \leq 2 \int_S u^2 |\chi'(z)|\, ds.$$

Da die Kurve $S$ glatt ist, ist $\chi'(z)$ dem Betrage nach beschränkt nach unten und oben. Es sei $A \leq |\chi'(z)| \leq B$, dann folgt aus (4)

$$\|f\| \leq K \|u\|, \quad K = \sqrt{\frac{2B}{A}}.$$

Bei entsprechenden zusätzlichen Forderungen an $f(z)$ ist es nicht schwierig, auch die Abschätzung

$$\|f\|_r \leq K_r \|u\|_r \tag{5}$$

zu gewinnen.

Zum Schluß erwähnen wir, daß die Approximation analytischer Funktionen durch Polynome nicht die einzig mögliche ist. Ein Beispiel für die Approximation mit Funktionen anderer Form wird in § 88 gegeben.

## § 87. Die Aufgaben von DIRICHLET und NEUMANN

Wir betrachten das DIRICHLETsche Problem für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega$. Die gesuchte harmonische Funktion bezeichnen wir mit $u(x, y)$, ihren Wert auf dem Rand $S$ des Gebietes mit $u(\zeta)$, die in $\Omega$ holomorphe Funktion, deren Realteil mit $u(x, y)$ übereinstimmt, mit $f(z)$. Die Funktion $f(z)$ ist nur bis auf einen rein imaginären Summanden bestimmt, den wir durch die Bedingung

$$\operatorname{Im}\{f(0)\} = 0 \tag{1}$$

normieren. Der Methode der kleinsten Quadrate folgend, suchen wir eine angenäherte Lösung des DIRICHLETschen Problems in der Form

$$f_n(z) = u_n + i v_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k. \tag{2}$$

Um die Bedingung (1) zu erfüllen, fordern wir, daß

$$\operatorname{Im}(a_0) = 0 \tag{3}$$

gelte. Nun bestimmen wir die Koeffizienten der Entwicklung von $f_n(z)$ aus der Bedingung

$$\|u - u_n\|^2 = \min. \tag{4}$$

Wir untersuchen die Konvergenz der Näherungslösung gegen die exakte. Die Bedingung A des Lemmas 2 (§ 83) ist eine einfache Folgerung aus dem Satz von WALSH. Weiter ergibt sich die Bedingung B aus der Existenz der Lösung des DIRICHLETschen Problems. Die Bedingung C ist offensichtlich ebenfalls erfüllt, da in unserem Falle $Au \equiv u$ ist. Nach Lemma 2 des § 83 gilt $\|u - u_n\| \to 0$.

Wir zeigen jetzt, daß *$f_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig im Innern von $\Omega$ gilt.* Aus der Abschätzung (3) des § 86 folgt nämlich, daß $\|f_n(z) - f(z)\| \to 0$ gilt und aus Satz 2 des § 86, daß $f_n(z) - f(z) \to 0$ gleichmäßig im Innern von $\Omega$ gilt.[1])

**Anmerkungen. 1.** Die zuletzt gebrachten Überlegungen bleiben offensichtlich gültig, wenn man statt (2) eine Funktion der Form

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k(z)$$

nimmt, sofern $\{\omega_k(z)\}$ ein vollständiges System in $\Omega$ holomorpher und in $\Omega$ stetiger Funktionen ist.

**2.** Man kann das Verfahren so abändern, daß in $\overline{\Omega}$ gleichmäßige Konvergenz gilt. Dazu genügt es, die Funktion $f_n(z)$ der Bedingung

$$\|u - u_n\|_1 = \min \tag{$4_1$}$$

zu unterwerfen. Die Berechnung der Koeffizienten wird dabei etwas umständlicher.

---

[1]) Dieses Ergebnis findet sich bei einigen zusätzlichen Einschränkungen bei M. PICONE [1], der nur einfach zusammenhängende Gebiete betrachtete.

**3.** Wenn man fordert, daß die Größe $\|u - u_n\|_r$ zum Minimum wird, dann gilt in $\bar{\Omega}$ gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen $f_n^{(j)}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$ gegen die entsprechenden Ableitungen $f^{(j)}(z)$.

Um das Verfahren zu illustrieren, betrachten wir das DIRICHLETsche Problem für den Kreis. Den Radius des Kreises setzen wir gleich Eins, den Koordinatenanfangspunkt legen wir in den Mittelpunkt des Kreises. Die auf $S$ gegebene Funktion $u(\zeta)$ entwickeln wir in eine FOURIER-Reihe:

$$u(\zeta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta), \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Die Funktion $f_n(z)$ suchen wir in Form eines Polynoms; das läuft darauf hinaus, daß wir $\omega_k(z) = z^k = r^k e^{ik\theta}$ setzen.

Wir setzen

$$f_n(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - i b_k) z^k, \qquad \operatorname{Im}(a_0) = 0$$

und erhalten

$$a_0 = A_0, \quad a_k = A_k, \quad b_k = B_k.$$

Das liefert uns für $f_n(z)$ die $n$-te Teilsumme der Potenzreihe der Funktion $f(z)$.

Das NEUMANNsche Problem besteht in der Bestimmung einer in $\Omega$ holomorphen Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, die der Randbedingung

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \psi(s) \tag{5}$$

genügt. Die Funktion $f(z)$ ist nur bis auf einen willkürlichen konstanten Summanden bestimmt; wir normieren ihn durch die Bedingung

$$f(0) = 0. \tag{6}$$

**Satz 1.** *Wenn die Bedingung* (6) *erfüllt ist, dann existiert eine Konstante $K$, die nur vom Gebiet $\Omega$ abhängt, derart, daß im abgeschlossenen Gebiet $\bar{\Omega}$ die Ungleichung*

$$|f(z)| \le K \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\| \tag{7}$$

*gilt.*

Wir setzen voraus, daß $f(z)$ und $f'(z)$ in $\bar{\Omega}$ stetig sind. Wir bilden $\Omega$ konform auf den Einheitskreis ab mit Hilfe der Funktion $t = \chi(z)$; $\chi(0) = 0$. Wir setzen wie schon in § 86

$$t = re^{i\vartheta}, \quad f(z) = F(t), \quad u(x, y) = U(r, \vartheta).$$

Wir haben $F(0) = f(0) = 0$, deshalb wird

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \qquad a_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

$$U(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta)$$

und

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=1}^2 d\vartheta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2,$$

$$|F(t)|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n| \frac{1}{n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2.$$

Daraus ergibt sich

$$|F(t)|^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=1}^2 d\vartheta.$$

Indem wir zur Veränderlichen $z$ zurückkehren und beachten, daß infolge der Konformität der Abbildung

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|\chi'(z)|}, \qquad d\vartheta = |\chi'(z)|\, ds$$

gilt, erhalten wir

$$|f(z)|^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \frac{ds}{|\chi'(z)|}.$$

Schließlich wird $|\chi'(z)| \geq A > 0$, $A = \text{const}$, da die Kurve $S$ glatt ist. Daraus folgt

$$|f(z)| \leq K \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|, \qquad K = \sqrt{\frac{\pi}{6A}}.$$

Gemäß der Methode der kleinsten Quadrate kann man eine Näherungslösung des NEUMANNschen Problems in der Form

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$$

suchen. Statt rationaler Polynome können, wie oben gezeigt wurde, Linearkombinationen der Glieder einer beliebigen in $\Omega$ vollständigen Folge von in $\Omega$ holomorphen und in $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen genommen werden.

Die Koeffizienten der Entwicklung von $f_n(z)$ werden aus der Bedingung

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\|^2 = \min \tag{8}$$

bestimmt. Diese liefert ein System linearer Gleichungen, das nur eine Lösung zuläßt. Das folgt aus der Tatsache, daß die Bedingungen des Lemmas 1 des § 83 beim NEUMANNschen Problem erfüllt sind, was seinerseits aus Satz 1 folgt.

Wir zeigen jetzt, daß in $\overline{\Omega}$ *gleichmäßig* $f_n(z) \to f(z)$ gilt. Nach Folgerung 2 des § 86 kann man ein Polynom $\varphi_{n_0}(z)$ so bestimmen, daß $\|f'(z) - \varphi'_{n_0}(z)\| < \varepsilon$ ist.

Weiter gilt

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| = \| \mathrm{Re}\, \{[f'(z) - \varphi'_{n_0}(z)] e^{-i(\nu, x)}\} \| \leq \| f'(z) - \varphi'_{n_0}(z) \| < \varepsilon .$$

Infolge von (8) gilt erst recht

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| < \varepsilon ,$$

wenn $u_{n_0}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden wurde. Wenn $n > n_0$ ist, gilt offensichtlich

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial \nu} \right\| < \varepsilon .$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right\| \to 0 .$$

Jetzt ergibt sich aus (7) die gleichmäßige Konvergenz von $f_n(z)$ gegen $f(z)$ im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}$.

Alle Schlußfolgerungen des vorliegenden Paragraphen bleiben gültig, wenn man statt $L_2(S)$ den Raum $L_2(p; S)$ einführt unter der Bedingung, daß die Belegungsfunktion $p(\sigma)$ nach oben und nach unten durch positive Zahlen beschränkt ist

$$0 < \alpha \leq p(\sigma) \leq \beta < \infty .$$

## § 88. Das Dirichletsche Problem für die Ellipse

Es werde gefordert, eine Funktion $u(x, y)$ zu bestimmen, die im Innern der Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$; $0 \leq t \leq 2\pi$ harmonisch ist und auf dem Rand $S$ der Ellipse der Bedingung

$$u|_S = u(\sigma) \tag{1}$$

genügt. Wie oben nehmen wir an, daß $u(x, y)$ der Realteil einer analytischen Funktion $f(z)$ ist:

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, \{f(z)\}, \qquad z = x + iy. \tag{2}$$

Als Koordinatenfunktionen wählen wir ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_k(z) = (z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k, \quad k > 1 . \tag{3}$$

Das System $\{\varphi_k\}$ ist bekanntlich vollständig auf dem Lineal derjenigen Funktionen, die im Innern der Ellipse holomorph und stetig bis auf den Rand sind. Wir suchen eine Näherungslösung in der Form

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z), \qquad \mathrm{Im}\,(a_0) = 0 . \tag{4}$$

Bezeichnet man die Bogenlänge der Ellipse mit $\sigma$, so wird

$$d\sigma = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Als unserem Problem zugrunde liegenden HILBERT-Raum führen wir den Raum $L_2(p;S)$ mit

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

ein; offensichtlich ist in $L_2(p;S)$ das Skalarprodukt zweier Funktionen $\varphi$ und $\psi$

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\, \overline{\psi(\sigma)}\, dt. \tag{5}$$

Gemäß der Methode der kleinsten Quadrate werden die Koeffizienten $a_k$ aus der Bedingung

$$\left\| \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) - u(\sigma) \right\|^2 = \min \tag{6}$$

bestimmt. Auf dem Rand der Ellipse ist $z = a \cos t + ib \sin t$ und demzufolge $z^2 - c^2 = (b \cos t + ia \sin t)^2$. Daraus ergibt sich

$$\varphi_k(z) = (a+b)^k e^{ikt} + (a-b)^k e^{-ikt}, \quad k > 0.$$

Wir setzen $a_k = \alpha_k - i\beta_k$. Dann ist auf der Ellipse

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{a_k \varphi_k(z)\} &= [(a+b)^k + (a-b)^k]\, \alpha_k \cos kt \\ &\quad + [(a+b)^k - (a-b)^k]\, \beta_k \sin kt, \quad k > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Jetzt ist aus (6) ersichtlich, daß die Koeffizienten in (7) die FOURIER-Koeffizienten der Funktion $u(\sigma)$ sind; daraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma)\, dt, \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi[(a+b)^k + (a-b)^k]} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \cos kt\, dt, \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi[(a+b)^k - (a-b)^k]} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \sin kt\, dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Koeffizienten $\alpha_0$, $\alpha_k$, $\beta_k$ hängen nicht von der Nummer $n$ ab, wie aus (8) ersichtlich ist, deshalb läßt sich in (4) der Grenzübergang $n \to \infty$ leicht verwirklichen, was die exakte Lösung des Problems liefert:

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k];$$

die Koeffizienten $a_k$ sind aus den Formeln (8) zu bestimmen.

## § 89. Der Fall stückweise glatter Ränder. Das DIRICHLETsche Problem

Der Rand $S$ des beschränkten Gebietes $\Omega$ sei stückweise glatt; wir bezeichnen seine Eckpunkte mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ und mit $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_r$ die Innenwinkel in den entsprechenden Punkten. Wir führen den HILBERT-Raum $L_2(p; S)$ in die Betrachtung ein, wo die Belegungsfunktion durch

$$p(\sigma) = \prod_{k=1}^{r} |\zeta - \zeta_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \tag{1}$$

gegeben ist. Das Skalarprodukt und die Norm sind durch die Formeln

$$(\varphi, \psi)_S = \int_S p(\sigma)\varphi(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\, d\sigma; \qquad \|\varphi\|_S^2 = \int_S p(\sigma)\, |\varphi^2(\zeta)|\, d\sigma \tag{2}$$

definiert.

**Lemma.** *Die Menge aller Polynome ist im Sinne der Metrik* (2) *dicht in der Klasse der in $\Omega$ holomorphen und durch die* CAUCHY*sche Formel darstellbaren Funktionen, für die die Grenzwerte ihrer Realteile zum Raum $L_2(p;S)$ gehören.*

Wie schon oben, nehmen wir beim Beweis $\Omega$ als endlich und einfach zusammenhängend an.

Wir bilden $\Omega$ auf den Einheitskreis ab; $t = \chi(z)$ sei die Abbildungsfunktion. Bekanntlich ist

$$\chi'(z) = \varkappa(z) \prod_{k=1}^{r} (z - \zeta_k)^{\frac{1}{\alpha_k} - 1}, \tag{3}$$

wo $\varkappa(z)$ dem Betrage nach im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$ durch positive Zahlen nach unten und oben beschränkt ist:

$$0 < A \leq \varkappa(z) \leq B < \infty. \tag{4}$$

Die Kreislinie $|t| = 1$ bezeichnen wir mit $\gamma$. Wir führen den HILBERT-Raum $L_2(\gamma)$ in die Betrachtung ein, in dem

$$(\varphi, \psi)_\gamma = \int_\gamma \varphi(t)\, \overline{\psi(t)} d\vartheta, \quad \|\varphi\|_\gamma^2 = \int_\gamma |\varphi^2(t)|\, d\vartheta, \quad t = e^{i\vartheta} \tag{5}$$

gilt. Es sei $u \in L_2(p; S)$. Dann wird

$$\|u\|_\gamma^2 = \int_\gamma |u|^2\, d\vartheta = \int_S |u|^2 p(\sigma)\, |\varkappa(z)|\, d\sigma \leq B \|u\|_S^2 < \infty. \tag{6}$$

Daraus folgt, daß $u \in L_2(\gamma)$ ist; setzt man $t = e^{i\vartheta}$, so findet man die FOURIER-Entwicklung von $u$, die im Mittel konvergiert:

$$u = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\vartheta - \beta_k \sin k\vartheta).$$

Wir führen die Bezeichnung $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ ein und setzen, indem wir die Funktion $u$ als reell annehmen,

$$F(t) = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \qquad F_n(t) = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k, \qquad \beta_0 = \text{const}.$$

Die Funktion $F(t)$ ist durch die CAUCHYsche Formel darstellbar und ihr Realteil fällt auf $\gamma$ mit $u$ zusammen. Man sieht leicht, daß

$$\|F - F_n\|_\gamma^2 = 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{7}$$

gilt und demzufolge für hinreichend großes $n$ auch $\|F - F_n\| < \varepsilon$, wo $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl ist. Wir setzen jetzt $F(t) = f(z)$, $F_n(t) = f_n(z)$. Formel (7) geht dann in die folgende über:

$$\int_S |f(z) - f_n(z)|^2 p(\sigma) |\varkappa(z)| \, d\sigma = 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 < \varepsilon^2,$$

daraus ergibt sich leicht

$$\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}.$$

Nach dem Satz von WALSH kann eine in $\overline{\Omega} = \Omega + S$ stetige und in $\Omega$ holomorphe Funktion $f_n(z)$ durch ein Polynom $f^*(z)$ gleichmäßig approximiert werden, und um so mehr im Sinne der Metrik in $L_2(p; S)$. Nun ist

$$\|f - f^*\|_S \leq \|f - f_n\|_S + \|f_n - f^*\|_S < \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} + \|f_n - f^*\|_S,$$

und da beide Summanden rechts beliebig klein sind, ist auch $\|f - f^*\|$ beliebig klein, was das Lemma beweist.

Wir gehen jetzt zum DIRICHLETschen Problem über. Es ist leicht zu sehen, daß die Abschätzung (3) des § 86 in $L_2(p; S)$ gültig bleibt. Sie ist nämlich richtig in $L_2(\gamma)$. Wenn also $f(z) = u + iv$ in $\Omega$ holomorph und $\operatorname{Im}\{f(0)\} = 0$ ist, dann gilt nach Ungleichung (3) des § 86

$$\|f\|_\gamma \leq K \|u\|_\gamma \qquad \text{oder} \qquad \int_\gamma |f(z)|^2 \, d\vartheta \leq K \int_\gamma u^2 \, d\vartheta.$$

Nun ist $d\vartheta = p(\sigma)\,\varkappa(z)\,d\sigma$; setzt man das in die letzte Ungleichung ein und beachtet (4), so erhält man

$$\|f\|_S \leq K'\|u\|_S; \quad K' = K\sqrt{\frac{B}{A}}, \tag{8}$$

was gerade mit der Abschätzung (3) des § 83 zusammenfällt. Um das DIRICHLETsche Problem zu lösen, fordern wir

$$\|u - \operatorname{Re}\{f^*(z)\}\|_S^2 = \min,$$

wo $f^*(z)$ ein Polynom ist. Das Lemma des vorliegenden Paragraphen gestattet es, die Erfüllung der Bedingung A des § 83 zu behaupten; die Bedingung B ergibt sich aus dem Existenzsatz für das DIRICHLETsche Problem, und die Bedingung C aus der Ungleichung (8). Damit ist die Konvergenz der Methode der kleinsten Quadrate in der Metrik von $L_2(p; S)$ bewiesen.

## § 90. Das gemischte Problem der Potentialtheorie

Hier betrachten wir das folgende Problem: Es ist eine stetige, im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega} = \Omega + S$ harmonische Funktion $u(x, y)$ zu bestimmen, wenn auf einem Teil des Randes $S$ die Werte der Funktion $u(x, y)$ selbst, auf dem anderen die Werte ihrer Normalableitungen gegeben sind.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß das Gebiet $\Omega$ endlich und einfach zusammenhängend ist. Den Rand $S$ setzen wir wie stets als hinreichend glatt voraus. Ferner mögen die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1} = \alpha_1$ den Rand $S$ in die Bogen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2m}$ zerlegen, derart, daß der Bogen $\gamma_k$ Anfang bzw. Ende im Punkt $\alpha_k$ bzw. $\alpha_{k+1}$ hat. Wir führen die Bezeichnungen

$$\Sigma\gamma_{2k-1} = \lambda_1; \qquad \Sigma\gamma_{2k} = \lambda_2$$

ein. Ferner seien auf $\lambda_1$ die Werte $u(x, y) = \varphi(\sigma)$ gegeben und auf $\lambda_2$ die Werte $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(\sigma)$. Wir setzen noch

$$R(\sigma) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2m} |\zeta - \alpha_k|}\,.$$

**Satz 1.** *Wenn $\varphi(\sigma) \equiv 0$ ist, dann existiert eine nicht von der Funktion $u(x, y)$ abhängende Konstante $K$ derart, daß die Ungleichung*

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u^2(\sigma)\,d\sigma < K \int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \tag{1}$$

*gilt.*

Wir bilden $\Omega$ konform auf eine Halbebene ab mit Hilfe der Funktion $z = \chi(t)$, $t = \xi + i\eta$. Die Abbildung führen wir so durch, daß dem Punkt $t = \infty$ ein Punkt im Innern von $\lambda_1$ entspricht. Die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m}$ gehen dabei in gewisse Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ der reellen $\xi$-Achse über. Wir bezeichnen mit $\Gamma_k$, $\Lambda_1$, $\Lambda_2$ die Bilder von $\gamma_k$, $\lambda_1$, $\lambda_2$. Ferner sei $u(x, y) = U(\xi, \eta)$. Die zu $U(\xi, \eta)$ konjugierte Funktion bezeichnen wir mit $V(\xi, \eta)$. Die Randbedingungen für $U(\xi, \eta)$ sind offensichtlich die folgenden:

$$\text{auf } \Lambda_1 : \quad U(\xi, \eta) = 0; \tag{2}$$

$$\text{auf } \Lambda_2 : \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \, |\chi'(\xi)|. \tag{3}$$

Aus den CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen folgt, daß auf $\Gamma_{2k}$

$$V = -\int\limits_{a_{2k}}^{\xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} \, d\xi + C_k = \psi^*(\xi) + C_k \tag{4}$$

gilt; die Konstanten $C_k$ müssen so gewählt werden, daß die Funktion $V(\xi, \eta)$ stetig bleibt. Eine der Konstanten $C_k$ kann willkürlich festgesetzt werden, da $V(\xi, \eta)$ nur bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt ist. Wir legen diese letztere fest, indem wir fordern, daß in der allgemeinen Formel von SCHWARZ für die Halbebene[1]),

$$U + iV = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\xi, 0)}{\xi - t} \, d\xi + iC,$$

$C = 0$ ist. Dadurch ist die Willkür in der Wahl der $C_k$ vollständig beseitigt.

Die Randbedingungen (2) und (4) gestatten es, die Werte $U(\xi, 0)$ auf $\Lambda_2$ zu bestimmen, dort ist nämlich[2])

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{R_1(\xi)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Lambda_2} R_1(\xi') \, B(\xi') \, \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + Q_{m-1}(\xi) \right\}. \tag{5}$$

Hier ist $R_1(\xi) = \sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2m} |\xi - a_k|}$; $Q_{m-1}(\xi)$ ist ein Polynom von Grade $m - 1$,

$$Q_{m-1}(\xi) = q_0 \xi^{m-1} + q_1 \xi^{m-2} + \cdots + q_{m-1}$$

und schließlich ist

$$B(\xi) = -\varphi^*(\xi) - C_k.$$

Formel (5) enthält $2m$ Konstanten $C_k$ und $q_k$. Wir zeigen, daß $U(\xi, \eta)$ bei geeigneter Wahl von ihnen in den Punkten $a_k$ stetig wird. Für die Stetigkeit von $U(\xi, \eta)$ ist hinreichend, daß bei $\xi = a_k$ der Klammerausdruck in (5) verschwindet. Das liefert ein Gleichungssystem mit $2m$ Unbekannten:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\Lambda_2} \frac{R_1(\xi')}{\xi' - a_k} \, B(\xi') \, d\xi' + Q_{m-1}(a_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2m. \tag{6}$$

---

[1]) Siehe z. B. das Buch [7] des Verfassers, § 67, Formel (2).
[2]) Siehe z. B. das Buch [7] des Verfassers, § 67, Formel (10).

Das System (6) hat eine eindeutige Lösung, das ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Lösung des gemischten Problems. Aus (6) erhält man die Lösung offensichtlich in der Form

$$C_k = \int\limits_{\Lambda_2} \frac{\mu_k(\xi')}{R_1(\xi')} \varphi^*(\xi')\, d\xi', \quad q_k = \int\limits_{\Lambda_2} \frac{\nu_k(\xi')}{R_1(\xi')} \varphi^*(\xi')\, d\xi', \tag{7}$$

wo $\mu_k(\xi')$ und $\nu_k(\xi')$ auf $\Lambda_2$ stetige Funktionen sind. Wir definieren die auf $\Lambda_2$ stetigen Funktionen $\tilde{\mu}_k(\xi)$ und $\tilde{\nu}_k(\xi)$, indem wir auf $\Gamma_{2s}$

$$\tilde{\mu}_k(\xi) = \int\limits_{\xi}^{a_{2s+1}} \frac{\mu_k(\xi')}{R_1(\xi')}\, d\xi'; \quad \tilde{\nu}_k(\xi) = \int\limits_{\xi}^{a_{2s+1}} \frac{\nu_k(\xi')}{R_1(\xi')}\, d\xi'$$

setzen. Integriert man (7) partiell und beachtet, daß $\varphi^*(a_{2s}) = \tilde{\mu}_k(a_{2s+1}) = \tilde{\nu}_k(a_{2s+1}) = 0$ ist, so erhält man

$$C_k = \int\limits_{\Lambda_2} \tilde{\mu}_k(\xi) \frac{\partial U}{\partial \eta}\, d\xi, \quad q_k = \int\limits_{\Lambda_2} \tilde{\nu}_k(\xi) \frac{\partial U}{\partial \eta}\, d\xi.$$

Setzt man das in (5) ein und vertauscht die Reihenfolge der dabei erhaltenen Doppelintegrale, so kann man die erwähnte Formel leicht auf die Form

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{R_1(\xi)} \int\limits_{\Lambda_2} M(\xi, \xi') \frac{\partial U}{\partial \eta}\, d\xi \quad (\text{auf } \Lambda_2) \tag{8}$$

bringen, wo $M(\xi, \xi')$ so beschaffen ist, daß das Integral

$$\int\limits_{\Lambda_2} M^2(\xi, \xi')\, d\xi'$$

beschränkt ist. Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, daß die Funktionen $\tilde{u}_k(\xi)$, $\tilde{\nu}_k(\xi)$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ genügen, und dann genügt $M(\xi, \xi')$ im Innern von $\Lambda_2$ derselben Bedingung und wird in den Punkten $a_k$ höchstens logarithmisch unendlich[1]). Wir wenden auf (8) die Ungleichung von Bunjakowski an:

$$U^2(\xi, 0) \leq \int\limits_{\Lambda_2} \frac{1}{R_1^2(\xi)} M^2(\xi, \xi')\, d\xi' \int\limits_{\Lambda_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 d\xi'$$

$$< \frac{C'}{R_1^2(\xi)} \int\limits_{\Lambda_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 d\xi' \quad (\text{auf } \Lambda_2), \quad C' = \text{const.} \tag{9}$$

[1]) Siehe z. B. N. I. Muschelischwili [1].

Wir kehren zur $z$-Ebene ($z = x + iy$) zurück. Auf $\Lambda_2$ bleibt die Abbildungsfunktion $z = \chi(t)$ endlich; wie leicht zu sehen ist, sind dann $\chi'(t)$ und $1/\chi'(t)$ auf $\Lambda_2$ beschränkt. Dann sind aber auch die Quotienten $R_1(\xi)/R(\sigma)$ und $R(\sigma)/R_1(\xi)$ beschränkt, und aus (9) ergibt sich leicht, daß auf $\lambda_2$

$$R(\sigma)u^2(\sigma) < \frac{K''}{R(\sigma)} \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma, \quad K'' = \text{const} \tag{10}$$

gilt. Integriert man schließlich (10) über $\lambda_2$ und setzt

$$K = K'' \int\limits_{\lambda_2} \frac{\partial \sigma}{R(\sigma)},$$

so gelangt man zur Ungleichung (1).

**Satz 2.** *Bei beliebiger Vorgabe der Werte $u$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ auf $\lambda_1$ und $\lambda_2$ existiert eine Konstante $K_1$ derart, daß*

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)u^2(\sigma)\,d\sigma \le K_1 \left\{\int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma + \int\limits_{\lambda_1} \left[u^2(\sigma) + \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2\right] d\sigma\right\} \tag{11}$$

*gilt.*

Wir bilden eine auf $S$ stetige Funktion $u_1(\sigma)$, die auf $\lambda_1$ mit $u(\sigma)$ zusammenfällt; auf $\lambda_2$ bestimmen wir sie, indem wir sie nur den beiden Forderungen

$$\int\limits_{\lambda_2} u_1^2(\sigma)\,d\sigma \le k \int\limits_{\lambda_1} u^2(\sigma)\,d\sigma, \qquad \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma \le k \int\limits_{\lambda_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma, \quad k = \text{const} \tag{12}$$

unterwerfen. Weiter bilden wir eine in $\Omega$ harmonische Funktion $u_1(x, y)$, die auf $S$ den Wert $u_1(\sigma)$ annimmt und setzen $u = u_1 + u_2$. Die Funktion $u_2$ genügt der Bedingung des Satzes 1; nach Ungleichung (1) ist

$$\int\limits_{\lambda_2} R(\sigma)u_2^2(\sigma)\,d\sigma \le K \int\limits_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \le 2K \int\limits_{\lambda_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\right)^2\right] d\sigma. \tag{13}$$

Wir schätzen das letzte Integral in (13) ab. Wir bilden $\Omega$ konform auf einen Kreis ab mit Hilfe der Funktionen $z = \omega(t)$, $t = \varrho e^{i\vartheta}$, $0 \le \varrho \le 1$, und es sei $u_1(x, y) = U_1(\varrho, \vartheta) = \operatorname{Re}\{F(t)\}$. Wir entwickeln $F(t)$ in eine Potenzreihe

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n e^{in\vartheta}.$$

Dann wird

$$U_1(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n (a_n e^{in\vartheta} + \bar{a}_n e^{-in\vartheta}).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial U_1(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho}\bigg|_{\varrho=1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n e^{in\vartheta} + \bar{a}_n e^{-in\vartheta}),$$

$$\frac{\partial U_1(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta}\bigg|_{\varrho=1} = \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n e^{in\vartheta} - \bar{a}_n e^{-in\vartheta}),$$

und infolge der PARSEVALschen Gleichung wird

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial U_1(\varrho,\vartheta)}{\partial\varrho}\bigg|_{\varrho=1}\right]^2 d\vartheta = \int_\Gamma \left[\frac{\partial U_1(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta}\bigg|_{\varrho=1}\right]^2 d\vartheta$$

oder

$$\int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 |\,\omega'(\tau)\,|\,d\sigma = \int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 |\,\omega'(\tau)\,|\,d\sigma,$$

wenn man zu den alten Veränderlichen zurückkehrt.

Es sei $A = \min|\omega'(t)|$, $B = \max|\omega'(t)|$. Offensichtlich ist $0 < A \leq B < \infty$, da der Rand $S$ glatt ist. Dann folgt aus der letzten Gleichung

$$\int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma \leq \frac{B}{A}\int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Erst recht gilt

$$\int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma \leq \frac{B}{A}\left\{\int_{\lambda_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma + \int_{\lambda_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma\right\}$$

und nach Definition von $u_1(\sigma)$ und nach den Ungleichungen (12)

$$\int_{\lambda_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma \leq \frac{B(1+k)}{A}\int_{\lambda_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Setzt man das in (13) ein, so erhält man

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u_2^2(\sigma)\,d\sigma \leq 2K\int_{\lambda_2}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma + K'\int_{\lambda_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma, \quad K' = \frac{2BK(1+k)}{A}. \tag{14}$$

Jetzt ist es leicht, die Ungleichung (11) zu beweisen. Wir haben

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_2} R(\sigma)u^2(\sigma)\,d\sigma &= \int_{\lambda_2} R(\sigma)\,[u_1(\sigma)+u_2(\sigma)]^2\,d\sigma\\ &\leq 2R^*\int_{\lambda_2} u_1^2(\sigma)\,d\sigma + 2\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u_2^2(\sigma)\,d\sigma,\end{aligned}$$

wo $R^* = \max R(\sigma)$ ist. Wir nutzen die Ungleichungen (12) und (14) aus und setzen $K_1 = \max(2\,kR^*, 4K, 2K')$; wir erhalten dann

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma)\,u^2(\sigma)\,d\sigma \leq K_1\left\{\int_{\lambda_2}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma + \int_{\lambda_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)^2 + u^2(\sigma)\right]d\sigma\right\}.$$

Wir wenden uns jetzt der Lösung des gemischten Problems der Potentialtheorie zu. $v(x, y)$ sei die zu der gesuchten Funktion $u(x, y)$ konjugierte Funktion und $v(0, 0) = 0$ und $f(z) = u + iv$. Wir suchen eine Näherungslösung in der Form

$$f_n(z) = u_n + i v_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \operatorname{Im}(a_0) = 0.$$

Die Koeffizienten des Polynoms $f_n(z)$ bestimmen wir aus der Bedingung

$$\int_{\lambda_1} \left[ (u - u_n)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{\partial u_n}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma + \int_{\lambda_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma = \min. \tag{15}$$

Die Bedingung (15) führt auf ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $a_k$; wir beweisen dessen Lösbarkeit. Wir betrachten den HILBERT-Raum, dessen Elemente die in $\Omega$ harmonischen Funktionen sind, die durch die GREENsche Funktion darstellbar sind, während das Skalarprodukt durch die Formel

$$(u, v) = \int_{\lambda_1} \left( u\bar{v} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_{\lambda_2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu} d\sigma.$$

definiert ist. Diese Definition ist gerechtfertigt. Eine Prüfung erfordert nämlich nur das Axiom D (§ 3). Wenn aber $(u, u) = 0$ ist, dann ist $u \equiv 0$ auf $\lambda_1$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0$ auf $\lambda_2$. Nach dem Satz über die eindeutige Lösbarkeit des gemischten Problems der Potentialtheorie ist $u \equiv 0$.

Jetzt nimmt die Minimalbedingung (15) die Form $\|u - u_n\|^2 = \min$ an; da $u_n$ ein lineares Aggregat der linear unabhängigen Funktionen 1, $\operatorname{Re}(z^k)$, $\operatorname{Im}(z^k)$ ist, so ist nach dem in § 83 Bewiesenen das lineare System, auf das die Bedingung (15) führt, in eindeutiger Weise lösbar.

Wir zeigen jetzt, daß $f_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig im Innern von $\Omega$ gilt. Zunächst zeigen wir wie im vorigen Paragraphen, indem wir uns auf die Folgerung 2 aus Satz 1 des § 86 stützen, daß jedes der Integrale in (15) gegen Null strebt; dann aber strebt infolge von Ungleichung (11) auch das Integral

$$\int_{\lambda_2} R(\sigma) (u - u_n)^2 d\sigma$$

gegen Null. Jetzt wird

$$\int_S R(\sigma)(u - u_n)^2 d\sigma \leq R^* \int_{\lambda_1} (u - u_n)^2 d\sigma + \int_{\lambda_2} R(\sigma)(u - u_n)^2 d\sigma \to 0.$$

Ferner ist

$$f(z) - f_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_S (u - u_n) T(z; \zeta) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_S \sqrt{R(\sigma)} (u - u_n) \frac{T(z, \zeta)}{\sqrt{R(\sigma)}} d\sigma,$$

wo $T(z, \zeta)$ der SCHWARZsche Kern[1]) des Gebietes $\Omega$ ist. Nach der Ungleichung von BUNJAKOWSKI wird

$$|f(z) - f_n(z)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_S \frac{T^2(z, \zeta)}{R(\sigma)} \, d\sigma \int_S R(\sigma)(u - u_n)^2 \, d\sigma. \tag{16}$$

Wenn $z \in \overline{\Omega}'$ gilt, wo $\overline{\Omega}'$ ein abgeschlossenes Gebiet ist, das im Innern von $\Omega$ liegt, dann ist $T(z, \zeta)$ stetig und das erste Integral in (16) beschränkt, und da das zweite Integral gegen Null strebt, gilt $f_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig in $\Omega$.

## § 91. Das ebene Problem der Elastizitätstheorie

Wir beschränken uns auf den Fall vorgegebener Verschiebungen; der Fall vorgegebener Spannungen bedeutet keinen wesentlichen Unterschied. Wie vorher beschränken wir uns hier auf die Betrachtung einfach zusammenhängender endlicher Gebiete.

Bekanntlich[2]) führt unser Problem auf die Bestimmung zweier im betrachteten Gebiet $\Omega$ holomorpher Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$, die auf dem Rand $S$ des Gebietes $\Omega$ durch die Beziehung

$$\varkappa\varphi(\zeta) - \overline{\zeta\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta) \tag{1}$$

zusammenhängen. Hier ist $\varkappa = 3 - 4\sigma$, wo $\sigma$ die POISSONsche Zahl ist, $g(\zeta)$ ist eine gegebene auf $S$ stetige Funktion. Die Lösung des so formulierten Randwertproblems existiert[3]), wobei man noch fordern kann, daß $\varphi(0) = 0$ und $\operatorname{Im}\{\varphi(0)\} = 0$ wird. Man kann zeigen[4]), daß sich die Randwerte von $\varphi(z)$ durch $g(z)$ mittels einer Formel der Form

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\varkappa} g(z) + \frac{1}{2\pi i \varkappa} \int_S \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \int_S \{K_1(z, \zeta) g(\zeta) + K_2(z, \zeta) \overline{g(\zeta)}\} \, d\zeta \tag{2}$$

ausdrücken lassen, wo $K_1$ und $K_2$ stetige Funktionen der Punkte $z$ und $\zeta$ auf der Kurve $S$ sind. Infolge von Lemma 1 des § 86 folgt daraus leicht die Abschätzung

$$\|\varphi\| \leq C \|g\|, \qquad C = \text{const.} \tag{3}$$

Ferner ersetzen wir in (1) alle Glieder durch ihre konjugiert komplexen, multiplizieren mit

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \qquad z \in \Omega$$

---

[1]) Definition und Eigenschaften des SCHWARZschen Kernes siehe in dem Buch [7] des Verfassers.

[2]) Siehe N. I. MUSCHELISCHWILI [2].

[3]) Siehe N. I. MUSCHELISCHWILI [2].

[4]) Siehe den Artikel [1] des Verfassers. Der in diesem Artikel gegebene Beweis kann vereinfacht werden.

und integrieren über $S$. Das ergibt

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\bar{\zeta}\overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta$$

oder, wenn man das zweite Integral partiell integriert,

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \overline{\varphi(\zeta)}\, d\left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right) + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Wenn $z$ in einem abgeschlossenen Gebiet $\overline{\Omega}'$ variiert, das ganz im Innern von $\Omega$ liegt, dann findet man leicht

$$|\psi(z)| \leq C' \|g\|, \qquad C' = \text{const}, \tag{4}$$

wenn man auf die letzte Formel die Ungleichung von Bunjakowski anwendet.

Wir suchen die Näherungswerte für die Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ in Form von Polynomen

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k, \qquad \psi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k, \tag{5}$$

deren Koeffizienten wir aus der Bedingung

$$\|g_n - g\|^2 = \|\varkappa\varphi_n(z) + z\overline{\varphi_n'(z)} - \overline{\psi_n(z)} - g\|^2 = \min \tag{6}$$

ermitteln. Wie gewöhnlich führt diese Bedingung auf ein System linearer algebraischer Gleichungen. Wir zeigen, daß dieses System eindeutig lösbar ist.

Wir ändern die Bezeichnungen der Polynome $\varphi_n(z)$ und $\psi_n(z)$ und schreiben

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + i a_{2k}) z^k,$$

$$\psi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_{2k+2n+1} + i a_{2k+2n+2}) z^k,$$

wo jetzt die $a_j$ reelle Größen bedeuten. Wir führen weiter die Bezeichnungen

$$\varphi_{(2k-1)}(z) = z^k, \quad 1 \leq k \leq n; \qquad \varphi_{(2k)}(z) = i z^k, \quad 2 \leq k \leq n;$$

$$\varphi_{(m)}(z) = 0, \quad m > 2n; \qquad \psi_{(m)}(z) = 0, \quad 1 \leq m \leq 2n;$$

$$\psi_{(2k+2n+1)}(z) = z^k, \quad 0 \leq k \leq n; \quad \psi_{(2k+2n+2)}(z) = i z^k, \quad 0 \leq k \leq n$$

ein. Dann ist offensichtlich

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=1}^{4n+1} a_k \varphi_{(k)}(z), \qquad \psi_n(z) = \sum_{k=1}^{4n+1} a_k \psi_{(k)}(z),$$

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{4n+1} a_k g_{(k)}(z)$$

mit

$$g_{(k)}(z) = \varkappa \varphi_{(k)}(z) - \overline{z \varphi'_{(k)}(z)} - \overline{\psi_{(k)}(z)}.$$

Die Identität

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k g_{(k)}(\zeta) \equiv 0, \qquad \zeta \in S,$$

wo die $b_k$ reelle Zahlen sind, ist nur möglich, wenn alle diese Zahlen gleich Null sind.

Wenn nämlich

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k g_{(k)}(\zeta) \equiv 0$$

gilt, dann ist nach dem Satz über die eindeutige Lösbarkeit der Elastizitätsprobleme gleichzeitig

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k \varphi_{(k)}(z) \equiv 0, \qquad \sum_{k=1}^{4n+1} b_k \psi_{(k)}(z) \equiv 0$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1} + i b_{2k}) z^k \equiv 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_{2n+2k+1} + i b_{2k+2n+2}) z^k \equiv 0,$$

woraus folgt, daß alle $b_j$ gleich Null sind.

Die Bedingung (6) nimmt jetzt die Form

$$\left\| \sum_{k=1}^{4n+1} a_k g_{(k)} - g \right\|^2 = \min$$

an oder, da die Zahlen $a_k$ reell sind,

$$\sum_{j,k=1}^{4n+1} a_j a_k (g_{(j)}, g_{(k)}) - 2 \sum_{k=1}^{4n+1} a_k \operatorname{Re}(g, g_{(k)}) + (g, g) = \min.$$

Differenziert man das nach $a_j$ und setzt das Ergebnis gleich Null, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $a_k$:

$$\sum_{k=1}^{4n+1} a_k \operatorname{Re}(g_{(k)}, g_{(j)}) = \operatorname{Re}(g, g_{(j)}), \qquad j = 1, 2, \ldots, 4n+1. \tag{7}$$

Wir zeigen, daß das System (7) lösbar ist, wozu wir das homogene System

$$\sum_{k=1}^{4n+1} b_k \operatorname{Re}(g_{(k)}, g_{(j)}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 4n+1 \tag{8}$$

betrachten. Wenn man

$$\tilde{g}(\zeta) = \sum_{k=1}^{4n+1} b_{(k)} g_{(k)}(\zeta)$$

setzt, kann man es in der Form

$$\mathrm{Re}(\tilde{g}, g_{(j)}) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 4n + 1$$

schreiben. Durch Multiplikation mit $b_j$ und Addition erhält man, wenn man berücksichtigt, daß $b_j$ reell ist,

$$\mathrm{Re}(\tilde{g}, \tilde{g}) = 0.$$

Nun ist aber $\mathrm{Re}(\tilde{g}, \tilde{g}) = \mathrm{Re}\,\|\tilde{g}\|^2 = \|\tilde{g}\|^2$. Daraus folgt $\tilde{g} = 0$ und nach dem oben Bewiesenen $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, 4n + 1$. Das System (8) hat demnach nur die triviale Lösung. Daraus folgt, daß das inhomogene System (7) stets lösbar ist.

Wir untersuchen die Konvergenz der Näherungslösung gegen die exakte. Wenn die gegebene Funktion $g(\zeta)$ hinreichend glatt ist[1]), dann sind $\varphi'(z)$ und $\psi(z)$ in $\Omega$ stetig. Indem wir uns auf die Folgerung aus dem Satz von Walsh und auf den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für unser Problem stützen, finden wir leicht, daß $\|g_n - g\| \to 0$ gilt. Auf Grund der Ungleichung (3) wird $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$; infolge des Satzes 2 des § 86 gilt innerhalb von $\Omega$ gleichmäßig $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$. Schließlich folgt aus (4), daß im Innern von $\Omega$ gleichmäßig $\psi_n(z) \to \psi(z)$ gilt.

Gleichmäßige Konvergenz findet in $\bar{\Omega}$ statt, wenn man fordert, daß die Größe $\|g_n - g\|^2$ zum Minimum gemacht wird.

Die Ergebnisse des vorliegenden Paragraphen lassen sich ohne Mühe auf den Fall eines inhomogenen Mediums übertragen.

## § 92. Das periodische Problem der Elastizitätstheorie

Wir betrachten ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega$ der $z$-Ebene ($z = x + iy$), das von der Kurve $y = y(x)$ begrenzt wird, wo $y(x)$ eine periodische, stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktion von $x$ ist. Die Periode von $y(x)$ bezeichnen wir mit $L$. Mögen auf dem Rand des Gebietes $\Omega$ äußere Kräfte wirken, die sich ebenfalls periodisch ändern und zwar mit derselben Periode $L$. Wie man zeigen kann[2]), lassen sich die Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ in der Form

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \beta z, \qquad \psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi'(z) + \bar{\beta}\varkappa z \tag{1}$$

darstellen. Darin sind $\varphi_0(z)$ und $\psi_0(z)$ periodische Funktionen mit der Periode $L$; ferner ist $\varkappa = 4 - 4\sigma$ ($\sigma$ ist die Poissonsche Zahl) für ebene Deformation und $\varkappa = \dfrac{3 - \sigma}{1 + \sigma}$ für den verallgemeinerten ebenen Spannungszustand. Endlich ist

$$\beta = \frac{i(X + iY)}{(1 + \varkappa)L}, \tag{2}$$

wo $X$ bzw. $Y$ die $x$- bzw. $y$-Komponente des Hauptvektors der äußeren Kräfte ist, die auf der Seite der positiven Normalen auf den einer Periode entsprechenden Bogen des Randes wirken[3]).

---

[1]) Es genügt, daß $g'(\zeta)$ einer Lipschitz-Bedingung mit positivem Exponenten genügt.

[2]) Siehe das Buch [7] des Verfassers.

[3]) Diesen Bogen bezeichnen wir mit $C$.

Wir setzen (1) und (2) in die Randbedingung des ebenen Problems der Elastizitätstheorie,

$$\varphi(\zeta) + \overline{\zeta\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = i\int_{\zeta_0}^{\zeta} (X_\nu + i\,Y_\nu)\,d\sigma, \quad d\sigma = |d\zeta|,$$

ein, wo $\zeta$ ein Punkt des Bogens $C$ ist und $X_\nu$ und $Y_\nu$ die Spannungskomponenten sind, die auf diesen Bogen wirken; damit geht diese Randbedingung in die Form

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \overline{\zeta})\,\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta) \tag{3}$$

über, wo $f(\zeta)$ eine gegebene stetige und periodische Funktion des Punktes $\zeta$ ist. Die Transformation

$$e^{\frac{2\pi i}{L} z} = t \tag{4}$$

überführt den Streifen $0 \le x \le L$ in die längs der positiven reellen Halbachse aufgeschnittene $t$-Ebene und den Bogen $C$ in eine geschlossene Kurve $\Gamma$. Wir nehmen an, daß das elastische Medium das Gebiet über der Kurve $y = y(x)$ einnimmt; dann geht der von dem elastischen Medium eingenommene Teil des Streifens $0 \le x \le L$ in das Gebiet $\Sigma'$ über, das innerhalb von $\Gamma$ gelegen und längs der positiven reellen Achse aufgeschnitten ist. Die Funktionen $\Phi(t) = \varphi_0\left(\frac{L}{2\pi i}\ln t\right)$ und $\Psi(t) = \psi_0\left(\frac{L}{2\pi i}\ln t\right)$ sind in $\Sigma'$ holomorph. Da sie in $z$ periodisch sind, nehmen diese Funktionen identische Werte in den geometrisch zusammenfallenden Punkten des Schnittes an und sind deshalb über den Schnitt stetig fortsetzbar. Aber dann sind diese Funktionen bekanntlich analytisch über den Schnitt fortsetzbar und in dem ganzen innerhalb von $\Gamma$ liegenden Gebiet $\Sigma$ holomorph. Das Problem führt auf die Bestimmung von in $\Sigma$ holomorphen Funktionen $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$, die auf $\Gamma$ der Randbedingung

$$\Phi(\tau) - 2\overline{\tau}\ln|\tau|\,\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau); \quad F(\tau) = f\left(\frac{L}{2\pi i}\ln\tau\right) \tag{5}$$

genügen. Wir kommen auf die Gleichung (5), wenn wir in (3)

$$\zeta = \frac{L}{2\pi i}\ln\tau$$

setzen.

Wir wenden auf unser Problem ein Verfahren an, analog dem von D. I. SCHERMAN[1]) bei seiner Herleitung der Gleichungen von LAURICELLA verwendeten. Wir suchen $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ in der Form

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - t}\,d\sigma, \qquad \Phi'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - t}\,d\sigma.$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - t}\,d\sigma + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\sigma\ln|\sigma|}{\sigma - t}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma, \tag{6}$$

[1]) D. I. SCHERMAN [1], siehe auch das Buch [7], § 56 des Verfassers.

wo $\sigma$ die komplexe Koordinate eines Punktes auf $\Gamma$ bedeutet und $\omega(\sigma)$ eine unbekannte Funktion des Punktes $\sigma$ ist.

Wir bilden jetzt den Ausdruck

$$\Phi(t) - 2\bar{t} \ln |t| \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)},$$

wo $t$ ein Punkt innerhalb von $\Gamma$ ist:

$$\Phi(t) - 2\bar{t} \ln |t| \overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - t} \, d\sigma$$

$$+ \frac{\bar{t} \ln |t|}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\bar{\sigma} - \bar{t}} \, d\bar{\sigma} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\sigma} - \bar{t}} \, d\bar{\sigma} - \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\bar{\sigma} \ln |\sigma|}{\bar{\sigma} - \bar{t}} \overline{\omega'(\sigma)} \, d\bar{\sigma}.$$

Wir nehmen jetzt an, daß $t \to \tau$ gilt, wo $\tau$ ein Punkt der Kurve $\Gamma$ ist. Unter Verwendung des bekannten Satzes über den Grenzwert eines Integrals vom CAUCHYschen Typ erhalten wir

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau} \ln |\tau| \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)}$$
$$= \omega(\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \omega(\sigma) \, d \ln \frac{\sigma - \tau}{\bar{\sigma} - \bar{\tau}} - \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\bar{\sigma} \ln|\sigma| - \bar{\tau} \ln |\tau|}{\bar{\sigma} - \bar{\tau}} \, \overline{d\omega(\sigma)}.$$

Infolge der Gleichung (3) ist der erhaltene Ausdruck gleich $F(\tau)$. Jetzt setzen wir im ersten Integral $\sigma - \tau = re^{i\vartheta}$, während wir das zweite partiell integrieren. Wir erhalten dann eine Integralgleichung, die einem System zweier Gleichungen vom FREDHOLMschen Typ mit stetigem Kern äquivalent ist[1]);

$$\omega(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \omega(\sigma) \, d\vartheta + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \overline{\omega(\sigma)} \, \frac{d}{d\bar{\sigma}} \, \frac{\bar{\sigma} \ln |\sigma| - \bar{\tau} \ln |\tau|}{\bar{\sigma} - \bar{\tau}} \, d\bar{\sigma} = F(\tau). \tag{7}$$

Wir zeigen, daß die Gleichung (7) für beliebiges $F(\tau)$ lösbar ist. Dazu betrachten wir die homogene Gleichung

$$\omega_0(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \omega_0(\sigma) \, d\vartheta + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \overline{\omega_0(\sigma)} \, \frac{d}{d\bar{\sigma}} \, \frac{\bar{\sigma} \ln |\sigma| - \bar{\tau} \ln |\tau|}{\bar{\sigma} - \bar{\tau}} \, d\bar{\sigma} = 0 \tag{8}$$

und nehmen an, daß sie eine Lösung $\omega_0(\sigma)$ hat. Wir setzen

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_0(\sigma)}{\sigma - t} \, d\sigma,$$

$$\Psi_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega_0(\sigma)}}{\sigma - t} \, d\sigma + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\sigma \ln |\sigma|}{\sigma - t} \, \omega_0'(\sigma) \, d\sigma. \tag{9}$$

---

[1]) Man erhält dieses System, wenn man in (7) Real- und Imaginärteil trennt und $\operatorname{Re}\{\omega(\tau)\}$ und $\operatorname{Im}\{\omega(\tau)\}$ als Unbekannte ansieht.

Diese Funktionen lösen das homogene Problem der Elastizitätstheorie; wenn wir

$$\varphi_0(z) = \Phi\left(e^{\frac{2\pi i}{L}z}\right), \qquad \psi_0(z) = \Psi\left(e^{\frac{2\pi i}{L}z}\right), \qquad \psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi_0'(z)$$

setzen, ist deshalb notwendig

$$\varphi_0(z) = iaz + b, \quad \psi(z) = -\bar{b}$$

und folglich $\psi_0(z) = -iaz - \bar{b}$, wo $a$ und $b$ Konstanten sind. Da $\varphi_0(z)$ und $\psi_0(z)$ periodisch sind, ist $a = 0$ und deshalb

$$\varphi_0(z) = b, \quad \psi_0(z) = -\bar{b}.$$

Setzt man das in (9) ein, so erhält man die Identitäten

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\omega_0(\sigma) - b}{\sigma - t}\, d\sigma = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{\omega_0(\sigma)} + 2\sigma \ln|\sigma|\, \omega_0'(\sigma) + \bar{b}}{\sigma - t}\, d\sigma = 0, \quad (10)$$

die gelten, wenn $t$ innerhalb von $\Gamma$ liegt. Daraus folgt, daß die Funktionen $\delta(t)$ und $\varepsilon(t)$, die auf $\Gamma$ durch die Gleichungen

$$i\,\delta(\sigma) = \omega_0(\sigma) - b, \qquad i\varepsilon(\sigma) = \overline{\omega_0(\sigma)} + 2\sigma \ln|\sigma|\, \omega_0'(\sigma) + \bar{b} \qquad (11)$$

definiert sind, außerhalb von $\Gamma$ holomorph und für $t = \infty$ gleich Null sind. Eliminiert man $\omega_0(\tau)$ aus (11), so ergibt sich

$$\delta(\sigma) - 2\bar{\sigma} \ln|\sigma|\, \overline{\delta'(\sigma)} + \overline{\varepsilon(\sigma)} - 2bi = 0. \qquad (12)$$

Dem außerhalb von $\Gamma$ liegenden Gebiet der $t$-Ebene entspricht in der $z$-Ebene der unter $C$ liegende Teil des Streifens $0 \leq x \leq L$. Gleichung (12) besagt, daß $\delta(t)$ und $\varepsilon(t) + 2\bar{b}i$ das periodische Problem der Elastizitätstheorie beim Fehlen äußerer Kräfte für das unter der Kurve $y = y(x)$ liegende Gebiet lösen. Dann ist

$$\delta(t) = b', \qquad \varepsilon(t) + 2\bar{b}i = -\bar{b}'.$$

Da $\delta(\infty) = 0$ ist, wird $b' = 0$ und folglich ist $\delta(\sigma) \equiv 0$. Ferner ist $\varepsilon(\infty) = 0$ und deshalb $b = 0$; damit folgt $\omega_0(\sigma) \equiv 0$ aus (11). Die homogene Integralgleichung (8) hat als einzige Lösung $\omega_0(\sigma) \equiv 0$. Daraus folgt, daß die Gleichung (7) eine Lösung, und zwar eine eindeutige für jede beliebige Funktion $F(\tau)$ besitzt.

Trennt man (7) in Real- und Imaginärteil und nimmt die Funktionen $\omega_1(\tau) = \text{Re}\{\omega(\tau)\}$ und $\omega_2(\tau) = \text{Im}\{\omega(\tau)\}$ als Unbekannte, so erhält man ein System von FREDHOLMschen Integralgleichungen in der Form

$$\omega_1(\tau) + \int\limits_{\Gamma} \{K_{11}(\tau, \sigma)\, \omega_1(\sigma) + K_{12}(\tau, \sigma)\, \omega_2(\sigma)\}\, ds_\sigma = F_1(\tau),$$

$$\omega_2(\tau) + \int\limits_{\Gamma} \{K_{21}(\tau, \sigma)\, \omega_1(\sigma) + K_{22}(\tau, \sigma)\, \omega_2(\sigma)\}\, ds_\sigma = F_2(\tau), \qquad (13)$$

$$ds_\sigma = |d\sigma|,$$

wo die Kerne $K_{mn}(\tau, \sigma)$ stetig sind und wo

$$F_1(\tau) = \operatorname{Re}\{F(\tau)\}, \qquad F_2(\tau) = \operatorname{Im}\{F(\tau)\}$$

ist. Wie wir gezeigt haben, ist das System (13) eindeutig lösbar. Die lösenden Kerne dieses Systems, die wir mit $R_{mn}(\tau, \sigma)$ bezeichnen, sind stetig wegen der Stetigkeit der Kerne $K_{mn}(\tau, \sigma)$. Die Lösung des Systems (13) hat die Form

$$\omega_1(\tau) = F_1(\tau) + \int_\Gamma \{R_{11}(\tau, \sigma)\, F_1(\sigma) + R_{12}(\tau, \sigma)\, F_2(\sigma)\}\, ds_\sigma,$$

$$\omega_2(\tau) = F_2(\tau) + \int_\Gamma \{R_{21}(\tau, \sigma)\, F_1(\sigma) + R_{22}(\tau, \sigma)\, F_2(\sigma)\}\, ds_\sigma.$$

Den zweiten Ausdruck multiplizieren wir mit $i$ und addieren ihn zum ersten. Mit den Bezeichnungen $R_{11} + iR_{21} = R_1$, $R_{12} + iR_{22} = R_2$ gilt

$$\omega(\tau) = F(\tau) + \int_\Gamma \{R_1(\tau, \sigma)\, F_1(\sigma) + R_2(\tau, \sigma)\, F_2(\sigma)\}\, ds_\sigma. \tag{14}$$

Wir legen unserem Problem den Hilbert-Raum $L_2(\Gamma)$ zugrunde.[1] Die Kerne $R_1$ und $R_2$ sind beschränkt, da sie stetig sind. Daraus folgt

$$\int_\Gamma \int_\Gamma |R_k(\tau, \sigma)|^2\, ds_\sigma\, ds_\tau < B^2, \qquad k = 1, 2,$$

wo $B$ eine Konstante ist. Aus Formel (14) folgt $\|\omega\| \leq \|F\| + B(\|F_1\| + \|F_2\|)$. Weiter gilt

$$\|F\|^2 = \int_\Gamma |F(\tau)|^2\, ds_\tau = \int_\Gamma \{F_1^2(\tau) + F_2^2(\tau)\}\, ds_\tau = \|F_1\|^2 + \|F_2\|^2.$$

Daraus ergibt sich $\|F_1\| \leq \|F\|$, $\|F_2\| \leq \|F\|$. Das liefert

$$\|\omega\| \leq B_1 \|F\|, \qquad B_1 = 1 + 2B. \tag{15}$$

Aus der zweiten Formel (6) folgt, daß in jedem abgeschlossenen, ganz im Innern von $\Omega$ liegenden Gebiet Abschätzungen der Form

$$|\Phi(t)| \leq D_1 \|\omega\|,$$
$$|\Psi(t)| \leq D_1 \|\omega\|, \qquad D_1, D_2 = \text{const}$$

gelten[2] oder, wenn man die Abschätzung (15) ausnutzt, der Form

$$|\Phi(t)| \leq D \|F\|,$$
$$|\Psi(t)| \leq D' \|F\|. \tag{16}$$

---

[1] Mit demselben Erfolg kann man den Raum $L_2(p, \Gamma)$ mit beliebiger beiderseits durch positive Zahlen beschränkter Belegung $p$ einführen. Wir verwenden ihn in § 93.

[2] Um die Abschätzung für $|\Psi(t)|$ zu erhalten, muß man zuerst das zweite Integral in dem Ausdruck für $\Psi(t)$ partiell integrieren.

Ferner gilt ebenfalls auf Grund der Formel (15) und des Lemmas 1 des § 86

$$\|\Phi\| \leq D_0 \|F\|, \qquad D_0 = \text{const.} \tag{17}$$

Wir machen jetzt folgende Anmerkung. Durch die Randbedingung (5) sind $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ nicht völlig eindeutig bestimmt; man kann $\Phi(t)$ durch $\Phi(t) + A$ und $\Psi(t)$ durch $\Psi(t) - \bar{A}$ ersetzen, wo $A$ eine willkürliche Konstante ist. Bei unserem Lösungsverfahren wird diese Willkür durch die spezielle Darstellung der Funktionen $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ mittels der Formeln (6) beseitigt, und eben für die Funktionen, die durch diese Formeln definiert sind, sind die Abschätzungen (16) und (17) aufgestellt worden. Wir zeigen jetzt, daß die genannten Abschätzungen ihre Gültigkeit behalten (natürlich bei geänderten Werten der Konstanten $D$, $D'$ und $D_0$), wenn man $\Phi(t)$ so normiert, daß $\Phi(0) = 0$ wird. Um nämlich diese Normierung zu erreichen, braucht man von der durch Formel (6) definierten Funktion $\Phi(t)$ nur die Konstante

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma$$

zu subtrahieren. Zur Funktion $\Psi(t)$ muß man

$$\bar{A} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\bar{\sigma}}\, d\bar{\sigma}$$

addieren. Bezeichnet man die neuen Funktionen mit $\Phi_1(t)$ und $\Psi_1(t)$, so hat man

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - t}\, d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma = \Phi(t) - A,$$

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - t}\, d\sigma$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\sigma \ln(\sigma)}{\sigma - t}\, \omega'(\sigma)\, d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\bar{\sigma}}\, d\bar{\sigma} = \Psi(t) - \bar{A}.$$

Jetzt ist

$$\|\Phi_1(t)\| \leq \|\Phi(t)\| + \|A\| \leq D_0 \|F\| + \|A\|.$$

Weiter gilt

$$\|A\|^2 = \int_\Gamma |A|^2\, ds_\sigma = |A|^2 l, \tag{18}$$

wo $l$ die Länge der Kurve $\Gamma$ ist. Andererseits ist

$$|A|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \int_\Gamma \frac{|\omega(\sigma)|}{|\sigma|}\, ds_\sigma \right\}^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \frac{ds_\sigma}{|\sigma^2|} \int_\Gamma |\omega(\sigma)|^2\, ds_\sigma.$$

Wir bezeichnen mit $\delta$ den kleinsten Abstand des Koordinatenanfangspunktes von $\Gamma$. Dann wird $\frac{1}{\omega(\sigma)} \leq \frac{1}{\delta}$ und $|A|^2 \leq \frac{l}{4\pi^2\delta^2} \|\omega\|^2$. Setzt man das in (18) ein und nutzt die Abschätzung (15) aus, so erhält man $\|A\| \leq \frac{B_1 l}{2\pi\delta} \|F\|$. Daraus folgt

$$\|\Phi_1\| \leq C_0 \|F\|, \qquad C_0 = D_0 + \frac{B_1 l}{2\pi\delta}.$$

Demnach gilt für $\Phi_1(t)$ eine Abschätzung vom Typ (17). Ganz analog zeigt man, daß $\Phi_1(t)$ und $\Psi_1(t)$ Abschätzungen vom Typ (16) besitzen.

Die Abschätzungen (16) und (17) gestatten es, die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf unser Problem zu begründen. Wir setzen näherungsweise

$$\Phi(t) \approx \Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k, \qquad \Psi(t) \approx \Psi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k;$$

wir führen die Bezeichnung

$$F_n(\tau) = \Phi_n(\tau) - 2\bar{\tau} \ln|\tau| \overline{\Phi_n'(\tau)} + \overline{\Psi_n(\tau)}$$

ein und bestimmen die Koeffizienten $a_k$ und $b_k$ aus der Bedingung

$$\|F - F_n\|^2 = \min. \tag{19}$$

Wiederholt man die Überlegungen des § 91, so findet man $\|F - F_n\| \to 0$. Daraus ergibt sich auf Grund der Abschätzungen (16) und (17), daß $\|\Phi - \Phi_n\| \to 0$ gilt, und daß $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$ und $\Psi_n(t) \to \Psi(t)$ gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $\Gamma$ liegenden Gebiet gilt.

## § 93. Die Spannungen in einem elastischen Gebiet mit sinusförmiger Begrenzung

Zur Illustration des Verfahrens betrachten wir den Fall, daß das elastische Medium ein Gebiet ausfüllt, das über der Sinuskurve $y = \sin x$ gelegen ist.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, daß auf dem Rand des Gebietes nur Normalkräfte wirken, welche sich nach dem Gesetz

$$Y_\nu = -\frac{q \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \qquad q = \text{const} \tag{1}$$

periodisch ändern. Dann ist

$$f(s) = i \int (X_\nu + i Y_\nu)\, ds = q \sin x. \tag{2}$$

Die Transformation $t = e^{iz}$ überführt den Sinusbogen $0 \leq x \leq 2\pi$ in eine Kurve $\Gamma$, deren Gleichung ($x$ spielt hier die Rolle eines Parameters)

$$\tau = e^{i(x + i \sin x)} = e^{-\sin x} (\cos x + i \sin x) \tag{4}$$

ist. Die Gleichung (5) des § 92 hat in unserem Falle die Form

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau} \ln|\tau| \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = -q \ln|\tau|. \tag{5}$$

Der Rand $\Gamma$ ist symmetrisch bezüglich der imaginären Achse; wenn daher der Punkt $\tau$ auf $\Gamma$ liegt, dann liegt auch der Punkt $-\overline{\tau}$ auf $\Gamma$. Wir ersetzen in (5) $\tau$ durch $-\overline{\tau}$, und in der so gewonnenen Gleichung ersetzen wir alle Glieder durch ihre konjugierten:

$$\overline{\Phi(-\overline{\tau})} + 2\overline{\tau}\ln|\tau|\,\Phi'(-\overline{\tau}) + \Psi(-\overline{\tau}) = -q\ln|\tau|. \tag{6}$$

Gleichung (6) besagt, daß gleichzeitig mit den Funktionen $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ auch die Funktionen $\overline{\Phi(-\overline{t})}$ und $\overline{\Psi(-\overline{t})}$ unser Problem lösen. Nun sind die Funktionen $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ eindeutig bestimmt, sofern eine Normierungsbedingung, z. B. der Form $\Phi(0) = 0$, erfüllt ist. Daraus folgt

$$\overline{\Phi(-\overline{t})} = \Phi(t), \quad \overline{\Psi(-\overline{t})} = \Psi(t). \tag{7}$$

Wenn man $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ in eine Reihe nach Polynomen entwickelt,

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}z^k, \qquad \Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{nk}z^k,$$

dann kann man infolge (7)

$$a_{nk} = (-1)^k\,\overline{a}_{nk}, \quad b_{nk} = (-1)^k\,\overline{b}_{nk} \tag{8}$$

annehmen. Daraus folgt, daß die Koeffizienten bei geraden Potenzen von $t$ reell, die bei ungeraden rein imaginär sind. Wir werden die Näherungswerte von $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ in Form von Polynomen gerader Potenzen suchen. Infolge des oben Gesagten kann man folgenden Ansatz machen:

$$\Phi(t) = ia_1t + a_2t^2 + ia_3t^3 + a_4t^4,$$
$$\Psi(t) = a_5 + ia_6t + a_7t^2 + ia_8t^3 + a_9t^4,$$

wo die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_9$ reell sind. Die Bedingung (19) des § 92 nimmt die Form

$$\|ia_1\tau + a_2\tau^2 + ia_3\tau^3 + a_4\tau^4 - 2\overline{\tau}\ln|\tau|\,(-ia_1 + 2a_2\overline{\tau} - 3ia_3\overline{\tau}^2 + 4a_4\overline{\tau}^3) + a_5 - ia_6\overline{\tau} + a_7\overline{\tau}^2 - ia_8\overline{\tau}^3 + a_9\overline{\tau}^4\|^2 = \min \tag{9}$$

an.

Wir bezeichnen mit $\varphi_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots, 9$ den Faktor von $a_k$ unter dem Normzeichen in (9), so daß z. B.

$$\varphi_1(\tau) = i(\tau + 2\overline{\tau}\ln|\tau|), \qquad \varphi_2(\tau) = \tau^2 - 4\overline{\tau}^2\ln|\tau| \tag{10}$$

usw. gilt. Die Bedingung (9) nimmt dann die einfachere Form

$$\left\|\sum_{k=1}^{9} a_k\varphi_k + q\ln|\tau|\right\|^2 = \min \tag{11}$$

an. Daraus erhalten wir bei Berücksichtigung des Umstandes, daß die Koeffizienten $a_k$ reell sind, das System

$$\sum_{k=1}^{9} a_k \operatorname{Re}\{(\varphi_k, \varphi_j)\} = -q \operatorname{Re}\{(\ln|\tau|, \varphi_j)\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 9. \tag{12}$$

Wir führen den Raum $L_2(p, \Gamma)$ mit der Belegung

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

ein. Dann kann die Berechnung der Integrale, die in den Koeffizienten des Systems (12) auftreten, ziemlich einfach mit Hilfe der bekannten Formel

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} \cos m\theta \, d\theta = i^m J_m(z)$$

ausgeführt werden, die für ganzes $m$ gilt. Hier ist $J_m$ die Bessel-Funktion erster Art mit dem Index $m$. Ersetzt man $z$ durch $in$, so geht diese Formel in die Form

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-n\cos\theta} \cos m\theta \, d\theta = i^m J_m(in)$$

über.

Wir berechnen z. B. die Größe $(\varphi_1, \varphi_1)$, die den Koeffizienten bei $a_1$ in der ersten Gleichung des Systems (12) darstellt. Wir haben

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_\Gamma (\tau + 2\bar{\tau}\ln|\tau|)(\bar{\tau} + 2\tau\ln|\tau|) \frac{ds_\tau}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

$$= \int_\Gamma \{|\tau|^2 + 4|\tau|^2 \ln^2|\tau| + 2(\tau^2 + \bar{\tau}^2)\ln|\tau|\} \frac{ds_\tau}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Wir führen $x$ als Integrationsveränderliche durch die Formel $\tau = e^{i(x + i\sin x)}$ ein. Dann wird

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^{2\pi} e^{-3\sin x}(1 + 4\sin^2 x - 4\sin x\cos 2x)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-3\sin x}(3 + 2\sin x - 2\cos 2x - 2\sin 3x)\, dx.$$

Wir machen die Substitution $x = \frac{\pi}{2} + y$; infolge der Periodizität des Integranden kann man $-\pi$ und $\pi$ als Integrationsgrenzen nehmen:

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-3\cos y} (3 + 2\cos y + 2\cos 2y + 2\cos 3y)\, dy$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} e^{-3\cos y} (3 + 2\cos y + 2\cos 2y + 2\cos 3y)\, dy$$

$$= 2\pi\,[3J_0(3i) + 2iJ_1(3i) - 2J_2(3i) - 2iJ_3(3i)].$$

Nach den Tafeln von Jahnke und Emde ([1], Seite 342) erhält man $(\varphi_1, \varphi_1) = 2\pi\,(3 \cdot 4{,}8808 - 2 \cdot 3{,}9534 + 2 \cdot 2{,}2452 - 2 \cdot 0{,}9598) = 18{,}6128\pi$. Genauso erhält man

$$(\varphi_1, \varphi_2) = i \int_{\Gamma} (\tau + 2\bar{\tau}\ln|\bar{\tau}|)\,(\bar{\tau}^2 - 4\tau^2 \ln|\tau|)\,\frac{ds_\tau}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

$$= \int_{0}^{2\pi} e^{-4\sin x}\,\{ie^{-ix} - (2ie^{-3ix} - 4ie^{3ix})\sin x - 8ie^{ix}\sin^2 x\}\, dx.$$

Wir trennen den Realteil ab:

$$\operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{0}^{2\pi} e^{-4\sin x}\,\{\sin x - 6\sin 3x \sin x + 8\sin^3 x\}\, dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi} e^{-4\sin x}\,(7\sin x - 3\cos 2x + 3\cos 4x - 2\sin 3x\}\, dx,$$

was nach der Substitution $x = \frac{\pi}{2} + y$

$$\operatorname{Re}(\varphi_1, \varphi_2) = 2\int_{0}^{\pi} e^{-4\cos y}\,(7\cos y + 3\cos 2y + 2\cos 3y + 3\cos 4y)\, dy$$

$$= 2\pi(-7 \cdot 9{,}7595 + 3 \cdot 6{,}4222 - 2 \cdot 3{,}3373 + 3 \cdot 1{,}4163) = -102{,}9512\pi$$

ergibt.

Analog werden auch die restlichen Koeffizienten bestimmt.

Zur Berechnung der Bessel-Funktionen von imaginärem Argument wurden die Tafeln von Jahnke und Emde [1] benutzt sowie die „Tafeln der Besselschen Funktionen von komplexem Argument" (Verlag der Akademie der Wissen-

schaften der UdSSR, 1950); in den Fällen, wo die benötigten Argumentwerte in den Tafeln fehlten, wurde die bekannte Rekursionsformel

$$J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x)$$

benutzt.

In der nebenstehenden Tabelle sind die Koeffizienten und freien Glieder des Systems (12) aufgeführt.

Die Lösung des Systems (12) ist

$$a_1 = -0{,}6053;$$
$$a_2 = -0{,}1226;$$
$$a_3 = 0{,}007774;$$
$$a_4 = -0{,}002533;$$
$$a_5 = 0{,}01649;$$
$$a_6 = -0{,}3763;$$
$$a_7 = 0{,}2241;$$
$$a_8 = -0{,}1723;$$
$$a_9 = 0{,}04594.$$

Die der konstruierten Näherungslösung entsprechende Größe (11) ist gleich $0{,}0159\pi q^2$. Wir bemerken, daß

$$\|\ln|\tau|\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x e^{-\sin x}\, dx = 1{,}4018\pi$$

gilt. Daraus ist ersichtlich, daß die gebildete Näherung die Randbedingung mit einem mittleren Fehler von

$$\sqrt{\frac{0{,}0159}{1{,}4018}} \approx 10\%$$

erfüllt.

Tabelle

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | freies Glied |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18,613 | −102,95 | −339,25 | 897,26 | −2,7558 | −11,323 | 28,774 | 59,119 | −110,91 | 2,01609 |
| 2 | −102,95 | 670,49 | 2492,9 | −7343,8 | 15,162 | 64,222 | −184,47 | −440,15 | 939,67 | −14,4819 |
| 3 | −339,25 | 2492,9 | 10485 | −34528 | 40,356 | 197,78 | −668,19 | −1847,3 | 4490,7 | −42,9789 |
| 4 | 897,26 | −7343,8 | −34528 | 126150 | −89,697 | −491,45 | 1904,5 | 6001,1 | −16430 | 101,579 |
| 5 | −2,7558 | 15,172 | 40,356 | −89,697 | 2,5332 | 3,1812 | −4,4904 | −6,6746 | 10,216 | −1,13049 |
| 6 | −11,323 | 65,222 | 197,78 | −491,45 | 3,1812 | 9,7616 | −19,519 | −35,011 | 60,301 | −2,96859 |
| 7 | 28,774 | −184,47 | −668,19 | 1904,5 | −4,4904 | −19,519 | 54,480 | 122,68 | −248,02 | −4,91329 |
| 8 | 59,119 | −440,15 | −1847,3 | 6001,1 | −6,6746 | −35,011 | 122,68 | 337,19 | −799,75 | 7,83859 |
| 9 | −110,91 | 939,67 | 4490,7 | −16430 | 10,216 | 60,301 | −248,02 | −799,75 | 2187,2 | 12,4899 |

KAPITEL XI

# DIFFERENZENVERFAHREN

## § 94. Die Netzmethode

Zur Bildung angenäherter Lösungen von Differentialgleichungen werden weitgehend sogenannte *Differenzenverfahren* benutzt.

Die Idee, die allen Differenzenverfahren zugrunde liegt, ist sehr einfach. Bekanntlich kann man eine Ableitung beliebiger Ordnung als Grenzwert des Differenzenquotienten erhalten, des Quotienten aus der zugehörigen „endlichen Differenz" der Funktion und den Produkten entsprechenden Grades der Inkremente der unabhängigen Veränderlichen. So gilt z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y, z, \ldots) - u(x, y, z, \ldots)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y, z, \ldots) - 2u(x, y, z, \ldots) + u(x-h, y, z, \ldots)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \lim_{h,k\to 0} \frac{u(x+h, y+k, z, \ldots) - u(x+h, y, z, \ldots) - u(x, y+k, z, \ldots) + u(x, y, z, \ldots)}{hk}$$

usw. Daraus folgt, daß bei kleinen Differenzen der unabhängigen Veränderlichen die Ableitungen sich nur wenig von den entsprechenden Quotienten unterscheiden. Wenn wir die Ableitungen nach allen oder nach einigen Veränderlichen durch die Differenzenquotienten ersetzen, wird die Struktur der gegebenen Differentialgleichung wesentlich vereinfacht.

Von den Differenzenverfahren hat die Netzmethode am meisten Anwendung gefunden. Wir erläutern sie an einem der einfachsten Beispiele, dem des Dirichletschen Problems für die Laplacesche Gleichung in der Ebene. Es werde gefordert, eine im Gebiet $\Omega$ harmonische Funktion zu finden, die auf dem Rand $S$ gegebene Werte annimmt. Wir legen über die $x$—$y$-Ebene ein quadratisches Netz, indem wir Parallelen zur $x$- und $y$-Achse ziehen, so daß die aufeinanderfolgenden Geraden alle den gleichen Abstand $h$ voneinander haben (Abb. 20). Aus den Seiten der Netzquadrate bilden wir eine Kurve $S_h$, die die gegebene Kurve $S$ möglichst gut approximiert. Die Kurve $S_h$ umgibt ein Gebiet $\Omega_h$, das $\Omega$ nahekommt.

Wir suchen die Werte der unbekannten harmonischen Funktion nicht im ganzen Gebiet $\Omega$, sondern nur in den Knoten[1] von $\Omega_h$. Ebenso sehen wir die

[1]) Als Knoten bezeichnet man die Schnittpunkte des Netzes.

Funktion nicht auf $S$, sondern in den Knoten von $S_h$ als gegeben an; dazu übertragen wir die auf $S$ gegebenen Werte der Funktion $u$ auf $S_h$, indem wir z. B. festsetzen, daß die Funktion in einem beliebigen Knoten $P$ von $S_h$ denselben Wert annimmt wie in dem am nächsten bei $P$ liegenden Punkt $P'$ der Kurve $S$. In den Punkten von $\Omega_h$ ersetzen wir die partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten. Wenn also $P(x, y) \in \Omega_h$ gilt, dann setzen wir

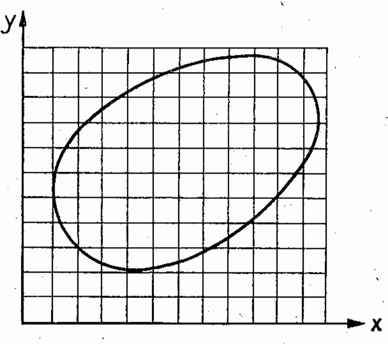
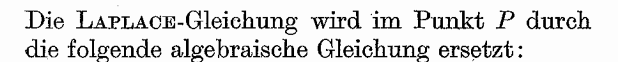


Abb. 20

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + (x-h, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}.$$



Die Laplace-Gleichung wird im Punkt $P$ durch die folgende algebraische Gleichung ersetzt:

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0. \quad (1)$$

Solche Gleichungen gibt es so viele, wie es Punkte in $\Omega_h$ gibt. Die Gleichung (1) ist homogen, wenn alle zu $P$ benachbarten Netzpunkte zu $\Omega_h$ gehören, sie ist inhomogen, wenn zu $P$ benachbarte Punkte zu $S_h$ gehören. So wird nach der Netzmethode die Laplace-Gleichung durch ein System sehr vieler linearer algebraischer Gleichungen ersetzt.

Anstelle des quadratischen Netzes kann man ein rechteckiges verwenden, indem man die „Schrittweite" in Richtung verschiedener Achsen verschieden wählt. Man kann auch polygonale Netze oder sogar krummlinige benutzen. Es versteht sich von selbst, daß sich die Netzmethode zur Lösung von Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen und unbekannten Funktionen verwenden läßt. Auch der Typ der Gleichung spielt keine wesentliche Rolle, die Netzmethode läßt sich mit Erfolg sowohl auf elliptische als auch auf hyperbolische und parabolische Gleichungen anwenden.

Über die Netzmethode existiert eine außerordentlich umfangreiche Literatur, in der theoretische Fragen wie auch Fragen der Anwendung der Netzmethode ausführlich untersucht wurden. Wir werden diese Probleme in unserem Buch daher nicht berühren und begnügen uns mit einem kurzen Verzeichnis der wichtigsten Arbeiten und den nötigen Literaturhinweisen. Es ist schwer zu sagen, wann die Netzmethode zum ersten Male angewendet wurde. Jedenfalls stellt das bekannte Verfahren von Euler zur näherungsweisen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bei gegebenen Anfangswerten im wesentlichen eine Variante der Netzmethode dar. Ihre gewaltige Entwicklung nahm die Methode jedoch im XX. Jahrhundert. Die weite Verbreitung der Methode beruht auf ihrer Einfachheit und ihrer Universalität. Auf die Schwierigkeit der Berechnungen der Randwertaufgaben wirkt sich diese oder jene Form der Begrenzung des Gebietes wenig aus; wenig Einfluß haben auch die Eigenschaften der Koeffizienten der Gleichung. In der Ingenieurpraxis wird die Netzmethode vielfach zur Berechnung elastischer Systeme angewendet; wir erwähnen in diesem Zusammenhang die

Bücher von G. Markus [1] und P. M. Warwak [1], in denen eine Reihe interessanter Anwendungen der Netzmethode auf Aufgaben der Elastizitätstheorie enthalten sind; in der Monographie von P. M. Warwak findet sich eine umfangreiche Bibliographie. Auch das Buch von F. Bleich und E. Melan [1] verdient erwähnt zu werden. Umfangreiches Material über die Netzmethode findet sich in dem Handbuch von D. J. Panow [1]. Einige Angaben über das Verfahren kann man auch in dem Aufsatz [2] von D. J. Panow finden. Sehr ausführlich wird die Anwendung der Netzmethode auf elliptische Gleichungen in dem Buch von L. W. Kantorowitsch und W. I. Krylow [1] dargestellt.

Im letzten Jahrzehnt wurde die Netzmethode häufig zur Lösung einer Reihe schwieriger theoretischer Probleme benutzt. Den Anstoß für diese Entwicklung gab im Jahre 1926 L. A. Ljusternik durch einen bemerkenswerten Artikel [1], in dem er unter Verwendung der Netzmethode eine Lösung des Dirichletschen Problems bei außerordentlich allgemeinen Voraussetzungen über die Natur des Randes gab. Gleichzeitig bewies L. A. Ljusternik die gleichmäßige Konvergenz der mit der Netzmethode gewonnenen Näherungslösung gegen die exakte Lösung.[1]) Wir weisen noch auf den Artikel [3] desselben Verfassers hin, in dem ein Verfahren zur Verbesserung der Konvergenz der Netzmethode angegeben wird. Der Fall der allgemeinen elliptischen Gleichung mit $m$ Veränderlichen wird in der Arbeit von I. G. Petrowski [1] nach der Netzmethode behandelt. In der Arbeit [1] von R. Courant, K. Friedrichs und G. Levi wird die Netzmethode auf elliptische und auch auf hyperbolische lineare Gleichungen angewendet. Das in dieser Arbeit angewandte Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeiten auch auf den vieldimensionalen Fall übertragen. Man kann auch die Arbeit [1] von S. E. Mikeladse erwähnen, in der ihr Verfasser einige Fehlerabschätzungen für die Netzmethode angibt. In dem Buch von O. A. Ladyshenskaja [1] und in einer Reihe der letzten Arbeiten desselben Verfassers wird die Netzmethode zur Lösung von Randwertproblemen für hyperbolische und parabolische Gleichungen sehr allgemeinen Typs verwendet.

In einigen Teilen hängt auch das kürzlich erschienene Buch von L. W. Kantorowitsch, W. I. Krylow und K. E. Tschernin [1] mit der Netzmethode zusammen.

Oben wurde gezeigt, daß die Netzmethode auf algebraische Systeme mit einer sehr großen Zahl (bis zu mehreren hundert) von Gleichungen mit ebensoviel Veränderlichen führt.[2]) Offensichtlich kann die Methode auf praktische Brauchbarkeit Anspruch erheben, wenn sich ein hinreichend einfaches Verfahren zur Lösung solcher Systeme angeben läßt. Für Gleichungssysteme, die man mit der Netzmethode aus der Laplace-Gleichung erhält, kann man ein einfaches konvergentes Iterationsverfahren durchführen. Eine Darstellung der diesbezüglichen Probleme findet der Leser z. B. in dem Artikel [3] von D. J. Panow [3]. In dem oben zitierten Artikel von S. E. Mikeladse [1] wird ein konvergentes Iterationsverfahren für Gleichungen sehr allgemeinen Typs angegeben. Schließlich wird ein sehr interessantes Verfahren für den Fall der Gleichungen von Laplace und Poisson in einem Artikel angegeben, der von S. A. Gerschgorin [1] stammt; er

---

[1]) Der Artikel [1] von L. A. Ljusternik wurde in neuer Fassung und ins Russische übersetzt in der Zeitschrift „Uspechi matem. nauk" nachgedruckt; siehe L. A. Ljusternik [2].

[2]) Wenigstens für elliptische Differentialgleichungen.

schlug ein besonderes elektrisches Netz vor, das die Lösung des oben genannten Systems automatisch liefert. Das Verfahren von S. A. GERSCHGORIN kann sowohl für ebene als auch für räumliche Probleme verwendet werden. Wir erwähnen noch die Arbeit [1] von M. R. SCHURA-BURA, in der eine wahrscheinlichkeitstheoretische Abschätzung des Fehlers für das Verfahren des elektrischen Netzes gegeben wird.

## § 95. Grundlagen der Geradenmethode

Die Geradenmethode, der wir die §§ 95 bis 98 widmen, steht ungefähr in demselben Verhältnis zur Netzmethode, wie das Verfahren von L. W. KANTOROWITSCH (§ 15) zum RITZschen Verfahren. Wir erläutern die Grundidee dieser Methode am Beispiel einer Gleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Es sei ein Integral der Gleichung

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \tag{1}$$

in einem Gebiet $\Omega$ zu bestimmen. Genauer nehmen wir an, daß die Gleichung (1) elliptisch und das Gebiet $\Omega$ endlich ist. Auf der Berandung $S$ dieses Gebietes müssen irgendwelche Randbedingungen gegeben sein. Betreffs des Randes $S$ nehmen wir an, obwohl das nicht notwendig ist, daß jede zur $x$-Achse parallele Gerade ihn höchstens in zwei Punkten schneidet.

Wir ziehen zur $x$-Achse parallele Geraden, und zwar so, daß der Abstand zweier benachbarter Geraden konstant und gleich $k$ ist. Mögen dabei die Geraden

$$y = y_0 + kh = y_k; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n \tag{2}$$

das Gebiet $\Omega$ schneiden. In Gleichung (1) substituieren wir $y = y_k$ und ersetzen die Ableitungen nach $y$ durch die entsprechenden Differenzenquotienten. Man kann z. B.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_k} = \frac{1}{h}\,[u(x, y_{k+1}) - u(x, y_k)]$$

setzen, oder bei Einführung der Bezeichnung $u(x, y_k) = u_k(x)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_k} = \frac{1}{h}\,[u_{k+1}(x) - u_k(x)]. \tag{3}$$

Analog kann man z. B.

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{y=y_k} = \frac{1}{h}\,[u'_{k+1}(x) - u'_k(x)],$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_k} = \frac{1}{h^2}\,[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)]$$

setzen. Wenn man das in Gleichung (1) einführt, worin $y = y_k$ gesetzt wird, dann erhält man ein System von $n$ gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit den $n + 2$ Unbekannten $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x), u_{n+1}(x)$.

Wenn das Gebiet $\Omega$ die in Abb. 21 (siehe Seite 439) dargestellte Form hat, dann können die beiden fehlenden Gleichungen aus den Randbedingungen auf den Geradenstücken $AB$ und $CD$ gewonnen werden; im allgemeinen Falle ist diese Frage noch nicht vollständig geklärt; was die Randbedingungen für die Funktionen $u_k(x)$ angeht, so ergeben sie sich in natürlicher Weise aus den Randbedingungen für die Funktion $u(x, y)$.

Analog kann man lineare Gleichungen höherer Ordnung sowie Gleichungen von anderem als elliptischem Typ auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen. Es ist auch nicht schwierig, die Geradenmethode auf mehr Dimensionen auszudehnen.

Die Geradenmethode kann man als Grenzfall der Netzmethode ansehen, wenn man von einem rechteckigen (nicht quadratischen) Netz ausgeht und annimmt, daß in Richtung der $x$-Achse die Schrittweite des Netzes gegen Null geht. Das Konvergenzproblem der Geradenmethode für elliptische Gleichungen ist unzureichend erforscht.[1] Ausführlicher ist die Frage behandelt worden, in welcher Weise die Ableitungen durch Differenzenquotienten zu ersetzen sind, damit der Fehler möglichst klein wird, sowie die Frage nach dem (in diesem oder jenem Fall) praktisch günstigsten Verfahren zur Lösung der Differentialgleichungen, auf die die Geradenmethode führt. Diesen Fragen sind die Arbeiten von M. G. Slobodjanski [1, 2] und W. N. Faddejewa [3] gewidmet. Im folgenden Paragraphen werden die Hauptergebnisse dargelegt, die die genannten Autoren gefunden haben.

Wir bemerken, daß die Anwendung der Geradenmethode zweckmäßig ist, wenn die Koeffizienten der gegebenen Gleichung konstant sind oder nur von $y$ abhängen, weil sich dann ein System linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten ergibt. Wenn die Koeffizienten der gegebenen Gleichung jedoch von $x$ abhängen, führt die Geradenmethode auf ein System linearer Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, dessen Lösung im allgemeinen große Schwierigkeiten bereitet. In diesem Falle ist es zweckmäßig, die Netzmethode anzuwenden.

## § 96. Die Differentialgleichungen der Geradenmethode[2] für die Gleichungen von Laplace und Poisson

Wir betrachten eine Funktion $u(y)$, die in einem gewissen Intervall eine hinreichend große Anzahl von Ableitungen besitzt.

Wir drücken die zweite Differenz $\Delta^2 u = u(y + 2h) - 2u(y + h) + u(y)$ durch die zweiten Ableitungen von $u$ in den Punkten $y + 2h$, $y + h$, $y$ mit einer Genauigkeit bis $O(h^6)$ aus.

---

[1] Der Beweis von M. G. Slobodjanski [2] für den Fall der Laplace-Gleichung enthält einen Fehler.

[2] In den Paragraphen 96 und 97 geben wir fast ohne Änderung einige Abschnitte des Artikels [3] von W. N. Faddejewa wieder.

Wir haben nach der TAYLORschen Formel

$$u(y + 2h) = u(y + h) + h \frac{du(y + h)}{dy} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3u(y + h)}{dy^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4u(y + h)}{dy^4} + \cdots,$$

$$u(y) = u(y + h) - h \frac{du(y + h)}{dy} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} - \frac{h^3}{6} \frac{d^3u(y + h)}{dy^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4u(y + h)}{dy^4} + \cdots.$$

Daraus ergibt sich

$$u(y + 2h) - 2u(y + h) + u(y) = h^2 \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} + \frac{h^4}{12} \frac{d^4u(y + h)}{dy^4} + O(h^6). \tag{1}$$

Nun ist jedoch

$$\frac{d^2u(y + 2h)}{dy^2} = \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} + h \frac{d^3u(y + h)}{dy^3} + \frac{h^2}{2} \frac{d^4u(y + h)}{dy^4} + \cdots,$$

$$\frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} - h \frac{d^3u(y + h)}{dy^3} + \frac{h^2}{2} \frac{d^4u(y + h)}{dy^4} - \cdots$$

und demzufolge

$$h^2 \frac{d^4u(y + h)}{dy^4} = \frac{d^2u(y + 2h)}{dy^2} - 2 \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} + \frac{d^2u(y)}{dy^2} + O(h^4).$$

Setzt man diesen Wert für die vierte Ableitung in die Formel (1) ein, so erhält man

$$\Delta^2 u = u(y + 2h) - 2u(y + h) + u(y) = \frac{5}{6} h^2 \frac{d^2u(y + h)}{dy^2} + \frac{h^2}{12} \frac{d^2u(y + 2h)}{dy^2} + \frac{h^2}{12} \frac{d^2u(y)}{dy^2} + O(h^6). \tag{2}$$

Diese Formel bildet den Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen.

Es werde gefordert, eine Funktion $u(x, y)$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

in einem Gebiet $D$ genügt bei vorgegebenen Randbedingungen auf der dieses Gebiet begrenzenden Kurve. In bezug auf diese Kurve setzen wir voraus, daß

sie hinreichend glatt ist und daß jede zur $x$-Achse parallele Gerade sie in zwei Punkten schneidet.

Wir ziehen im Abstand $h$ voneinander die zur $x$-Achse parallelen Geraden

$$y = y_1, y = y_2, \ldots, y = y_n.$$

Wir führen die Bezeichnung

$$u_k(x) = u(x, y_k)$$

ein.

Jedes Funktionentripel $u_{k-1}(x)$, $u_k(x)$, $u_{k+1}(x)$ genügt offensichtlich der Beziehung (2), die wir in der Form

$$u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x) = \frac{5}{6} h^2 \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_k}$$
$$+ \frac{h^2}{12} \left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_{k-1}} + \frac{h^2}{12} \left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_{k+1}} + O(h^6) \tag{$2_1$}$$

schreiben.

Infolge der Gleichung (3) haben wir

$$\left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_k} = -u_k''(x). \tag{$3_1$}$$

Wenn man die Werte für die Ableitungen aus Formel ($3_1$) in ($2_1$) einsetzt und die Glieder geringerer Ordnung als $h^6$ beibehält, so erhält man das System

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)]$$
$$+ \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Dieses System wurde von M. G. Slobodjanski [1, 2] angegeben.

Das System (4) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zusammen mit den Randbedingungen die $n$ unbekannten Funktionen $u_k(x)$ definiert. Das System hängt nicht von der Form des Randes des Gebietes ab, für das die Lösung zu suchen ist. Die darin vorkommenden „Rand"funktionen $u_0(x)$ und $u_{n+1}(x)$ sind ganz natürlich durch die Randbedingungen dann definiert, wenn der Rand des Gebietes zur $x$-Achse parallele Abschnitte enthält (Abb. 21). Im Fall einer gekrümmten Kurve erfordert die Frage der Bestimmung der Funktionen $u_0(x)$ und $u_{n+1}(x)$ besondere Untersuchungen. Analog hat man für die Poissonsche Gleichung

$$\Delta u = f(x, y) \tag{5}$$

bei der Randbedingung $u = 0$ auf Grund der Gleichung (5)

$$\left.\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y=y_k} = -u_k''(x) + f_k(x), \tag{6}$$

wo $f_k(x) = f(x, y_k)$ ist. Deshalb hat das System zur Bestimmung der Funktion $u_k(x)$ die Form

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12} u_{k+1}''(x) + \frac{1}{12} u_{k-1}''(x) + \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)]$$

$$- f_k(x) - \frac{f_{k+1}(x) - 2f_k(x) + f_{k-1}(x)}{12} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

oder, etwas umgeordnet,

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12} u_{k+1}''(x) + \frac{1}{12} u_{k-1}''(x) + \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)]$$

$$- \frac{5}{6} f_k(x) - \frac{f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)}{12} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Indem wir uns auf die Bestimmung der Funktionen $u_k(x)$ beschränken, d. h. auf die Bestimmung der Funktion $u(y, x)$ nur auf einer Anzahl von zur $x$-Achse parallelen Geraden, erhalten wir zur angenäherten Berechnung dieser Funktionen ein System von $n$ linearen Differentialgleichungen.

Die Lösung dieses Systems liefert im allgemeinen wesentlich genauere Ergebnisse als die Lösung des Systems, das man mit der Methode endlicher Differenzen erhält.

## § 97. Der Fall trapezförmiger Gebiete

In diesem Paragraphen betrachten wir ausführlich die Anwendung der Geradenmethode auf die Integration der Poissonschen Gleichung für den Fall, daß das Gebiet die in Abb. 21 dargestellte Form hat, d. h. daß der Rand des Gebietes aus den Abschnitten $AB$ und $CD$ von zur $x$-Achse parallelen Geraden besteht, sowie aus den Bogen $AC$ und $BD$, deren jeder von einer beliebigen Parallelen zur $x$-Achse in nicht mehr als einem Punkt geschnitten wird.

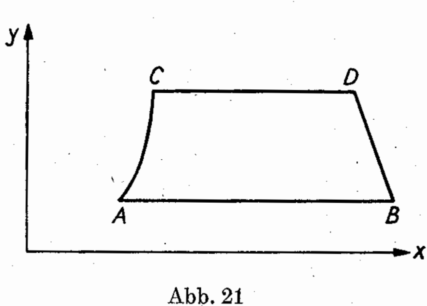


Abb. 21

Wir betrachten die Poissonsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 u\,(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u\,(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y)$$

mit der Randbedingung $u = 0$.

Wie wir bemerkt haben, ist in diesem Falle $u_0(x) = u_{n+1}(x) = u_0''(x) = u_{n+1}''(x) = 0$, und deshalb erhalten wir ein vollständig bestimmtes System zur Ermittlung

von $u_k(x)$:

$$\frac{5}{6}u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \frac{1}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] - F_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

mit

$$F_k(x) = \frac{5}{6}f_k(x) + \frac{f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)}{12}. \tag{2}$$

Das System (1) ist ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir transformieren es in ein System, in dem jede Gleichung nur eine unbekannte Funktion enthält.[1])

Dazu betrachten wir die Vektoren

$$\left.\begin{aligned} U &= [u_1(x),\ u_2(x), \ldots, u_n(x)], \\ F &= [F_1(x),\ F_2(x), \ldots, F_n(x)]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Mit $A$ und $M$ bezeichnen wir die Matrizen

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & 0\ldots0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0\ldots0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots\frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{Vmatrix}, \quad M = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0\ldots0 & 0 \\ 1 & -2 & 1\ldots0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Dann kann man das System (1) in der Form

$$AU'' + \frac{M}{h^2}U - F = 0 \tag{4}$$

schreiben.

Um das System (1) in ein zerfallendes zu transformieren, müssen wir die Matrizen $A$ und $M$ mit Hilfe derselben orthogonalen Transformation auf Diagonalform bringen, was möglich ist.

Es ist nämlich

$$A = E + \frac{M}{12}, \tag{5}$$

---

[1]) Die für das weitere nötigen Informationen aus der linearen Algebra kann man z. B. in dem Buch von W. N. Faddejewa [4] finden.

wo $E$ die Einheitsmatrix ist. Daraus ist ersichtlich, daß eine orthogonale Transformation einer Matrix auf Diagonalform eine ebensolche Transformation auch der anderen Matrix nach sich zieht.

Es sei nämlich $B$ eine orthogonale Transformation, die $M$ in Diagonalform überführt, d. h. es sei

$$B^{-1} M B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \qquad \text{mit} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Dann ist offensichtlich

$$B^{-1} A B = \left(1 + \frac{\lambda_1}{12},\ 1 + \frac{\lambda_2}{12},\ \ldots,\ 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right).$$

Wir bestimmen jetzt die orthogonale Transformation $B = \|b_{ks}\|$ und die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Wir haben

$$M B = B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Daraus erhalten wir bei festem $S$ zur Bestimmung der Zahlen $b_{ks}$ das System

$$b_{k-1,\,s} - 2 b_{k,\,s} + b_{k+1,\,s} = b_{ks} \lambda_s; \qquad b_0 = b_{n+1} = 0$$

oder

$$b_{k-1,\,s} + (-2 - \lambda_s) b_{k,\,s} + b_{k+1,\,s} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Zur Bestimmung aller Elemente der Matrix $B$ erhalten wir demnach $n$ Systeme der Form (6).

Damit diese Systeme nicht die Nullösung besitzen, ist es notwendig, daß ihre Determinanten gleich Null sind, d. h. ist es notwendig, daß die Zahlen $\lambda_s$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind:

$$D_n = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Wir setzen

$$-2 - \lambda = 2 \cos \theta. \tag{8}$$

Dann schreibt sich die Determinante $D_n$ in der Form

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \tag{9}$$

und kann leicht berechnet werden. Es ist nämlich

$$D_n = \frac{\sin (n+1)\,\theta}{\sin \theta}. \tag{10}$$

Um Gleichung (10) zu beweisen, entwickeln wir $D_n$ nach den Elementen der ersten Spalte. Das liefert die Differenzengleichung

$$D_n = 2 \cos 2\,\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Durch direktes Ausrechnen erhält man

$$D_1 = \frac{\sin 2\,\theta}{\sin \theta}, \qquad D_2 = \frac{\sin 3\,\theta}{\sin \theta};$$

Formel (10) entsteht jetzt durch den Übergang von $n$ zu $n+1$.

Die Forderung $D_n = 0$ ergibt $n$ Werte für $\theta$; es gilt

$$\theta_s = \frac{\pi s}{n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

und daher

$$\lambda_s = -2\left(1 + \cos \frac{\pi s}{n+1}\right) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Die Zahlen $b_{ks}$ stellen die Komponenten des Eigenvektors der Matrix $M$ für die charakteristische Zahl $\lambda_s$ dar. Sie sind durch das System (6) bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, der wiederum durch eine Normierungsbedingung bestimmt ist.

Als Lösung des Systems (6) kann man die Zahlen

$$b'_{ks} = \Delta_k^s \tag{13}$$

nehmen, wo $\Delta_k^s$ das algebraische Komplement der ersten Zeile der $k$-ten Spalte der Determinante $D_n$ ist, in der $\theta = \theta_s$ gesetzt wurde.

Setzt man nämlich $b'_{ks}$ in die Gleichungen des Systems ein, so erhält man für alle Gleichungen mit Ausnahme der $k$-ten auf der linken Seite Null als Summe der Produkte der algebraischen Komplemente einer Zeile mit den Elementen einer anderen. Die linke Seite der $k$-ten Gleichung geht in $D_n^s$ über, d. h. in die Determinante $D_n$ mit $\lambda_s$ anstelle von $\lambda$ und wird deshalb ebenfalls gleich Null.

Das algebraische Komplement $\Delta_k^s$ läßt sich leicht berechnen.

Es sei nämlich $\Delta_k$ das algebraische Komplement der ersten Zeile der $k$-ten

Spalte der Determinante $D_n$. Dann gilt

$$\Delta_k = \left|\begin{array}{cccccc:ccccc} 1 & 2\cos\theta & 1 & 0\ldots0 & 0 & & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1\ldots0 & 0 & & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots1 & 2\cos\theta & & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & & 1 & 0 & 0\ldots0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & & 2\cos\theta & 1 & 0\ldots0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & & 1 & 2\cos\theta & 1\ldots0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & & 0 & 0 & 0\ldots1 & 2\cos\theta \end{array}\right| .$$

(Über den ersten $k-1$ Spalten: $k-1$; über den letzten $n-k$ Spalten: $n-k$.)

Daraus erhält man, indem man $\Delta_k$ nach den Elementen der ersten Spalte $(k-1)$-mal entwickelt,

$$\Delta_k = (-1)^{k-1} D_{n-k} = (-1)^{k-1} \frac{\sin(n+1-k)\,\theta}{\sin\theta}.$$

Das ergibt

$$\Delta_k^s = (-1)^{k-1} \frac{\sin(n+1-k)\,\theta_s}{\sin\theta_s}. \tag{14}$$

Schließlich normieren wir die Elemente der Matrix $B$ nach den Spalten, d. h. wir bestimmen $c_s$ derart, daß

$$c_s^2 \sum_{k=1}^{n} b_{ks}'^2 = c_s^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(n+1-k)\,\theta_s}{\sin^2\theta_s} = 1$$

gilt. Man kann leicht ausrechnen, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2(n+1-k)\,\theta_s = \frac{n+1}{2}$$

ist. Das ergibt

$$c_s = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\sin\theta_s. \tag{15}$$

Demnach sind die Elemente der Transformationsmatrix

$$b_{ks} = b_{ks}' c_s = (-1)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\sin(n+1-k)\,\frac{\pi s}{n+1}$$

$$= (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\sin\frac{\pi s k}{n+1}. \tag{16}$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Matrix $B$ symmetrisch ist, und da sie auch orthogonal ist, gilt

$$B = B^* = B^{-1} = \|b_{ks}\| = \left\| (-1)^{s+k} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi k s}{n+1} \right\|. \tag{17}$$

Demnach ist

$$M = B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\, B,$$

$$A = B\left(1 + \frac{\lambda_1}{12},\quad 1 + \frac{\lambda_2}{12}, \ldots, 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right) B,$$

und deshalb hat das System (4) die Form

$$\left(1 + \frac{\lambda_1}{12}, \ldots, 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right) B U'' + \frac{1}{h^2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, B U - B F = 0.$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} BU &= V = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ BF &= G = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \end{aligned} \tag{18}$$

ein. Dann wird

$$\left(1 + \frac{\lambda_k}{12}, \ldots, 1 + \frac{\lambda_n}{12}\right) V'' + \frac{1}{h^2}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, V - G = 0.$$

Die letzte Gleichung ist den $n$ unabhängigen Gleichungen

$$\left(1 + \frac{\lambda_k}{12}\right) v_k''(x) + \frac{\lambda_k}{h^2} v_k(x) - g_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{19}$$

gleichwertig. Wir führen die Bezeichnungen

$$\alpha_k^2 = -\frac{\lambda_k}{h^2\left(1 + \frac{\lambda_k}{12}\right)} = \frac{12(1 + \cos\theta_k)}{h^2(5 - \cos\theta_k)} \tag{20}$$

und

$$\varphi_k(x) = \frac{g_k(x)}{1 + \frac{\lambda_k}{12}} = \frac{6 g_k(x)}{5 - \cos\theta_k} \tag{21}$$

ein. Dann kann man das System (19) in der Form

$$v_k''(x) - \alpha_k^2 v_k(x) - \varphi_k(x) = 0 \tag{19$_1$}$$

schreiben.

Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß sowohl der Rand des Gebietes als auch die Randbedingungen in bezug auf die $y$-Achse symmetrisch sind. Die Lösung des Systems ist eine gerade Funktion von $x$ und offensichtlich gilt $v_k = C_k \operatorname{ch} \alpha_k x + \bar{v}_k(x)$, wo $\bar{v}_k(x)$ eine gerade Partikulärlösung des Systems $(19_1)$ ist.

Eine Partikulärlösung des Systems $(19_1)$ ermittelt man zweckmäßig unmittelbar dann, z. B. mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten, wenn die Funktionen $\varphi_k(x)$ hinreichend einfache Form haben.

Man kann eine Partikulärlösung des Systems $(19_1)$ in der Form

$$\bar{v}_k(x) = \frac{1}{\alpha_k} \int_0^x \operatorname{sh} \alpha_k (x - t)\, \varphi_k(t)\, dt \tag{22}$$

darstellen.

Geht man umgekehrt zu den Funktionen $u_k(x)$ über, so erhält man auf Grund von (18)

$$U = B^{-1} V = BV$$

oder

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} v_s(x). \tag{23}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{s=1}^{n} b_{ks} C_s \operatorname{ch} \alpha_s x + \sum_{s=1}^{n} b_{ks} \bar{v}(x) \\ &= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} C_s \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi k s}{n+1} \operatorname{ch} \alpha_s x \\ &+ \int_0^x \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{k+s} \sqrt{2} \sin \frac{\pi k s}{n+1}}{\sqrt{n+1}\, \alpha_s} \operatorname{sh} \alpha_s (x - t)\, \varphi_s(t)\, dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Wir bemerken hier, daß die Lösung (24) in ihrer Form nicht von der Gestalt des Randes des Gebietes abhängt. Die Konstaten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ werden aus dem algebraischen System bestimmt, das man aus (24) nach Einsetzung der Randbedingungen erhält.

Zur Vereinfachung der Rechnung setzt man zweckmäßig

$$A_s = C_s \sqrt{\frac{2}{n+1}} \operatorname{ch} \alpha_s x_m,$$

wo $x_m$ die größte der Abszissen der Schnittpunkte der Geraden $y = y_k$ mit dem Rand des Gebietes $D$ ist. Dann schreibt sich die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin \frac{\pi k s}{n+1} A_s \frac{\operatorname{ch} \alpha_s x}{\operatorname{ch} \alpha_s x_m} \\ &+ \int_0^x \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{k+s} \sin \frac{\pi k s}{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}\, \alpha_s} \operatorname{sh} \alpha_s (x - t)\, \varphi_s(t)\, dt. \end{aligned} \tag{25}$$

Wir bemerken noch, daß man manchmal unmittelbar eine Partikulärlösung des Systems (1) finden kann. So hat z. B. im Falle des Torsionsproblems

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -1 \tag{26}$$

mit $u = 0$ auf dem Rand des Gebietes das System (1) die Form

$$\frac{5}{6}\, u_k''(x) + \frac{1}{12}\,[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \frac{1}{h^2}\,[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] + 1 = 0, \tag{27}$$

und deshalb bilden die Zahlen $a_k$, die man aus dem System

$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} + h^2 = 0 \tag{28}$$

erhält, eine Partikulärlösung. Wie man leicht erkennt, ist

$$a_k = \frac{k(n+1-k)}{2}\, h^2. \tag{29}$$

In diesem Falle werden die gesuchten Funktionen $u_k(x)$ nach der Formel

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin\frac{\pi k s}{n+1}\, A_s \frac{\operatorname{ch}\alpha_s x_k}{\operatorname{ch}\alpha_s x_m} + \frac{k(n+1-k)}{2}\, h^2 \tag{30}$$

berechnet, und unsere Aufgabe besteht nur noch in der Bestimmung der Konstanten $A_s$ aus dem linearen algebraischen System

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin\frac{\pi k s}{n+1}\, A_s \frac{\operatorname{ch}\alpha_s x_k}{\operatorname{ch}\alpha_s x_m} + \frac{k(n+1-k)}{2}\, h^2 = 0, \tag{31}$$

das man durch Erfüllung der Randbedingungen in den Randpunkten mit den Ordinaten $y_k$ erhält.

Die Zahlen $\alpha_s$, $\delta_k^s = (-1)^{k+s} \sin\frac{\pi k_s}{n+1}$, $a_k = \frac{k(n+1-k)}{2}$ hängen nur von der Anzahl der von uns gezogenen Geraden $y = y_k$ ab. In dem Artikel von W. N. Faddejewa [3] sind Tabellen dieser Größen für die Werte $n = 3, 5, 7, 11, 15$ angegeben.

## § 98. Differentialgleichungen der Geradenmethode für die biharmonische Gleichung

Die in der Überschrift dieses Paragraphen genannten Gleichungen kann man sehr leicht erhalten, indem man von der bekannten Darstellung einer beliebigen biharmonischen Funktion $u(x, y)$ durch zwei harmonische Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ ausgeht:

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + y\,\psi(x,y). \tag{1}$$

Wir erhalten das gewünschte Ergebnis, indem wir einfach die Gleichungen (4), § 96 der Geradenmethode für die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ hinschreiben. Das liefert folgendes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{gathered}\frac{5}{6}\varphi_k''(x) + \frac{1}{12}[\varphi_{k-1}''(x) + \varphi_{k+1}''(x)] + \frac{1}{h^2}[\varphi_{k-1}(x) - 2\varphi_k(x) + \varphi_{k+1}(x)] = 0,\\ \frac{5}{6}\psi_k''(x) + \frac{1}{12}[\psi_{k-1}''(x) + \psi_{k+1}''(x)] + \frac{1}{h^2}[\psi_{k-1}(x) - 2\psi_k(x) + \psi_{k+1}(x)] = 0,\\ k = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{2}$$

Das System (2) enthält $2n$ Gleichungen mit den $2n + 4$ Unbekannten

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}; \qquad \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_{n-1}.$$

Wir nehmen an, daß das Gebiet die in Abb. 21 dargestellte Form hat, und es sei $H = (n + 1)\,h$ seine Höhe. Wir nehmen weiter an, daß auf dem Rand des Gebietes die Werte der Funktion $u(x, y)$ selbst und ihrer Normalableitung gegeben sind. Dann sind auf der Geraden $AB$ die Größen

$$[\varphi(x, y) + y\psi(x, y)]_{y=0} = \varphi_0(x), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y) + y\psi(x, y)]_{y=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} + \psi_0(x) \tag{4}$$

gegeben, auf der Geraden $CD$ die Größen

$$[\varphi(x, y) + y\psi(x, y)]_{y=H} = \varphi_{n+1}(x) + H\psi_{n+1}(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y) + y\psi(x, y)]_{y=H} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{x=H} + H\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=H} + \psi_{n+1}(x). \tag{6}$$

Wir drücken die Größen $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}$ und die dazu analogen durch die Funktionen $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ aus. Nach der TAYLORschen Formel ist

$$\varphi(x, y + l) = \varphi(x, y) + l\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{l^3}{6}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} + O(l^4), \tag{7}$$

wo $O(\xi)$ eine von derselben Ordnung kleine Größe wie $\xi$ bezeichnet. Wir setzen in (7) $y = y_k$, $l = h$. Dann erhalten wir

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k(x) + h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{y=y_k} + \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right)_{y=y_k} + O(h^4). \tag{8}$$

Nun ist $\varphi(x, y)$ eine harmonische Funktion, deshalb wird

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{y=y_k} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{y=y_k} = -\varphi_k''(x), \quad \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

und folglich

$$\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\right)_{y=y_k} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k}.$$

Setzt man das in (8) ein, so ergibt sich

$$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x) + h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} - \frac{h^2}{2}\varphi_k''(x) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} + O(h^4). \tag{9}$$

Wir unterdrücken in (9) das Glied

$$-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

und bestimmen aus der so gewonnenen Beziehung die Größe

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \frac{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)}{h} + \frac{h}{2}\varphi_k''(x) + O(h^2). \tag{10}$$

Das setzen wir in das vierte Glied auf der rechten Seite von (9) ein. Wir lassen Glieder der Ordnung $h^4$ weg und erhalten jetzt

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \frac{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)}{h} + \frac{h}{6}\varphi_{k+1}''(x) + \frac{h}{3}\varphi_k''(x) + O(h^3).$$

Für $k = 0$ erhalten wir daraus die Näherungsformel

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_0(x)}{h} + \frac{h}{6}\varphi_1''(x) + \frac{h}{3}\varphi_0''(x). \tag{11}$$

Wir setzen jetzt in (7) $y = y_k$, $l = -h$ und kommen auf dem gleichen Wege zur Formel

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \frac{\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)}{h} - \frac{h}{6}\varphi_{k-1}''(x) - \frac{h}{3}\varphi_k''(x),$$

was für $k = n + 1$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=H} = \frac{\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)}{h} - \frac{h}{6}\varphi_n''(x) - \frac{h}{3}\varphi_{n+1}''(x) \tag{12}$$

ergibt. Die Gleichung (3) bestimmt die Größe $\varphi_0(x)$. Wenn man jetzt in (4) und (6) die aus den Formeln (11) und (12) gewonnenen Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=H}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=H}$$

einsetzt, dann erhält man aus (4), (5) und (6) drei Differentialgleichungen, in denen die Unbekannten $\varphi_1(x)$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x)$; $\psi_0(x)$, $\psi_n(x)$, $\psi_{n+1}(x)$ vorkommen. Fügt man diese Gleichungen zu den Gleichungen (2) hinzu, so erhält man ein System von $2n + 3$ Differentialgleichungen mit den Unbekannten $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n+1}$. Die Randbedingungen für dieses System erhält man, indem man die Randbedingungen des Problems in den Schnittpunkten des Randes des Gebietes mit den Geraden $y = y_k$ ausnutzt.

Ein anderes Verfahren zur Aufstellung der Gleichungen der Geradenmethode wird in dem Artikel [1] von A. LANGENBACH angegeben; dieses Verfahren liefert ein System, dessen Lösung man sofort hinschreiben kann. Analog wie das in § 96 für die LAPLACEsche Gleichung gemacht wurde, kann man die biharmonische Gleichung angenähert durch das System

$$u_k^{(4)} + \frac{1}{6}\,\Delta^2 u_k^{(4)} + \frac{2}{h^2}\,\Delta^2 u_k'' + \frac{1}{6h^2}\,\Delta^4 u_k'' + \frac{1}{h^4}\,u_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

ersetzen, das von M. G. SLOBODJANSKI [1, 2] angegeben wurde. Hier ist

$$\Delta^2 u_k = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1},$$

$$\Delta^4 u_k = u_{k+2} - 4u_{k+1} + 6u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2}.$$

Möge $M$ dieselbe Matrix wie in § 97 bezeichnen. Das System (13) kann man in der Form

$$\left(E + \frac{1}{6}\,M\right) U^{(4)} + \frac{2}{h^2}\left(M + \frac{1}{2}\,M^2\right) U'' + \frac{1}{h^4}\,M^2 U = F \tag{14}$$

schreiben, wo $E$ die Einheitsmatrix und $U$ der aus den Funktionen $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ bestehende Spaltenvektor ist; $F$ ist ein Vektor, der durch die gegebenen Randwerte und durch die vorläufig unbekannten Werte von $u_1$ und $u_n$ bestimmt ist. Wir setzen jetzt in $F$ angenähert

$$u_1(x) = g_{11}(x) + h g_{21}(x), \qquad u_n(x) = g_{12}(x) + h g_{22}(x),$$

wo $g_{11}$ und $g_{12}$ die gegebenen Werte der gesuchten biharmonischen Funktion $u(x, y)$ auf den Geradenabschnitten $AB$ und $CD$ sind (Abb. 21), während $g_{21}$ und $g_{22}$ die Werte der Normalableitungen der Funktion $u(x, y)$ auf denselben Abschnitten bedeuten. Jetzt ist der Vektor $F$ bekannt; wir setzen[1])

$$BU = V = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad BF = G = (g_1, g_2, \ldots, g_n);$$

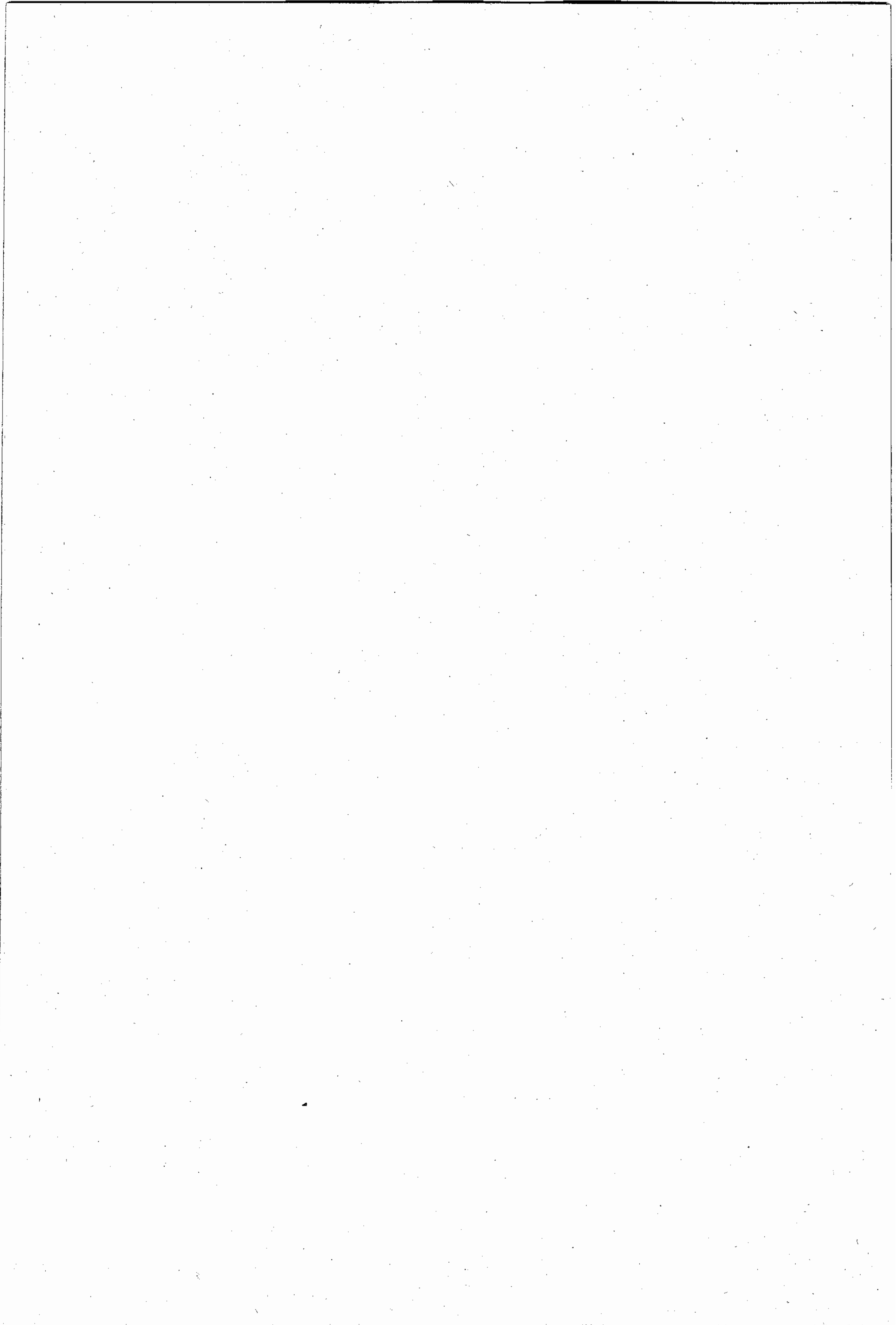
das liefert uns die $n$ unabhängigen Gleichungen

$$v_k^{(4)} + \alpha_k v_k'' + \beta_k v_k = \frac{g_k}{1 + \frac{1}{6}\,\lambda_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Hier ist

$$\alpha_k = \frac{2}{h^2}\,\frac{\lambda_k + \frac{1}{12}\,\lambda_k^2}{1 + \frac{1}{6}\,\lambda_k}; \qquad \beta_k = \frac{1}{h^4}\,\frac{\lambda_k^2}{1 + \frac{1}{6}\,\lambda_k}.$$

1) Wir behalten die Bezeichnungen des § 97 bei.



# LITERATURVERZEICHNIS

ACHIESER, N. I., und GLASMANN, I. M., Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. 3. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1960.

BERGMANN, S., and SCHIFFER, M., Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. Academic Press, New York 1953.

BIRMAN, M. S. (Бирман, М. Ш.),

1. Einige Abschätzungen für die Methode des schnellsten Abfalls (Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска). Uspechi mat. nauk **5** (1950) 3.
2. Über die Berechnung von Eigenwerten mit der Methode des schnellsten Abfalls (О вычислении собственных чисел методом наискорейшего спуска). Schriften der Leningrader Universität **27** (1952) 1.
3. Über Minimalfunktionale für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung (О минимальных функционалах для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка). Doklady **93** (1953) 6.
4. Über das Spektrum singulärer Randwertprobleme für elliptische Differentialgleichungen (О спектре сингулярных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений). Doklady **97** (1954) 1.
5. Über die Variationsmethode von Trefftz für die Gleichung $\Delta^2 u = f$ (О вариационном методе Трефтца для уравнения $\Delta^2 u = f$). Doklady **101** (1955) 2.
6. Variationsmethoden analog dem Trefftzschen Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben (Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Трефтца). Vestnik der Leningrader Universität, Serie Mathematik, Mechanik u. Astronomie, **13** (1956) 3.

BLEICH, F., und MELAN, E., Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Springer-Verlag, Berlin 1927.

BUBNOW, I. G. (Бубнов, И. Г.), Rezension über die mit dem Schurawski-Preis ausgezeichneten Abhandlungen von Prof. Timoschenko (Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко, удостоенных премии им. Журавского). Sammlung des Instituts für Verkehrswesen, Heft 81, SPB, 1913.

CHARRIK, I. J. (Харрик, И. Ю.), Über die Approximation von Funktionen, die auf dem Rand eines Gebietes verschwinden, durch Funktionen spezieller Form (О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида). Mat. sbornik **37** (**79**) (1955) 2.

COURANT, R., Über ein konvergenzerzeugendes Prinzip in der Variationsrechnung. Gött. Nachrichten, 1922.

COURANT, R., und HILBERT, D.,

1. Methoden der mathematischen Physik, Band 1. Springer-Verlag, Berlin 1937.
2. Methoden der mathematischen Physik, Band 2. Springer-Verlag, Berlin 1938.

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., und LEVI, G., Über Differenzengleichungen der mathematischen Physik (О расностных уравнениях математической физики). Uspechi mat. nauk 8 (1940) 125—160.

DIAZ, J. B., Upper and lower bounds for quadratic functionals. Proc. sympos. spectral theory and different problems, Stillwater, Oklahoma 1955, S. 279—289.

EIDUS, D. M. (Эйдус, Д. М.), Über das gemischte Problem der Elastizitätstheorie (О смешанной задаче теории упругости). Doklady **76** (1951) 2; Mat. sbornik **54** (1954) 3.

FADDEJEWA, W. N. (Фаддеева, В. Н.),

1. SAMJATINA, W. N., Über die Fundamentalfunktionen des Operators $X^{IV}$ (Замятина, В. Н., О фундаментальных функциях оператора $X^{IV}$). Arbeiten LIIPS **6** (1935).
2. Über die Fundamentalfunktionen des Operators $X^{IV}$ (О фундаментальных функциях оператора $X^{IV}$). Arbeiten des Steklov-Institutes für Mathematik der Akademie der Wissenschaften **28** (1949).
3. Die Geradenmethode in Anwendung auf gewisse Randwertprobleme (Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам). Arbeiten des Steklov-Institutes für Mathematik der Akademie der Wissenschaften **28** (1949).
4. Numerische Methoden der linearen Algebra (Вычислительные методы линейной алгебры). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1950.

FICHTENHOLZ, G. M. (Фихтенгольц, Г. М.), Grundlagen der mathematischen Analysis, Band 1 (Основы математического анализа). Gostechisdat, Moskau 1955.

FRIEDRICHS, K.,

1. Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. Math. Ann. **98** (1928).
2. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Ann. **109** (1934).
3. On the boundary-value problem of the theory of elasticity and Korn's inequality. Annals of Math. **48** (1947).

FUKS, B. A., und SCHABAT, B. W. (Фукс, Б. А., и Шабат, Б. В.), Die Funktionen einer komplexen Veränderlichen und einige ihrer Anwendungen (Функции комплексного переменного и некоторые их приложения). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1949.

GALERKIN, B. G. (Галеркин, Б. Г.), Stäbe und Platten. Reihen in gewissen Gleichgewichtsproblemen elastischer Stäbe und Platten (Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержнейи пластин). Vestnik der Ingenieure **19** (1915) 897—908.

GELFAND, I. M. (Гельфанд, И. М.), Vorlesungen über lineare Algebra (Лекции по линейной алгебре). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1951.

GERSCHGORIN, S. A. (Гершгорин, С. А.), Über elektrische Netze zur angenäherten Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung (Об электрических сетках для приближенного решения дифференциального уравнения Лапласа). J. angew. Phys. **6** (1929) 3—4.

GÜNTER, N. M., Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. Teubner-Verlag, Leipzig 1957.

JAHNKE, E., und EMDE, F., Tafeln höherer Funktionen. Teubner-Verlag, Leipzig 1952.

KANTOROWITSCH, L. W. (Канторович, Л. В.), Funktionalanalysis und angewandte Mathematik (Функциональный анализ и прикладная математика). Uspechi mat. nauk **3** (1948) 6.

KANTOROWITSCH, L. W., und KRYLOW, W. I., Näherungsmethoden der höheren Analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

KANTOROWITSCH, L. W., KRYLOW, W. I., und TSCHERNIN, K. E. (Канторович, Л. В. Крылов, В. И., и Чернин, К. Е.), Tafeln zur numerischen Lösung von Randwertproblemen aus der Theorie der harmonischen Funktionen (Таблицы для численного решения краевых задач теории гармонических функций). Gostechisdat, Moskau 1956.

KATO TOSIO, On some approximate methods concerning the operators $T^*T$. Math. Ann. **126** (1953).

KELDYSCH, M. W. (Келдыш, М. В.),

1. Über das Verfahren von B. G. Galerkin zur Lösung von Randwertproblemen (О методе Б. Т. Галеркина для решения краевых задач). Isvestija der Akademie der Wissenschaften, Serie Mathematik, **6** (1942) 6.

2. Über einige Fälle von Entartung elliptischer Differentialgleichungen auf dem Rand eines Gebietes (О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области). Doklady **77** (1951) 2.

KIRCHHOFF, G., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. f. reine u. angew. Math. **40** (1850).

KLIOT-DASCHINSKIJ, M. I. (Клиот-Дашинский, М. И.),

1. Lösung des Problems der statischen Deformation einer anisotropen homogenen Platte mit der Methode der orthogonalen Projektionen (Решение задачи о статической деформации анизотропной однородной пластины методом ортогональных проекций). Schriften der Leningrader Universität, Serie Physik, **146** (1952) 131—145.

2. Über ein neues Verfahren zur Lösung des ebenen Problems der Potentialtheorie (Об одном способе решения плоской задачи теории потенциала). Sammlung wiss. Arbeiten des Bauingenieurinstitutes **17** (1954).

KRAWTSCHUK, M. (Кравчук, М.),

1. Beziehungen der Momentenmethode für die Lösung linearer Differential- und Integralgleichungen (Застосування сиособу моментів до розв'язання лінійних дифференціальних та інтегральних рівнянь). Veröffentlichungen der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften, Kiew 1936.

2. Surla résolution approchée des équations intégrales linéaires. C. R. Paris **188** (1929) 978.

KRASNOSELSKI, M. A. (Красносельский, М. А.),

1. Die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens für nichtlineare Gleichungen (Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений). Doklady **73** (1950) 6.

2. Einige Probleme der nichtlinearen Analysis (Некоторые задачи нелинейного анализа). Uspechi mat. nauk **9** (1954) 3.

3. Topologische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen (Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений). Gostechisdat, Moskau 1956.

LADYSHENSKAJA, O. A. (Латыженская, О. А.), Das gemischte Problem für hyperbolische Gleichungen (Смешанная задача для гиперболического уравнения). Gostechisdat, Moskau 1953.

LANGENBACH, A. (Лангенбах, А.), Angenäherte Lösung der biharmonischen Gleichung für ein trapezförmiges Gebiet (Приближенное решение бигармонического уравнения в случае трапецевидной области). Vestnik der Leningrader Universität, Serie Mathematik, Mechanik und Astronomie, **3** (1956).

LEWIN, W. I., und GROSBERG, J. I., Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Verlag Technik, Berlin 1952.

Leibenson, L. S. (Лейбензон, Л. С.),

1. Variationsmethoden zur Lösung von Problemen der Elastizitätstheorie. Gostechisdat, Moskau/Leningrad **1943**; siehe auch L. S. Leibenson, Gesammelte Werke, Band I (1951).

2. Vorlesungen über Elastizitätstheorie (Курс теории упругости). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1947.

Lin-Chun-Sun, Variationsmethoden zur Lösung des Torsionsproblems für mehrfach zusammenhängende Gebiete (in chinesischer Sprache mit englischer Zusammenfassung) (Вариационные методы решения задачи кручения для многосвязных областей). Acta phys. **9** (1953) 4, S. 221—237.

Lusternik, L. A. (Люстерник, Л. А.),

1. Über einige Anwendungen der direkten Methoden in der Variationsrechnung. Mat. sbornik **33** (1926), S. 189—200.

2. Das Dirichletsche Problem (Проблема Дирихле). Uspechi mat. nauk **8** (1940) 115—124.

3. Bemerkungen zur numerischen Lösung der Randwertprobleme der Laplacegleichung und zur Berechnung der Eigenwerte mit der Netzmethode (Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток) Arbeiten des Steklov-Institutes für Mathematik der Akademie der Wissenschaften **20** (1947) 49—64.

Marcus, H., Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Springer-Verlag, Berlin 1932.

Machower, E. W. (Маховер, Е. В.), Biegung einer Platte von veränderlicher Dicke mit scharfem Rand (Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем). Schriften des Leningrader Institutes für Pädagogik, phys.-math. Reihe **17**, Heft 2, S. 28—39.

Mikeladse, S. E. (Микеладзе, Ш. Е.), Über die numerische Integration von Gleichungen elliptischen und parabolischen Typs (О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа). Isvestija der Akademie der Wissenschaften, Serie Mathematik, **5** (1941) 1.

Michlin, S. G. (Михлин, С. Г.),

1. Das ebene Problem der Elastizitätstheorie für inhomogenes Medium (Плоская задача теории упругости для неоднородной среды). Arbeiten des seismologischen Instituts der Akademie der Wissenschaften (1935) 66.

2. Über einen Satz von F. Nöther (Об одной теореме Ф. Нетера). Doklady **43** (1944) 4.

3. Über die Konvergenz der Methode der kleinsten Quadrate (О сходимости метода наименьших квадратов). Doklady **59** (1948) 7.

4. Über die Konvergenz des Verfahrens von Galerkin (О сходимости метода Галеркина). Doklady **61** (1948) 2.

5. Singuläre Integralgleichungen (Сингулярные интегральные уравнения). Uspechi mat. nauk **3** (1948) 3.

6. Die Methode der kleinsten Quadrate in den Aufgaben der mathematischen Physik (Метод наименьших квадратов в задачах математической физики) Schriften der Leningrader Universität, Serie Mathematik (1949) 16.

7. Integralgleichungen (Интегральные уравнения). 2. Aufl., Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1949.

8. Einige hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens (Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина). Schriften der Leningrader Universität, Serie Mathematik (1950) 21.

9. Einige Sätze aus der Operatorentheorie und ihre Anwendung in der Theorie der elastischen Schalen (Некоторые теоремы теории операторов и их приложение к теории упругих оболочек). Doklady **84** (1952) 5.

10. Abschätzung des Fehlers bei der Berechnung elastischer Schalen als ebene Platten (Оценка погрешности расчета упругой оболочки как плоской пластины). Angew. Math. u. Mech. **16** (1952) 4.

11. Das Minimalproblem des quadratischen Funktionals (Проблема минимума квадратичного функционала). Gostechisdat, Moskau 1952.

12. Über eine Variationsmethode zur Lösung von Randwertaufgaben (О вариационном методе решения краевых задач). Schriften der Leningrader Universität, Serie Mathematik (1952) 3.

13. Über die Anwendbarkeit der Variationsmethode auf gewisse ausgeartete elliptische Gleichungen (О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям). Doklady **91** (1953) 4.

14. Die Integration der Poissonschen Gleichung in einem unendlichen Gebiet (Интегрирование уравнения Пуассона в бесконечной области). Doklady **91** (1953) 5.

15. Zur Theorie der ausgearteten elliptischen Gleichungen (К теории вырождающихся эллиптических уравнений). Doklady **94** (1954) 2.

16. Ausgeartete elliptische Gleichungen (Вырождающиеся эллиптические уравнения). Vestnik der Leningrader Universität (1954) 8.

17. Elastische Schalen, die ebenen Schalen benachbart sind (Упругие оболочки, близкие к плоским пластинам). In „Fragen der Beständigkeit der Wasserturbinenschaufeln", Verlag der Leningrader Universität 1954, S. 5—92.

18. Zum Ritzschen Verfahren (По поводу метода Ритца). Doklady **106** (1956) 3.

Moren, K. (Морэн, К.), Bemerkungen zu den Verfahren von Trefftz und Ritz (Замечания о методах Трефтца и Ритца). Bull. der polnischen Akademie der Wissenschaften **3** (1955) 11, S. 569—573.

Muschelischwili, N. I. (Мусхелишвили, Н. И.),

1. Singuläre Integralgleichungen (Сингулярные интегральные уравнения). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1946.

2. Einige Grundprobleme der mathematischen Elastizitätstheorie (Некоторые основные задачи математической теории упругости). 3. Aufl., Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1949.

Natanson, I. P., Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. 2. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1961.

Nowoshilow, W. W. (Новожилов, В. В.), Grundlagen der nichtlinearen Elastizitätstheorie (Основы нелинейной теории упругости). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1948.

Olejnik, O. A. (Олейник, О. А.), Über auf dem Rand eines Gebietes ausgeartete Gleichungen vom elliptischen Typ (Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области). Doklady **87** (1952) 6.

Panow, D. J. (Панов, Д. Ю.),

1. Handbuch zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen (Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1949.

2. Numerische Lösung von Randwertproblemen für elliptische Differentialgleichungen (Численное решение краевых задач дифференциальных уравнений эллиптического типа). Uspechi mat. nauk (1937) 8.

PAPKOWITSCH, P. PH. (Папкович, П. Ф.), Baumechanik des Schiffes (Строительная механика корабля). Band II, 1941.

PETROW, G. I. (Петров, Г. И.), Anwendung des Verfahrens von Galerkin auf das Stabilitätsproblem der zähflüssigen Strömung (Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости). Angew. Math. und Mech. (1940) 3.

PETROWSKI, I. G. (Петровский, И. Г.),
1. Ein neuer Beweis für die Existenz der Lösung des Dirichletschen Problems mit den Methoden der Differenzenrechnung (Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей). Uspechi mat. nauk (1940) 8.
2. Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen (Лекции об уравнениях с частными производными). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1950.

PICONE, M., Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del probleme di Dirichlet. Rendiconti Acad. d. Lincei, ser. 5, **31** (1922).

POLSKIJ, N. I. (Польский, Н. И.),
1. Über die Konvergenz der Methode von B. G. Galerkin (Про збіжність методу Б. Г. Гальоркина). Veröffentlichungen der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften (1949) 6.
2. Über die Konvergenz einiger Näherungsmethoden der Analysis (О сходимости некоторых приближенных методов анализа). Ukr. mat. J. **7** (1955).

PRIWALOW, I. I. (Привалов, И. И.), Integralgleichungen (Интегральные уравнения). ONTI 1935.

RAPHALSON, S. CH. (Рафальсон, З. Х.),
1. Zur Frage der Lösung der biharmonischen Gleichung (К вопросу о решении бигармонического уравнения). Doklady **64** (1949) 8.
2. Zur Frage der Lösung der biharmonischen Gleichung (К вопросу о решении бигармонического уравнения). Schriften der Leningrader Universität, Serie Mathematik, **23** (1952) 165–191.

RAYLEIGH, The Theory of sound, London 1896.

REPMAN, J. W. (Репман, Ю. В.), Zur Frage der mathematischen Grundlage des Galerkinschen Verfahrens zur Lösung des Stabilitätsproblems elastischer Systeme (К вопросу математического основания метода Галеркина решения задач об устойчивости упругих систем). Angew. Math. und Mech. 4 (1940) 2.

RIESZ, F., und NAGY, B., Vorlesungen über Funktionalanalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

RITZ, W.,
1. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Gesammelte Werke, Paris 1911.
2. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. Gesammelte Werke, Paris 1911.

SCHEWTSCHENKO, K. N. (Шевченко, К. Н.), Anwendung einer Variationsmethode auf die Lösung der Probleme der Elastizitätstheorie (Применение вариационного метода к решению задач теории упругости). Angew. Math. und Mech. 2 (1938) 2.

SCHERMAN, D. I. (Шерман, Д. И.), Zur Lösung des ebenen statischen Problems der Elastizitätstheorie bei gegebenen äußeren Kräften (К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах). Doklady 28 (1940) 1.

SCHURA-BURA, M. R. (Шура-Бура, М. Р.), Über die Lösung der Differenzengleichung, die das Dirichletsche Problem für die Laplace-Gleichung approximiert, in elektrischen

Netzen (О решении конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего задачу Дирихле для уравнения Лапласа, на электрических сетках). Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau 1953.

SLOBODJANSKIJ, M. G. (Слободянский, М. Г.),

1. Ein Verfahren zur angenäherten Integration partieller Differentialgleichungen und seine Anwendung auf Probleme der Elastizitätstheorie (Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости). Angew. Math. und Mech. **3** (1939) 1.

2. Das räumliche Problem der Elastizitätstheorie für prismatische Körper (Пространственные задачи теории упругости для призматических тел). Schriften der Moskauer Universität (1940) Heft 39 (Mechanik).

3. Fehlerabschätzung der gesuchten Größe bei der Lösung linearer Probleme durch Variationsmethoden (Оценка погрешности искомой величины при решении линейных задач вариационным методом). Doklady **86** (1952) 2.

4. Eine Fehlerabschätzung der Näherungslösung bei der Lösung linearer Aufgaben, die auf Variationsmethoden führen, und ihre Anwendung zur Bestimmung zweiseitiger Näherungen bei statischen Problemen der Elastizitätstheorie (Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости). Angew. Math. und Mech. **16** (1952) 4.

5. Fehlerabschätzung der Näherungslösung linearer Aufgaben (Оценки погрешности приближенных решений линейных задач). Angew. Math. u. Mech. **17** (1953) 2.

6. Über die angenäherte Lösung linearer Aufgaben, die auf Variationsprobleme führen (О приближенном решении линейных задач, сводящихся к вариационным). Angew. Math. u. Mech. **17** (1953) 5.

7. Angenäherte Lösung gewisser Randwertprobleme für eine elliptische Differentialgleichung und Abschätzung des Fehlers (Приближенное решение некоторых краевых задач для эллиптического дифференциального уравнения и оценки погрешности). Doklady **89** (1953) 2.

8. Über die Transformation von Minimalproblemen für Funktionale in Maximalprobleme (О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума). Doklady **91** (1953) 4.

9. Über die Konstruktion von Näherungslösungen in linearen Aufgaben (О построении приближенного решения в линейных задачах). Angew. Math. u. Mech. **19** (1955) 5.

SMIRNOW, W. I.,

1. Lehrgang der höheren Mathematik, Teil I. 4. Aufl., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
2. Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II. 4. Aufl., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
3. Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III, 2. 3. Aufl., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
4. Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV. 2. Aufl., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
5. Lehrgang der höheren Mathematik, Teil V. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

SOBOLEW, S. L. (Соболев, С. Л.),

1. Gleichungen der mathematischen Physik (Уравнения математической физики). 3. Aufl., Gostechisdat, Moskau 1954.

2. Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf die mathematische Physik (Некоторые приложения функционального анализа к математической физике). Veröffentlichungen der Leningrader Universität 1950.

SRETENSKIJ, L. N. (Сретенский, Л. Н.), Theorie der Flüssigkeitswellen (Теория волновых движений жидкости). ONTI NKTP 1924.

TIMOSCHENKO, S. P. (Тимошенко, С. П.),

1. Theory of elasticity. McGraw-Hill, New York 1951.

2. Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York 1940.

TYCHONOFF, A. N., und SAMARSKI, A. A., Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

TREFFTZ, E.,

1. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verhandl. d. 2. internat. Kongreß für technische Mechanik 1926, S. 131—138.

2. Mathematische Elastizitätstheorie. Handbuch der Physik Bd. 6., Springer-Verlag, Berlin 1928.

TRICOMI, F. (Трикоми, Ф.), Über lineare Gleichungen gemischten Typs (О линейных уравнениях смешанного типа). Gostechisdat, Moskau 1947.

TSCHAPLYGIN, S. A. (Чаплыгин, С. А.), Über Gasströmungen. Im Sammelwerk S. A. TSCHAPLYGIN, Ausgewählte Werke über Mechanik und Mathematik (О газовых струях). Gostechisdat, Moskau/Leningrad 1954.

WALSH, J., Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen. Math. Ann. **96**.

WARWAK, P. M. (Варвак, П. М.), Entwicklung der Netzmethode und ihre Anwendung auf die Berechnung von Platten (Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок). Teil 1: 1949, Teil 2: 1952, Akademie-Verlag Kiew.

WEIERSTRASS, K., Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. Mathem. Werke v. K. WEIERSTRASS, Bd. 2, 1895.

WEYL, H.,

1. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers. Rendiconti del Circolo Matematico die Palermo **39** (1915).

2. The method of orthogonal projections in potential theory. Duke Mathematical Journal **7** (1940).

WISCHIK, M. I. (Вишик, М. И.),

1. Die Methode der orthogonalen Projektionen für selbstadjungierte Gleichungen (Метод ортогональных проекций для самосопряженных уравнений). Doklady **56** (1947) 2.

2. Die Methode der orthogonalen Projektionen für allgemeine selbstadjungierte Gleichungen (Метод ортогональных проекций для общих самосопряженных уравнений). Doklady **58** (1947) 6.

3. Die Methode der orthogonalen und direkten Zerlegungen in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen (Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений). Mat. sbornik **25** (1949).

4. Über das erste Randwertproblem für elliptische Gleichungen, die auf dem Rand des Gebietes ausgeartet sind (О первой краевой задаче для эллиптических уравнении, вырождающихся на границе области). Doklady **93** (1953) 1.

5. Über Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen, die auf dem Rand des Gebietes ausgeartet sind. (О краевых задачах для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области). Doklady **93** (1953) 2.

6. Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen, die auf dem Rand des Gebietes ausgeartet sind (Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области). Mat. sbornik **35** (1954).

Worowitsch, I. I. (Ворович, И. И.), Über die Existenz von Lösungen in der nichtlinearen Schalentheorie (О существовании решений в нелинейной теории оболочек). Isvestija der Akademie der Wissenschaften, Serie Mathematik, **19** (1955) 4.

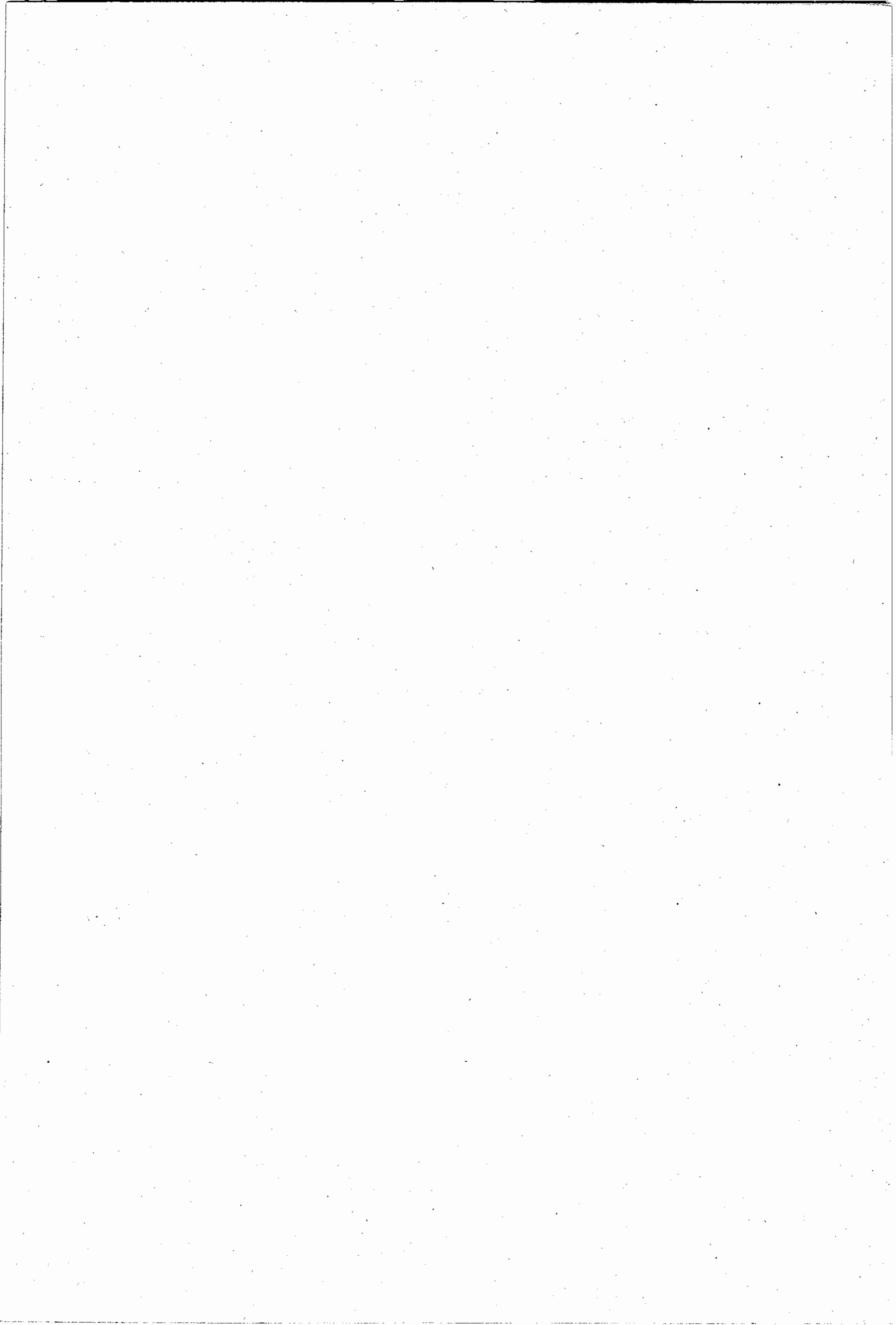
Zaremba, S.,

1. Sur le principe de minimum. Bull. Internat. dé l'Académie des sciences de Cracovie, Classe des sciences mathematiques et naturelles, Nr. 7 juillet 1909, pp. 197–264.

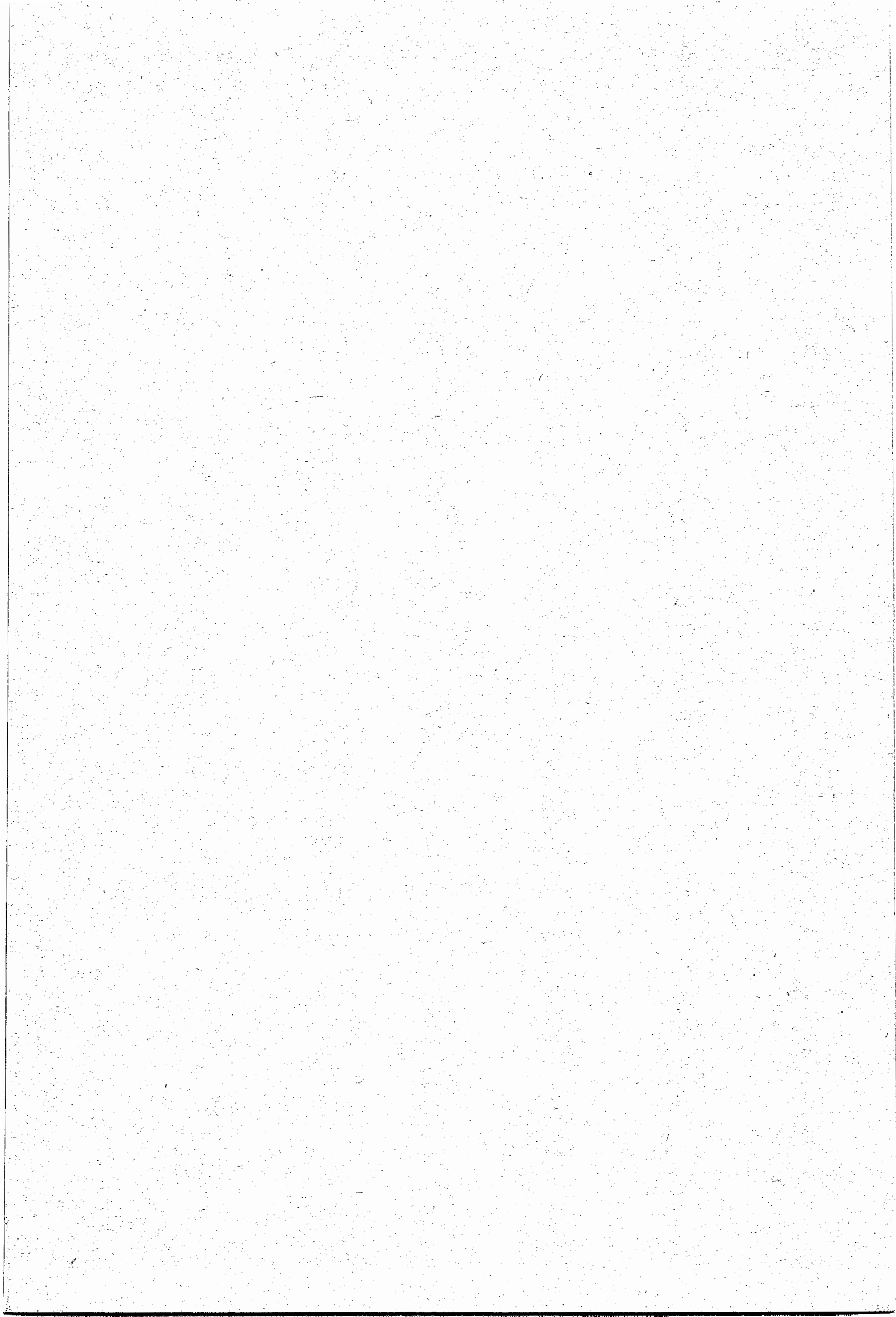
2. Sur un problème toujours possible comprenant, àtitre de cas particuliers le problème de Dirichlet et celui de Neumann. Journal de mathematiques pures et appl. **6** (1927) 127–163.

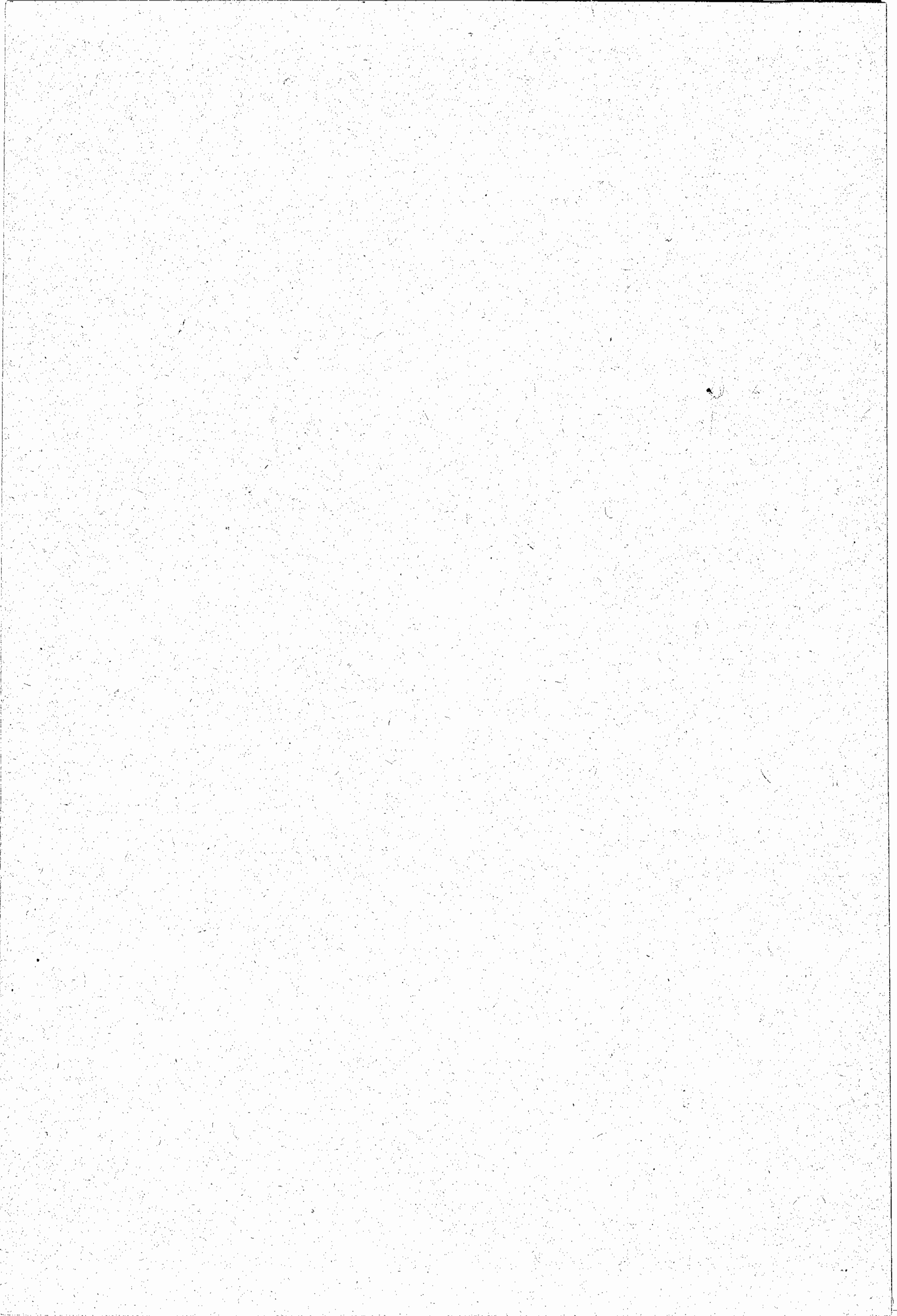
3. L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. Bull. intern. de l'Acad. d. Sciences de Cracovie 1907, Nr. 3.

4. Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Bull. intern. de l'Acad. d. Sciences de Cracovie 1908, Nr. 1.



# SACHVERZEICHNIS





S. G. MICHLIN · VARIATIONSMETHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK